

Friedr. Hultsch

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM

IN STOCKHOLM

DRITTE FOLGE. ACHTER BAND

MIT [illegible]
SOWIE 7 [illegible]

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907–1908



BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. ACHTER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON FR. HULTSCH ALS TITELBILD,
SOWIE 7 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907—1908.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Sach-Register.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Geschichte des Altertums.

Geschichte des Mittelalters.

Geschichte der neueren Zeit.

Aktuelle Fragen.

Das 1. Heft dieses Bandes (S. 1—112) wurde am 24. September 1907 ausgegeben.
„ 2. „ „ „ (S. 113—224) „ „ 28. Januar 1908 „
„ 3. „ „ „ (S. 225—320) „ „ 31. März „ „
„ 4. „ „ „ (S. 321—442) „ „ 14. Juli „ „

Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete.

Von G. Eneström in Stockholm.

So lange ein Forschungsgebiet nur von wenigen Personen bearbeitet wird, die außerdem nicht auf Grund ihres eigentlichen Berufes, sondern sozusagen zufälligerweise in diesem Gebiete tätig sind, lohnt es kaum der Mühe, auch nur einen Versuch zu machen, um planmäßige Arbeit zu bewirken; vielmehr ist es angebrachter, daß jedermann die Untersuchungen vornimmt, die ihn am meisten interessieren. Ist dagegen das Forschungsgebiet schon längere Zeit bearbeitet worden, und hat sich allmählich die Zahl der Teilnehmer vermehrt, so liegt darin ein Anlaß, um wenigstens in Erwägung zu ziehen, ob und auf welche Weise eine planmäßigere Arbeit erzielt werden könnte. Ein Forschungsgebiet der fraglichen Art ist nunmehr die Geschichte der Mathematik, und in diesem Artikel beabsichtige ich auseinanderzusetzen, inwieweit die Arbeit in diesem Gebiete meines Erachtens planmäßig geordnet werden kann. Freilich habe ich den nämlichen Gegenstand beiläufig in einigen früheren Leitartikeln berührt[1]), aber derselbe ist meines Erachtens so wichtig, daß es von besonderen Interesse ist darauf zurückzukommen.

Es dürfte von vorne herein klar sein, daß eine wirkliche planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Gebiete erst dann möglich wird, wenn man festgestellt hat, was eine Geschichte der Mathematik eigentlich enthalten soll. Ist man der Ansicht, die ich schon öfter ausgesprochen und begründet habe, nämlich, daß eine solche Geschichte wesentlich die Entwickelung der mathematischen Ideen zu schildern hat, und zieht man

1) Vgl. z. B. G. Eneström, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik;* Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 2.

in Betracht, daß eine Gesamtgeschichte in diesem Sinne erst nach bedeutenden Vorarbeiten mit Erfolg in Angriff genommen werden kann, so liegt es am nächsten, den Fachgenossen die Bearbeitung historischer Monographien über einzelne Ideen oder über mehrere Ideen in einem beschränkteren Zeitraume zu empfehlen. Bei näherer Untersuchung stellt es sich indessen heraus, daß zur Zeit auch nicht solche Monographien immer mit wirklichem Erfolg in Angriff genommen werden können.

Zieht man zuerst in Betracht die ältere Mathematik, so kommt es oft vor, daß man, um der Entwickelung einer gewissen Idee zu folgen, solche Hilfsmittel zur Verfügung haben muß, die nur ausnahmsweise einem Mathematiker zugänglich sind; es kommt auch vor, daß nicht einmal diese Hilfsmittel genügen, sondern daß ganz spezielle bibliographische, literarische oder philologische Vorarbeiten nötig sind, bevor man den Entwickelungsgang der fraglichen Idee genau feststellen kann. Aber überdies ist es nicht selten unmöglich zu entscheiden, welche Vorarbeiten nötig sind, denn tatsächlich haben zufällige Entdeckungen rein literarischer Art veranlaßt, daß die früheren Ansichten über die Entwickelung gewisser mathematischer Theorien wesentlich modifiziert werden mußten.[1])

In betreff der neueren Mathematik liegt die Sache etwas anders, aber auch hier ist es in vielen Fällen sehr schwierig, einen Überblick des ganzen Entwickelungsganges einer mathematischen Idee zu erzielen, weil die betreffende Literatur zum Teil schwer zugänglich ist und man oft nicht weiß, wo man das Material zu suchen hat.

Aus dem vorangehenden folgt, daß es zwar angebracht sein kann, die Fachgenossen zur Bearbeitung der Geschichte der einzelnen mathematischen Ideen anzuregen, daß es aber noch zu früh ist, auf diesem Wege eine wirklich planmäßige Arbeit zur Herstellung einer Gesamtgeschichte der Mathematik anzuordnen. Vielmehr müssen zuerst bedeutende Vorarbeiten vorliegen, und diese gehören hauptsächlich der literarischen Geschichte der Mathematik an. Die erste Frage wird also sein, inwieweit auf diesem Gebiete eine planmäßige Arbeit erzielt werden kann, und hier muß man, wie schon oben angedeutet wurde, besonders die ältere Mathematik in Betracht ziehen.

Hinsichtlich der Mathematik im Altertum ist es natürlich in erster Linie von Belang, gute Ausgaben nebst Übersetzungen der Werke der wichtigsten Mathematiker, sowie gute Monographien in betreff der übrigen Mathematiker zu haben. In dieser Hinsicht ist ja schon viel geleistet worden, das meiste freilich von Philologen, die sich die nötigen mathe-

1) Als Beleg meiner Behauptung genügt es auf die sogenannte Heron-Frage hinzuweisen.

matischen Kenntnisse verschafft haben, und da es immer gewöhnlicher wird, daß jüngere Philologen Arbeiten über griechische Mathematiker veröffentlichen, so ist es zu hoffen, daß die noch vorhandenen Lücken[1]) allmählich ausgefüllt werden. Jedenfalls ist dies wesentlich eine Sache der Philologen.

In betreff der morgenländischen Mathematik im Altertum und Mittelalter sind die Verhältnisse zur Zeit weniger günstig. Die Schriften der morgenländischen Mathematiker sind nämlich noch zum größten Teil unediert und die Handschriften oft den europäischen Forschern unzugänglich; überdies gibt es teils wenige Orientalisten, die sich für Mathematik interessieren, teils nur ausnahmsweise Mathematiker, die orientalische Sprachen studiert haben. Auch hier muß die weitere Arbeit in erster Linie den betreffenden Philologen überlassen werden.

Die mathematische Literatur des christlichen Mittelalters ist meistens nur handschriftlich vorhanden, und ein großer Teil derselben ist noch nicht näher untersucht; hierzu kommt, daß es oft unmöglich ist, ohne eingehende Nachforschungen zu entscheiden, ob eine Originalabhandlung oder lediglich eine Übersetzung vorliegt[2]), sowie im ersten Falle wer der Verfasser der Abhandlung[3]) ist. Um das handschriftlich vorhandene Material zugänglich zu machen, sind größere philologische Kenntnisse nicht nötig, wohl aber Handschriftenkunde, die allerdings nur in einzelnen Fällen umfassendere Studien zu erfordern braucht, und in solchen Fällen dürfte der Mathematiker ohne allzu große Schwierigkeit einen Handschriftenkenner zu Rate ziehen können. In erster Linie sollte ein Verzeichnis der handschriftlichen mathematischen Literatur des christlichen Mittelalters hergestellt werden,[4]) dann sollten teils die wichtigsten noch unedierten Texte herausgegeben, teils über die übrigen genaue Berichte veröffentlicht werden.

---

1) So z. B. fehlt es noch an einer vollständigen Ausgabe von Ptolemaios Werken nebst Übersetzung derselben; die von Heiberg in Angriff genommene Ausgabe enthält bekanntlich nur den griechischen Text.

2) Ich verweise beispielsweise auf die noch nicht endgültig entschiedene Frage, ob der von Boncompagni (1851) herausgegebene „Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabula" eine Übersetzung oder eine Bearbeitung von Alkhwarizmis Algebra ist (vgl. A. A. Björnbo, *Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkhwarizmis Algebra und von Euklids Elementen;* Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 239—241).

3) Vgl. G. Eneström, *Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni (1857) herausgegebenen „Liber algorismi de pratica arismetrice";* Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 114.

4) Vgl. A. A. Björnbo, *Über ein bibliographisches Repertorium der handschriftlichen mathematischen Literatur des Mittelalters;* Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 326—333.

Mit der Erfindung der Buchdruckerkunst verändern sich die Verhältnisse insofern, als die schon im Druck vorliegenden Schriften wesentlich genügen, um eine literarische Geschichte der neueren Zeit fertig zu stellen. Aber unter diesen Schriften gibt es viele, nicht nur aus dem 15. und 16., sondern auch aus dem Anfange des 17. Jahrhunderts, die wegen ihrer Seltenheit fast ebenso schwer zugänglich sind als Handschriften, und gewisse Arbeiten oder Aktenstücke harren noch einem kompetenten Herausgeber. Die sehr seltenen Schriften gehören freilich nicht den wichtigsten Arbeiten an, so daß man vorläufig von einer Neuausgabe absehen könnte, aber jedenfalls ist es von Belang, daß ihr wesentlicher Inhalt durch Monographien zugänglicher gemacht wird, sofern solche noch nicht vorhanden sind.[1]) Auch kritische Ausgaben der gesammelten Werke gewisser hervorragender Mathematiker des 16. und des Anfanges des 17. Jahrhunderts wären erwünscht.[2])

Mit Descartes beginnt auch vom literarischen Gesichtspunkte aus eine neue Periode, weil von ihm an die mathematischen Quellenschriften zum größten Teil ziemlich leicht zugänglich sind, so daß man hier eine direkte Behandlung der Geschichte der mathematischen Ideen empfehlen könnte. Indessen muß auch die literarische Geschichte der Mathematik nach Descartes weiter bearbeitet werden. Erfreulicherweise sind gesammelte Werke vieler Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts schon herausgegeben und auch wichtige Sammlungen von Briefen sind veröffentlicht worden. Auf der anderen Seite gibt es noch in dieser Hinsicht viele Lücken, die auszufüllen sind; so z. B. fehlt es bekanntlich an einer Ausgabe von Leonhard Eulers Werken und von seinem Briefwechsel ist bisher nur ein unbedeutender Teil publiziert worden. Eine andere nützliche Arbeit wäre es, Berichte über den mathematischen Inhalt gewisser weniger leicht zugänglicher Zeitschriften des 17. und 18. Jahrhunderts zu bringen, die mehr beiläufig mathematische Artikel enthalten, und deren Inhalt darum leicht der Aufmerksamkeit der mathematisch-historischen Forscher entgeht.[3])

1) Vgl. z. B. G. Wertheim, *Die Logistik des Johannes Buteo;* **Biblioth. Mathem.** 2_3, 1901, S. 213—219. — H. Bosmans, *Le „De arte magna" de Guillaume Gosselin;* **Biblioth. Mathem.** 7_3, 1906/7, S. 44—66.

2) So z. B. fehlt es noch an einer vollständigen Ausgabe von Viètes Werken; die alte Ausgabe von F. van Schooten (1646) ist bekanntlich nicht vollständig (der *Canon mathematicus seu ad triangula cum adpendicibus* fehlt) und auch sonst genügt die Ausgabe jetzt kaum den Anforderungen der Kritik.

3) Vgl. z. B. G. Loria, *Il „Giornale de' letterati d'Italia" di Venezia e la „Raccolta Calogerà" come fonti per la storia delle matematiche nel secolo XVIII;* **Abhandl. zur Gesch. d. Mathem.** 9, 1899, S. 241—274.

Mit dem Beginn des 19. Jahrhunderts mehrt sich sowohl die Zahl der Mathematiker als die Durchschnittszahl ihrer Schriften. An Ausgaben der gesammelten Werke der meisten dieser Mathematiker ist es noch zu früh zu denken, aber da ihre Abhandlungen in einer großen Anzahl von Zeit- oder Sammelschriften zerstreut sind, so ist es schon aus diesem Grunde von Interesse, gute Monographien mehr literarischer Art zu bekommen, um bei den Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen im 19. Jahrhundert benutzt zu werden. Aus verschiedenen Gründen ist es im allgemeinen angebracht, für jeden besonderen Mathematiker, der zu den Fortschritten seiner Wissenschaft beigetragen hat, eine solche Monographie zu bearbeiten. Teils ist es viel leichter, unter den Fachgenossen Bearbeiter solcher Monographien zu finden, teils können sich die Verfasser derselben gewöhnlich ohne Schwierigkeit das nötige Material fast vollständig verschaffen; ganz besonders angebracht ist das Verfahren, wenn es sich um Mathematiker handelt, deren Muttersprache nicht eine Kultursprache ist, und die sich in ihren Abhandlungen wenigstens teilweise jener Sprache bedient haben. Auf der anderen Seite ist es gewiß sehr zu empfehlen, schon jetzt Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen im 19. Jahrhundert zu bearbeiten; von solchen Darstellungen gibt es ja eine nicht unbedeutende Anzahl,[1]) aber die meisten können keinen Anspruch darauf machen, das ganze Material benutzt zu haben.

Ich habe bisher eigentlich nur von der Herausgabe mathematischer Quellenschriften und Monographien gesprochen, aber natürlich ist es auch von Belang, Übersichten des wesentlichen Inhalts der mathematischen Literatur eines gewissen Zeitraumes[2]) oder einer größeren Abteilung der Mathematik[3]) zu bekommen, noch bevor das ganze für diesen Zweck nötige Material leicht zugänglich gemacht worden ist. Solche Übersichten könnten natürlich auf verschiedene Weise bearbeitet werden. Man kann sich z. B. darauf beschränken, in chronologischer Ordnungsfolge über die betreffenden Schriften zu berichten, und wenn eine solche Arbeit bis auf unsere Tage, oder wenigstens bis zum Jahre 1868, mit dem das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik beginnt, fortgesetzt

1) Bekanntlich sind auf Anregung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung viele Darstellungen dieser Art in Angriff genommen oder veröffentlicht worden; vom historischen Gesichtspunkte aus sind diese von sehr verschiedenem Wert; einige behandeln die Entwickelung nur im Vorübergehen und beschränken sich hauptsächlich auf den gegenwärtigen Stand der betreffenden Theorie.

2) Vgl. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Herausgegeben von M. Cantor. IV (Leipzig 1907); für den Zeitraum 1759—1799.

3) Vgl. z. B. A. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I—II (Leipzig 1900—1903).

wäre, so hätte man dadurch ein mathematisch-historisches Nachschlagebuch bekommen, das vorläufig den Forschern gute Dienste leisten könnte. Wertvoll sind zuweilen auch Sammlungen von Ergänzungen und Berichtigungen schon erschienener mathematisch-historischer Arbeiten[1]) sowie Hinweise auf die Lücken, die noch von der Forschung auszufüllen sind.[2]) Für die Geschichte der älteren Mathematik sind Übersichten der neuesten Errungenschaften auf diesem Gebiete besonders empfehlenswert, weil die betreffenden Schriften oft in philologischen Zeitschriften, die den Mathematikern schwer zugänglich sind, veröffentlicht werden.[3])

In nahem Zusammenhange mit der literarischen Geschichte der Mathematik steht die mathematische Bibliographie. Leider fehlt es uns noch an einer vollständigen Bibliographie dieser Art,[4]) und darum können bibliographische Spezialuntersuchungen, besonders wenn sie die Angaben viel benutzter mathematisch-historischer Arbeiten berichtigen oder ergänzen, sehr dankenswert sein.[5]) Dasselbe gilt in gewissen Fällen von rein biographischen Untersuchungen und noch mehr von Beiträgen zur Geschichte des mathematischen Unterrichtes.[6]) Wenn man für jede wichtigere Universität eine solche Geschichte bekommen könnte, so würde dadurch die mathematisch-historische Forschung sehr erleichtert werden.

Endlich ist es auch angebracht, von Zeit zu Zeit den Fachgenossen eine gedrängte Übersicht der literarischen Resultate der mathematisch-historischen Forschung mit Verweisen auf die Quellenschriften und die Monographien zu bieten.[7])

1) Vgl. die „Kleinen Bemerkungen" zur letzten Auflage von Cantors *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* in der dritten Folge der Bibliotheca Mathematica.

2) Vgl. die „Anfragen" der Bibliotheca Mathematica.

3) Vgl. z. B. J. L. Heiberg, *Mathematik, Mechanik und Astronomie*; Die Altertumswissenschaft, herausg. von W. Kroll, I (1905), S. 129—143. — K. Tittel, *Mathematik, Mechanik und Astronomie* 1902—1905; Jahresber. für Altertumswiss. **129**, 1906, S. 113—219.

4) Es ist noch unbekannt, wann Herr G. Valentin die Bearbeitung des von ihm seit 22 Jahren gesammelten bibliographischen Materials beenden wird, so daß der Druck seiner allgemeinen mathematischen Bibliographie beginnen kann.

5) Zu welchen unrichtigen Folgerungen ungenaue bibliographische Aufschlüsse zuweilen führen können, habe ich in der Bibliotb. Mathem. 1_3, 1900, S. 277 durch ein Beispiel gezeigt.

6) Vgl. z. B. C. H. Müller, *Studien zur Geschichte ... des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 18, 1904, S. 51—143.

7) Ein Versuch in dieser Richtung sind z. B. die *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur* (Leipzig 1892) von Felix Müller. Im Gebiete der elementären Mathematik kann J. Tropfkes *Geschichte der Elementar-Mathematik* (I—II, Leipzig 1902—1903) für den fraglichen Zweck benutzt werden.

Wenn also noch sehr viel auf dem literarischen Gebiete zu tun ist,[1]) bevor eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik mit Erfolg bearbeitet werden kann, so bedeutet dies, wie ich schon im vorhergehenden angedeutet habe, gar nicht, daß man vorläufig die Bearbeitung der Entwickelungsgeschichte ganz beiseite lassen soll. Nicht nur für den Zeitraum, der mit DESCARTES beginnt, sondern auch für die ältere Zeit ist es nützlich, daß Einzeldarstellungen dieser Art in Angriff genommen werden,[2]) und auch Versuche, auf Grund des schon vorhandenen Materials die ganze Entwickelungsgeschichte der Mathematik zu schildern, sind mit Freuden zu begrüßen.[3]) In diesem Zusammenhange erlaube ich mir auch hier auf den großen Nutzen hinzuweisen, die die mathematisch-historische Forschung davon haben kann, daß größere mathematische Unternehmungen (z. B. Enzyklopädien) auch den Entwickelungsgang der mathematischen Theorien berücksichtigen.[4])

Für eine planmäßige mathematisch-historische Arbeit ist es indessen von Belang, nicht nur daß die schon angegebenen Untersuchungen oder Arbeiten ausgeführt werden, sondern auch daß ihre Resultate in formeller Hinsicht den Anforderungen der Wissenschaft genügen. In erster Linie müssen natürlich die Angaben zuverlässig sein und im Bedarfsfalle durch genaue Zitate oder Verweise belegt werden.[5]) Dies bedeutet freilich nicht,

1) Wenn K. TITTEL (a. a. O. S. 118) bemerkt: „Dagegen kann ENESTRÖM in der literarischen Forschung nur eine Tätigkeit von untergeordneter Bedeutung sehen, da er als Spezialist eine Darstellung der Entwickelung sämtlicher mathematischer Theorien fordert, die zum großen Teile nur für den Mathematiker von Fach verständlich sein werden. Von diesem Standpunkt kommt er dazu, CANTOR als einen Forscher zu bezeichnen, der nur als Kulturhistoriker wirken kann, und die Mitarbeit der Historiker und Philologen nicht sehr hoch zu schätzen", so hat er mich durchaus mißverstanden. Schon vor vielen Jahren (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 2) habe ich ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, wie wichtig eingehende mathematisch-literarische Untersuchungen sind, und ich weiß nicht, wie Herr TITTEL dazu gekommen ist, mir die Ansicht zuzuschreiben, die literarische Tätigkeit sei von untergeordneter Bedeutung. Möglicherweise hat er eine Bemerkung von mir, daß „bei der kulturhistorischen Behandlung gewisse Fragen in den Vordergrund treten müssen, die für die Geschichte der mathematischen Ideen von untergeordneter Bedeutung sind" mißverstanden.

2) Die oben (S. 5, Anm. 3) zitierte Arbeit von BRAUNMÜHL ist zum Teil dieser Art.

3) Vgl. H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (Leipzig 1903).

4) Vgl. G. ENESTRÖM, *Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse;* Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 398—406.

5) Ein abschreckendes Beispiel in betreff unzuverlässiger und unvollständiger Angaben hat uns Herr MAX SIMON durch seine Arbeit *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert* (Leipzig 1906) zur Verfügung gestellt.

daß nur Tatsachen aber keine Annahmen erwähnt werden dürfen; zu welchem unfruchtbaren Resultate eine Beschränkung auf nackte Tatsachen führen würde, ersieht man am leichtesten, wenn man einige von Boncompagnis Abhandlungen[1]) studiert. Dagegen sollen die Annahmen, die nötig sind, um den gegebenen Stoff zu bearbeiten, immer mit Vorsicht und Sparsamkeit angewendet werden, und als solche hervorgehoben werden.[2])

Bei den literarischen Untersuchungen über ältere mathematische Arbeiten ist es sehr wünschenswert, daß nicht nur über den hauptsächlichen Inhalt derselben berichtet, sondern auch darauf Bezug genommen wird, ob in den Arbeiten etwas vorkommt, daß als Vorbereitung neuer Theorien betrachtet werden kann. Für die Entwickelungsgeschichte können solche Sachen von großem Interesse sein, auch wenn sie nur beiläufig in den betreffenden Arbeiten vorkommen, und darum von den Verfassern selbst nicht hervorgehoben worden sind; zuweilen können sogar unrichtige Sätze verdienen, besonders notiert zu werden, weil sie die Anfänge neuer Theorien enthalten.[3]) Dagegen ist es natürlich unangebracht, in ältere Arbeiten Methoden oder Sätze hineinzulegen, nur weil sie bei flüchtigem Einsehen einer Arbeit dort vorzukommen scheinen, obgleich es sich bei näherer Untersuchung ergibt, daß der Wortlaut auf eine ganz andere Weise aufzufassen ist.[4])

Bei den entwickelungshistorischen Untersuchungen ist natürlich besonders die Berücksichtigung des Zusammenhangs der mathematischen Ideen zu empfehlen. Dieser Zusammenhang kann entweder ein äußerer oder ein rein innerer sein. Ein äußerer Zusammenhang findet statt, wenn die Entdeckungen eines Mathematikers nachweislich durch die Vorarbeiten eines Vorgängers angeregt oder veranlaßt worden sind, ein innerer Zusammenhang dagegen, wenn eine Abhängigkeit nicht anzunehmen oder wenigstens nicht nachzuweisen ist, aber die späteren Entdeckungen von methodischem Gesichtspunkte aus als eine unmittelbare Fortsetzung älterer

---

1) Siehe z. B. die Abhandlung *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478;* Atti dell' accad. pontif. de' Nuovi Lincei 16, 1863, 1—64, 101—228, 301—364, 389—452, 503—630, 683—842, 909—1044.

2) Vgl. G. Eneström, *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung;* Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 1—8.

3) Vgl. meine Bemerkung über Albertus de Saxonia und Konvergenzbedingungen in der Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 381—382.

4) Vgl. z. B. meine Bemerkung über das angebliche Vorkommen des Satzes $u_{x+2} = u_x + 2\Delta u_x + \Delta^2 u_x$ bei Nikomachos (Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 379) und des Satzes von der Gleichungskonstante bei Cardano (Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 212—213).

Untersuchungen betrachtet werden können. Auch auf das Vorkommen der zweiten Art von Zusammenhang mathematischer Ideen aufmerksam zu machen ist meines Erachtens von großen Interesse.[1])

In zweiter Linie erlaube ich mir zu bemerken, daß allzu breite Darstellungen, wenn irgend möglich, vermieden werden sollten. Unter Umständen kann es ja nützlich sein, ausführliche Auskunft über gewisse ältere Schriften oder über die Geschichte einer Theorie zu bekommen, aber wenn die Darstellung zu ausführlich ist, werden viele Leser leicht abgeschreckt, davon Kenntnis zu nehmen.[2]) Natürlich ist die Ausführlichkeit oft eine Geschmackssache, und das Urteil darüber von der Abschätzung der Bedeutung des behandelten Gegenstandes abhängig.

Ich habe schon oben betont, das in betreff der Geschichte der Mathematik im Altertum und zum Teil auch im Mittelalter die Herbeischaffung des Quellenmaterials wesentlich eine Aufgabe der Philologen ist. Die übrige Arbeit liegt natürlich in erster Linie den eigentlichen mathematisch-historischen Forschern ob, und es ist klar, daß diese besonders geeignet sind, die vorzugsweise literarischen Untersuchungen auszuführen. Dagegen könnte es scheinen, als ob man das beste Resultat erzielen würde, wenn man imstande wäre produktive Mathematiker zu bewegen, Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen zu bearbeiten. In der Tat ist ein solches Verfahren meines Erachtens in betreff der Geschichte des 19. und eines Teiles des 18. Jahrhunderts zu empfehlen, aber weniger angebracht hinsichtlich der älteren Zeit. Der produktive Mathematiker interessiert sich nämlich im allgemeinen nur für die Geschichte seines Gebietes und er bekümmert sich weniger um die älteren Untersuchungen auf diesem Gebiete, die vielleicht jetzt einen vollständig überwundenen Standpunkt repräsentieren.[3]) Freilich hat es produktive Mathematiker gegeben, die zugleich wirkliche Historiker waren, und auch jetzt gibt es ausnahmsweise solche, aber mit der Entwickelung der Geschichte der Mathematik

1) Vgl. z. B. meine Bemerkung über die Waessenaer-Newtonsche Methode zur Auffindung der rationalen Wurzeln einer Gleichung (Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, S. 94).

2) Vgl. z. B. die noch nicht beendete Arbeit von H. Burkhardt, *Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (Jahresber. d. deutschen Mathem.-Verein. 10), deren schon erschienene Hefte zusammen etwa *vierzehnhundert* Druckseiten enthalten.

3) Vgl. C. H. Müller, *Mathematik;* Mitteil. d. Gesellsch. für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte 15, 1905, S. 1 des Sonderabzuges. Als charakteristisch für die Auffassung in gewissen Kreisen von Mathematikern verdient der folgende Ausspruch eines englischen Mathematikers zitiert zu werden: „Si vous étudiez l'histoire des sciences mathématiques, vous resterez sans faire des progrès" (L'enseignement mathém. 9, 1907, S. 307).

zu einer wirklichen Wissenschaft, die eine ganz besondere Schulung und umfassende Kenntnisse erfordert, werden Mathematiker dieser Art immer seltener werden. Für die Bearbeitung der Entwickelungsgeschichte der Mathematik vor der Mitte des 18. Jahrhunderts müssen also die eigentlichen Historiker Sorge tragen.[1]) Dagegen gibt es eine Weise, wodurch die prodnktiven Mathematiker der jetzigen und der künftigen historischen Forschung besonders nützlich sein können, nämlich durch Veröffentlichungen wissenschaftlicher Biographien kürzlich verstorbener Mathematiker.

Bei den vorangehenden Ausführungen habe ich vorausgesetzt, daß der Endzweck der mathematisch-historischen Forschung ist, zuletzt eine Geschichte der Entwickelung der mathematischen Ideen zn bringen. Indessen ist es klar, daß auch wer die Geschichte der Mathematik lediglich als eine Geschichte der mathematischen Literatur, also als einen Zweig der allgemeinen Literaturgeschichte betrachtet, ein nützlicher Teilnehmer an der von mir oben empfohlenen planmäßigen Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete sein kann, denn ein großer Teil dieser Arbeit, z. B. die Herausgabe der gesammelten Werke von Mathematikern bezieht sich auf die Geschichte der mathematischen Literatur. Dasselbe gilt auch von denen, die in der Geschichte der Mathematik wesentlich eine Geschichte der mathematischen Charakterzüge des Kulturlebens[2]) sehen wollen, denn um eine solche Geschichte zu bearbeiten, müssen ja znerst die Schriften, die diese Charakterzüge enthalten, zugänglich gemacht und planmäßig untersucht werden, etwa auf die von mir oben vorgeschlagene Weise.

---

1) Wenn J. Tropfke in seinem Artikel *Mathematik* (Jahresber. über das höhere Schulwesen **20**, 1905, S. 13 des Sonderabzuges) sagt: „Der letztere [Eneström] zielt daranf hin, daß dem produktiven Mathematiker das historische Material immer schön gesichtet zur Hand liegt", so schreibt er mir eine Ansicht zn, die ich nur zum Teil billigen kann. Meines Erachtens ist es von großem Belang, daß das historische Material schön gesichtet zur Hand liegt, aber nicht nur nm von den produktiven Mathematikern benntzt zn werden. Noch weniger kann ich die Ausführungen des Herrn Tropfke gutheißen, wenn er zuerst M. Cantor und mich als Vertreter zwei verschiedener Arten der mathematischen Geschichtsschreibung nennt, und dann hinzufügt: „Cantor . . . legt Wert auf die Herausarbeitung des eigentlichen Ideengehaltes", woraus man folgern muß, daß ich nur geringen Wert darauf lege. Im Gegenteil lege ich das größte Gewicht gerade auf die Entwickelung der mathematischen Ideen. Herr Tropfke heruft sich freilich auf den oben (S. 9, Anm. 3) zitierten Artikel von C. H. Müller, scheint aber ein paar darin vorkommende Bemerkungen mißverstanden zu haben.

2) Diese Definition entnehme ich dem Artikel von M. Cantor: *Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln?* (Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 115.

Dagegen ist vor einigen Jahren eine besondere Auffassung der Geschichte der Mathematik in die Öffentlichkeit gelangt[1]) nach welcher, soviel ich sehen kann, eine ganz andere Art von planmäßiger Arbeit erforderlich sein würde. Nach dieser Auffassung sollte es die Aufgabe der mathematischen Geschichtsschreibung sein, die folgende Frage zu beantworten: „Was bedeutet und was hat zu den verschiedenen Zeiten die Mathematik für die Kultur bedeutet?". Zieht man hier zuerst in Betracht die materielle Kultur, so scheint es, als ob es eigentlich nur nötig wäre, die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der technischen Mathematik zu schildern, um die Frage genügend zu beantworten. Geht man dann zu der geistigen Kultur über, so wäre es wohl zwecklos, die ganze mathematische Literatur durchzuforschen, um ausfindig zu machen, was die Mathematik für diese Kultur bedeutet hat, denn es scheint mir offenbar, daß viele mathematische Ideen keinen merkbaren Einfluß auf dieselbe gehabt haben können. Oder darf man wirklich behaupten, daß z. B. das Fundamentaltheorem der Algebra und die verschiedenen Beweise desselben eine nachweisliche Bedeutung für die Kultur haben? Jedenfalls ist die fragliche Auffassung der Geschichte der Mathematik wesentlich von der diesem Artikel zugrunde liegenden verschieden[2]), und von der Seite der Vertreter jener Auffassung ist kaum eine Teilnahme an einer planmäßigen mathematisch-historischen Arbeit auf die von mir angegebene Weise zu erwarten.

Zuletzt fasse ich den wesentlichen Inhalt dieses Artikels in folgende Punkte zusammen:

1. Eine planmäßige mathematisch-historische Arbeit muß in erster Linie darauf hinzielen, die großen noch vorhandenen Lücken auf dem literarischen Gebiete auszufüllen; an dieser Arbeit ist die Teilnahme der Literar- und Kulturhistoriker sehr willkommen, die der Philologen sogar notwendig.

2. Gleichzeitig mit dieser Arbeit sollen die Historiker der Mathematik, sofern das schon herbeigeschaffte Material nicht zu unvollständig ist, die

1) Siehe S. 53 der S. 6, Anm. 6 zitierten Abhandlung von C. H. Müller; da Herr Müller hervorhebt, daß er Herrn F. Klein eine große Reihe von Gesichtspunkten und Auffassungen verdankt, so kann ich nicht entscheiden, ob diese Auffassung von C. H. Müller selbst oder von F. Klein herrührt.

2) Meiner Ansicht nach kann man von einem gewissen Standpunkt sehr gut sagen, daß es die Aufgabe der Geschichte *des mathematischen Unterrichts* in letzter Linie ist, die Frage zu beantworten: „Was hat zu verschiedenen Zeiten der mathematische Unterricht für die Kultur bedeutet?". Dagegen ist es mir noch nicht recht verständlich, wie man die Geschichte der *Mathematik* behandeln soll, wenn man für dieselbe eine entsprechende Definition aufstellt.

Geschichte der einzelnen mathematischen Ideen vorzugsweise bis gegen das Ende des 18. Jahrhundert bearbeiten und wenn irgend möglich die produktiven Mathematiker anregen, bei der Behandlung der Geschichte der folgenden Zeit behilflich zu sein.

3. Bei den literarischen Untersuchungen soll, so weit möglich, darauf Bezug genommen werden, daß das Material, das zugänglich gemacht wird, in letzter Linie für eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik benutzt werden wird.

Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes.

Von Ferdinand Rudio in Zürich.

Ums Jahr 434 hat Anaxagoras im Gefängnis „die Quadratur des Kreises gezeichnet". So berichtet Plutarch, ohne freilich mitzuteilen, worin diese Zeichnung bestanden hat. Ungefähr um jene Zeit haben auch Antiphon und Hippokrates ihre Aufsehen erregenden Untersuchungen angestellt und dadurch die Aufmerksamkeit weitester Kreise auf das Problem von der Kreisquadratur gelenkt. Diese Untersuchungen wurden allerdings, wie es scheint, weniger ihrer selbst willen so viel besprochen als wegen der Sophismen, die man dahinter zu entdecken glaubte.

Als Beweis dafür, daß gegen das Ende des fünften Jahrhunderts das Problem von der Quadratur des Kreises bereits eine große Popularität erreicht habe, wird gewöhnlich geltend gemacht, daß Aristophanes in seinem Lustspiele „Die Vögel"[1]) das Problem auf die Bühne gebracht habe. In diesem Lustspiele läßt Aristophanes den Geometer Meton[2]) auftreten und mit Peithetäros ein Gespräch führen, in dem sich die folgende Stelle[3]) findet (Ar. *Av.* 1001—1009):

ΜΕΤΩΝ.

....

1001 .... προσθεὶς οὖν ἐγὼ
τὸν κανόν', ἄνωθεν τουτονὶ τὸν καμπύλον
ἐνθεὶς διαβήτην — μανθάνεις;

ΠΕΙΘΕΤΑΙΡΟΣ

οὐ μανθάνω.

1) Zuerst aufgeführt in Athen an den großen Dionysien im März des Jahres 414.

2) Der bekannte Astronom, der ums Jahr 433 den Athenern einen neuen Kalender gab, durch Einführung des nach ihm benannten Mondzirkels von 19 Jahren.

3) Ich zitiere sie nach der Ausgabe von Th. Kock (1864). Ihr ist auch die Lesart *Πειθέταιρος* entnommen statt der in den Hds. überlieferten *Πεισθέταιρος*.

ΜΕΤΩΝ.

ὀρθῶς[1]) μετρήσω κανόνι προστιθείς, ἵνα
ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος, κἀν μέσῳ
ἀγορά, φέρουσαι δ'ὦσιν εἰς αὐτὴν ὁδοὶ
ὀρθαὶ πρὸς αὐτὸ τὸ μέσον, ὥσπερ δ'ἀστέρος
αὐτοῦ κυκλοτεροῦς ὄντος ὀρθαὶ πανταχῇ
ἀκτῖνες ἀπολάμπωσιν.

ΠΕΙΘΕΤΑΙΡΟΣ.

ἅνθρωπος Θαλῆς.

Die Übersetzung der ganzen Stelle folgt später. Hier sei zunächst darauf aufmerksam gemacht, daß durch das Komma nach *κανόν'* (1002) die Worte *ἄνωθεν . . . καμπύλον* zu *ἐνθεὶς διαβήτην* gezogen sind. Die verschiedenen Ausgaben sind darin nicht einig, doch scheint mir die hier zu Grunde gelegte Lesart durchaus notwendig[2]). Wollte man *ἄνωθεν . . . καμπύλον* zum vorhergehenden *προσθεὶς . . . κανόν'* nehmen (also: „ich lege nun von oben her dies gebogne Lineal da an"), so würde — falls man der Stelle überhaupt einen Sinn beilegen will, worüber noch zu reden sein wird — das „gebogene Lineal" (dem dann nachher das „gerade Lineal" — *ὀρθῷ* [statt *ὀρθῶς*] *μετρήσω κανόνι* — entsprechen würde) doch notwendig auf eine Rektifikation des Kreises hinweisen. Von einer solchen ist aber hier ganz und gar nicht die Rede. Und auch selbst dann könnten die Worte *ἄνωθεν . . . καμπύλον* nur mit Gewalt zu *προσθεὶς . . . κανόν'* gezogen werden[3]): *κανών* bedeutet seiner Natur nach etwas Gerades — einen Rohrstab (*κάννα*), überhaupt einen geraden Stab,

1) In der Ausgabe von KOCK und allen andern, die ich kenne und noch zitieren werde, steht entsprechend der Mehrzahl der Hds. nicht *ὀρθῶς* sondern *ὀρθῷ*. Nach der Ausgabe von FR. H. M. BLAYDES (1882) kommt aber doch auch *ὀρθῶς* vor, und zwar in den beiden Hds. S. (= Ven. Bibl. Marc. 475) und B. (= Par. Bibl. Reg. 2715). Ich halte *ὀρθῶς* für die weitaus bessere Lesart.

2) Sie ist wohl zuerst von KOCK gewählt worden. Von den mir bekannten Herausgebern hat sie aber nur BLAYDES aufgenommen, und zwar mit der Begründung: „Neque enim *ἄνωθεν προσφέρεται ὁ κανὼν* (the rule) sed *ὁ διαβήτης* (the compasses); neque *καμπύλος* est ille, sed hic". Mit der Lesart von KOCK stimmen ferner überein die Übersetzungen von L. SEEGER (1846), J. G. DROYSEN (aber erst in der 2. Aufl., wohlfeile Ausg. v. 1871) und E. SCHINCK (Reclamausgabe).

Zu *προσθεὶς . . . κανόν'* sind die Worte *ἄνωθεν . . . καμπύλον* gezogen in allen von mir eingesehenen ältesten Ausgaben (z. B. der aldinischen von 1498 [editio princeps] und der Pariser von 1528), sodann bei PH. INVERNIZZI (1794), in der Tauchnitzausgabe (1812—14), bei J. BEKKER (1829), W. DINDORF (1846), A. MEINEKE (1860), TH. BERGK (1900), J. v. LEEUWEN (1902), sowie in den Übersetzungen von J. H. VOSS (1821), J. MINCKWITZ (1881) und J. G. DROYSEN (aber nur in der ersten Aufl. von 1835).

3) Siehe die in Anm. 2 zitierten Worte von BLAYDES.

einen Maßstab, ein Richtscheit, ein Instrument zum Abstecken gerader Richtungen (übertragen: Richtschnur, Regel, Vorschrift). Mit *καμπύλος*, gebogen, ist es schwer verträglich. Und was soll bei einer Zeichnung, die doch auf dem Boden, im Sande, ausgeführt wird, *ἄνωθεν* („von oben her" das Lineal anlegen) bedeuten? Alle diese Schwierigkeiten fallen sofort weg, wenn man *ἄνωθεν* . . . *καμπύλον* mit *ἐνθεὶς διαβήτην* verbindet: Der Zirkel, *διαβήτης*[1]), der wird von oben eingesetzt, und *καμπύλος* ist ein für *διαβήτης* geradezu typisches Epitheton. Die ältesten Zirkel in ihrer primitivsten Form waren sicherlich einfach durch Umbiegen (*κάμπτειν*) eines geeigneten Stabes hergestellt worden. Als Beleg dafür könnte man, abgesehen von bildlichen Darstellungen[2]), die auf uns gekommen sind, die viel besprochene Stelle in den „Wolken" des ARISTOPHANES (aufgeführt im Jahre 423) heranziehen (178):

„*κάμψας ὀβελίσκον, εἶτα διαβήτην*[3]) *λαβών,*
ἐκ τῆς παλαίστρας θυμάτιον[4]) *ὑφείλετο.*"

„Er [SOKRATES] bog ein klein Bratspießchen, nahm's als Zirkel und — stahl so sich aus der Ringschul ein Stück Opferfleisch." —

Wenden wir uns nun nach diesen Auseinandersetzungen zu dem eigentlichen Inhalte jener Stelle in den „Vögeln". Die Worte, die speziell als auf die Kreisquadratur bezüglich gedeutet werden, sind: „*ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος*" — angeblich: „auf daß der Kreis dir quadratisch (quadriert) werde".

Zu diesen Worten macht bereits der Scholiast (ed. FR. DÜBNER) die Bemerkung: „*Παίζει. ἀδύνατον γὰρ τὸν κύκλον γενέσθαι τετράγωνον*" — „Er scherzt. Denn es ist unmöglich, daß der Kreis viereckig werde". Diese Bemerkung bezieht sich natürlich nicht auf die Unmöglichkeit

1) Der „Ausschreiter". Die Bezeichnung rührt daher, daß der Zirkel beim wiederholten Abmessen immer einen Fuß vor den andern setzt, also ausschreitet wie der Mensch beim Gehen.

2) Man betrachte z. B. den Tasterzirkel mit gebogenen Armen, der p. 91 im 3. Bande des bekannten Werkes von H. BLÜMNER, *Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste bei Griechen und Römern*, abgebildet ist. Für weiteres über Zirkel im Altertume vergleiche man außer diesem Werke noch den Artikel *Circinus* von FR. HULTSCH in der Realenzyklopädie von PAULY-WISSOWA.

3) Diese Stelle, wie natürlich auch die in den „Vögeln", ist zugleich für die Geschichte der mathematischen Terminologie von Interesse. In seinen *Kulturhistorischen Beiträgen* (Erstes Heft, Leipzig 1906, § 45) führt MAX C. P. SCHMIDT als älteste Stelle für das Vorkommen von *διαβήτης* (und zwar in der Bedeutung von Bleiwage) PLAT. *Phileb.* 56 b an. Die Stellen bei ARISTOPHANES sind also wesentlich älter (vielleicht die ältesten, die wir besitzen) und belegen überdies die ursprüngliche Bedeutung des Wortes.

4) Überliefert ist bekanntlich *θοἰμάτιον*, was aber keinen Sinn gibt.

einer Quadratur des Kreises, denn zu der Zeit, als die Scholien entstanden, wäre ein derartiges Urteil nicht denkbar gewesen. Die Bemerkung ist vielmehr eine rein naive: Ein Kreis kann doch nicht viereckig werden. Wir werden aber sehen, daß der Scholiast die Stelle trotzdem mißverstanden hat

Und auch von den Geschichtsschreibern der Mathematik ist die Stelle bisher mißverstanden worden. So sagt Montucla in seiner *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (p. 34): „Aristophane en saisissait l'occasion pour plaisanter dans sa comédie des *Oiseaux*: „Je vais, fait-il dire à un géomètre qu'il introduit sur la scène, la régle et l'équerre[1]) en main, vous quarrer le cercle". Le peuple d'Athènes avait probablement le même penchant que le vulgaire d'aujourd'hui, à donner à ces paroles un sens absurde, et le poète s'en prévalait pour l'exciter à rire. La note d'un scholiaste[2]) grec, qui sur cet endroit remarque savamment qu'il est impossible qu'un cercle soit quarré[3]), confirme le sens que je donne à ces paroles. Il est bien plus naturel que de penser qu'Aristophane eût en vue les fausses solutions des mauvais géomètres, et leurs erreurs déjà multipliées sur ce sujet; cela ne serait bon qu'auprès d'un peuple de mathématiciens".

Dazu macht der Herausgeber der neuen Auflage folgende Anmerkung: „Montucla se donne ici une peine inutile pour établir un sens qui est tout-à-fait explicite dans Aristophane; le personnage ne dit point *quarrer le cercle;* mais faire *un cercle quarré*. La première expression serait peut-être trop savante, mais non pas ridicule; tandis que la seconde, dont les termes sont contradictoires, motive un peu la remarque du scholiaste....".

In seiner *Géométrie grecque* macht Tannery die Bemerkung (p. 114n): „Dès le Ve siècle, la quadrature du cercle était à Athènes un problème aussi célèbre que la duplication du cube; Aristophane (*Oiseaux*) met sur la scène l'astronome Méton proposant une solution (mécanique?)".

Und Allman sagt in seinem Buche *Greek geometry from Thales to Euklid* (p. 78): „That the problem was one of public interest at that time, and that, further, owing to the false solutions of pretented geometers, an element of ridicule had become attached to it, is plain from the reference which Aristophanes makes to it in one of his comedies".

Es dürfte nun an der Zeit sein, wenn endlich auch in der mathematischen Literatur davon Notiz genommen würde, was von philologischer Seite längst ausgesprochen worden ist: nämlich daß es sich bei Aristophanes

1) Montucla hätte besser gesagt *le compas* (διαβήτης).

2) Siehe S. 15.

3) Das sagt der Scholiast eben nicht, auch ist „savamment" nicht am Platz.

gar nicht um eine Quadratur des Kreises handelt[1]), aber freilich auch nicht um einen Scherz im Sinne des Scholiasten. Liest man nämlich über die Stelle *ἵνα . . . τετράγωνος* hinaus, so erkennt man aus den Versen *κἀν μέσῳ ἀγορά . . . ἀπολάμπωσιν*, daß METON einen Städteplan entwickelt: Die kreisförmig begrenzte Stadt soll vom Mittelpunkte, dem Markte, aus, nach der Art des Hippodamos, durch gerade Straßenzüge durchschnitten werden. Von einem Quadrate ist ganz und gar nicht die Rede, vielmehr haben die mißverstandenen Worte *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος* den Sinn, daß der Kreis durch zwei aufeinander senkrechte Durchmesser in vier Quadranten zerlegt und in *diesem* Sinne also „vierwinklig" werde. Gemeint sind dabei die vier rechten Zentriwinkel. Von dieser Erkenntnis aus ergibt sich dann aber ganz ungezwungen, daß dem Dichter eine durchaus richtige geometrische Konstruktion vorgeschwebt hat: Der Kreis ist gezeichnet, ich lege also das Lineal an — *προσθεὶς οὖν ἐγὼ τὸν κανόν'* — und ziehe, etwa von links nach rechts, einen Durchmesser. Nun soll der darauf senkrechte Durchmesser konstruiert werden Dazu braucht man den Zirkel. Ich setze also von oben her den gebogenen Zirkel da ein — *ἄνωθεν τουτονὶ τὸν καμπύλον ἐνθεὶς διαβήτην* —, und zwar nacheinander in jedem der beiden Endpunkte des ersten Durchmessers, und schlage natürlich jedesmal den Bogen. Dann muß ich wieder das Lineal anlegen und richtig (*ὀρθῶς*) messen, um den Mittelpunkt mit dem Schnittpunkte der beiden Kreisbogen zu verbinden, wie sichs gehört — *ὀρθῶς*[2]) *μετρήσω κανόνι προστιθείς* —, damit der Kreis in vier Quadranten zerfalle — *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος*. Diese Konstruktion (EUKLID ed. HEIBERG I 11) war zur Zeit des ARISTOPHANES längst Gemeingut. Zum Überfluß könnte man dafür noch das Zeugnis des PROKLUS anrufen, der die Lösung ähnlicher Konstruktionen

1) Freilich sind auch bis heute noch die verschiedenen Bearbeiter und Übersetzer des ARISTOPHANES keineswegs einmütig in dieser Sache. Daß es sich nicht um eine Quadratur handelt, scheint zuerst J. G. DROYSEN (1835) erkannt zu haben. Er übersetzt *ἵνα . . . τετράγωνος* mit: „damit vier Zentriwinkel der Kreis Dir bildet", wodurch die Sache ganz richtig bezeichnet wird. Dieser Auffassung schließt sich auch TH. KOCK an Bei allen andern der von mir genannten Übersetzer oder Herausgeber kommentierter Ausgaben aber ist die Stelle als Kreisquadratur oder auch schlechtweg als absichtlicher Unsinn gedeutet: „daß der Zirkelschlag Dir werde viereckt" (J. H. VOSS), „und bild' ein Viereck aus dem Kreis" (L. SEEGER), „ita ut circulus exsistat tibi quadratus" (W. DINDORF), „daß der Kreis ein Viereck bilde" (J. MINCKWITZ), „damit ein Viereck werde aus dem Kreis" (E. SCHINCK) usw. (Siehe ferner S. 18, Anm. 2.)

2) Mir scheint, daß *μετρήσω* geradezu *ὀρθῶς* fordere (s. S 14, Anm. 1); *ὀρθῷ* gibt auch wirklich gar keinen rechten Sinn. Sehr wahrscheinlich ist aber die Lesart *ὀρθῷ κανόνι* dem *κανόν' . . . καμπύλον* zuliebe entstanden (gerades und krummes Lineal, s. S. 15).

(insbesondere EUKL. I 12) dem ÖNOPIDES[1]) zuweist. Und ÖNOPIDES war „um weniges jünger als ANAXAGORAS" (500—428). Man müßte sich schließlich auch fragen, was denn eigentlich den Inhalt der „Elemente" des HIPPOKRATES gebildet haben sollte.

Daß freilich PEITHETÄROS auf die Frage METONS erklärt, die Geschichte nicht zu verstehen, das ist in der Komödie ganz in der Ordnung. Die ganze Stelle wäre nun also etwa folgendermaßen zu übersetzen:

METON.
Ich leg' das Lineal nun an
und setz' von oben den gebognen Zirkel ein —
verstehst Du, was ich will?

PEITHETÄROS.
Nein ich verstehe nichts.

METON.
Dann leg' ich an das Lineal und messe recht,
auf daß vierwinklig werde Dir der Kreis, und in
der Mitt' der Markt, und Straßen führen geradeswegs
auf ihn als Zentrum, just so wie von einem Stern,
mit rundem Kerne, Licht in geraden Linien rings
erstrahlt nach allen Seiten.

PEITHETÄROS.
Der reinste THALESmensch!

Wir kommen nun zu der grundsätzlichen Frage (S. 14), ob es überhaupt gerechtfertigt ist, der ganzen Stelle einen Sinn beizulegen, oder ob das nicht als eine Pedanterie bezeichnet werden muß, durch die die Komik der Situation beeinträchtigt oder geradezu aufgehoben wird. Die Komik könnte ja nach dem Plane des Dichters eben darin bestehen, daß METON in scheinbar gelehrter Sprache zusammenhangslosen und schlechterdings unverständlichen Unsinn vorbringen soll.[2])

1) Diese Konstruktionen sind aber jedenfalls viel älter. Denn sie gehören zu den unentbehrlichsten Elementen der Reißkunst und müssen also schon den Ägyptern bekannt gewesen sein und daher sicherlich auch dem THALES.

2) Das ist, mehr oder weniger entschieden ausgesprochen, die Meinung von fast allen, die sich mit der Stelle beschäftigt haben. VOSS sagt: „In der folgenden Messung ist Verworrenes und Unsinniges mit Fleiß gemischt". In den Ausgaben von INVERNIZZI und BEKKER finden sich die folgenden von L. KUSTER und R. F. PH. BRUNCK herrührenden Anmerkungen: „Serione haec an joco dicis, Comicorum lepidissime? Si serio, videtur quadratura circuli, tanto labore et studio a Mathematicis nostris quaesita, sed nondum inventa, seculo tuo non fuisse ignota. Sed absit ut haec credam. Notiores enim mihi sunt facetiae tuae et sales, quam ut risus gratia haec a te dici, latere

Nehmen wir die Sache, wie sie liegt. Sicher ist jedenfalls, daß Meton einen Städteplan entwickeln und dabei die kreisförmig begrenzte Stadt durch zwei Durchmesser in vier Quartiere zerlegen will. Die Bemerkung „und in der Mitt' der Markt" sowie das Bild mit dem Stern und seinen Strahlen müßten die letzten Zweifel über die Deutung der Worte *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος* beseitigen. An und für sich also enthalten die Worte 1005—1009 des Meton nicht das Allergeringste, was man als Unsinn bezeichnen könnte. Die Worte 1001—1004 sollen nun die Ausführung der Konstruktion andeuten. Zu dieser ist nötig, daß man ein Lineal anlege, sodann den Zirkel benutze und dann wieder ein Lineal anlege und richtig messe. Nun — genau das, und in derselben Reihenfolge, sagt auch Meton, nicht mehr und nicht weniger. Man mag sich drehen und wenden, wie man will, man kann mit dem besten Willen seine Worte nicht als Unsinn deuten — solange nämlich die Interpunktion von Kock gilt.

Will man nun aber trotzdem an der Stelle lieber einen Unsinn haben, in der Meinung, daß das der Komik besser entspreche, so hat ja schon Blaydes (S. 18, Anm. 2) den Weg dazu bezeichnet: dann braucht man nur das Komma hinter *καμπύλον*, statt hinter *κανόν'*, zu setzen. Liest man dann noch *ὀρθῷ κανόνι* und übersetzt überdies *τετράγωνος* mit

mihi queat". (Kuster.) — „Mathematicos salse irridet Comicus, Metonem introducens, ridicula et absurda de arte sua effutientem: talis est circulus ille quadratus ..." (Brunck.) Seeger erklärt: „Das geometrische Geschwätz ist absichtlich Unsinn". Minckwitz urteilt: „Eine karikierte Messungsgeschichte". Blaydes fügt seinen, S. 14, Anm. 2, zitierten Worten vorsichtig hinzu: „Nisi nugari Metonem statuas, quod confirmare videatur Peisetaeri responsum *οἱ μανθάνω*". Und Leeuwen gibt zu den Worten 1002—1005 des Meton die Erklärung: „Metonis haec verba intellegere velle, id est operam dare ut suo joco frustretur comicus; qui quomodo ea vellet accipi, Pisetaeri verbulo „*οὐ μανθάνω*" aperte profecto significavit. Itaque non est aegre ferendum quod commemorantur nunc *incurvata regula* et *circulus quadratus*, sed consulto noster usus est verbis tam egregie absurdis ut ne eos quidem spectatores fallere possent qui cum ipso poeta ab arte Metonis essent alienissimi. Sic etiam hodie [s. dazu die Bemerkung von Montucla, S. 16], si indicandum est studium insanum, aut *perpetuum mobile* aliquis quaerere jocose dici solet aut *circuli quadraturam* ..."

Dagegen geht aus den Anmerkungen der Ausgabe von Kock hervor, daß dieser die Stelle ernsthaft nimmt und ihr den Sinn beilegt, der auch in unserer Übersetzung zum Ausdruck gekommen ist.

Bemerkenswert ist sodann die Haltung von Droysen der Stelle gegenüber: In der ersten Ausgabe, die noch das „gebogne Lineal" hatte, findet sich die Anmerkung: „Gewiß soll da keine ausführbare geometrische Konstruktion beschrieben sein". In der zweiten Auflage ist mit dem „gebognen Lineal" auch diese Anmerkung dahin gefallen und das „gerade Lineal" ist durch den „Quadranten" ersetzt. Droysen ist also offenbar zu der Überzeugung gekommen, daß der Stelle ein vernünftiger Sinn beigelegt werden muß.

„viereckig“, so dürfte die Sinnlosigkeit wohl nichts mehr zu wünschen übrig lassen. Freilich stellt sich dann aber doch gleich eine gewisse Unbehaglichkeit ein, wenn man gewahr wird, daß der vermeintliche Unsinn schließlich zu einem ganz bestimmten, klaren Plane führt, dessen Darlegung dem ganzen Tone nach zum Vorhergehenden gar nicht recht passen will.

Ist das nun aber wirklich eine des Aristophanes würdige Komik, wenn er den Meton auftreten läßt, damit er Worte hinrede, die keinen Sinn und Verstand und auch keinen Zusammenhang haben? Ist das überhaupt komisch? Man ziehe etwa als Vergleich den übermütigen Unsinn heran, den Sokrates in den „Wolken“ bei der Erklärung von Donner und Blitz entwickelt. Das ist ja ganz gewiß toller Unsinn, und natürlich beabsichtigter Unsinn, aber doch schließlich Unsinn, der Methode hat, der in sich begründet ist und über den man noch lachen kann. Über Meton aber, der dann mit seinem Unsinn zuletzt auch noch ganz entgleist, könnte man sich höchstens ärgern.

Aristophanes hatte es übrigens auch gar nicht nötig, bei seinem Meton zu so inferioren Mitteln zu greifen, um eine komische Wirkung zu erzielen. Der mit Instrumenten beladene Mathematiker, der ungerufen und sehr überflüssigerweise plötzlich erscheint und seine Pläne auseinandersetzt, ist an und für sich eine komische Figur, und er wirkt ganz gewiß um so komischer, je ernsthafter und wissenschaftlicher er seine Sachen vorbringt. Dazu kommt noch, daß Meton durch seine Kalenderreform (aber auch durch sein politisches Verhalten) eine stadtbekannte Persönlichkeit war, an die sich so wie so mancher Witz angeknüpft haben mag. Immerhin dürfen wir doch wohl annehmen, daß Aristophanes nicht den Meton selbst hat lächerlich machen wollen, so wenig wie in den „Wolken“ den Sokrates. In beiden Fällen galt sein Spott der Afterwissenschaft, den Auswüchsen der Gelehrsamkeit, die sich allenthalben breit machten.

Man könnte nun aber trotzdem finden, es dürfte doch vielleicht in den Worten des Meton noch irgend ein Scherz versteckt sein. Damit komme ich zu dem Ausgangspunkte meiner Arbeit und zu dem eigentlichen Thema zurück.

Wenn die Worte des Meton, insbesondere *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος*, sich nicht auf eine Kreisquadratur beziehen, so würde unsere Untersuchung damit zu dem Ergebnis führen, daß der Name Aristophanes aus der Geschichte der Kreismessung zu streichen sei. Es scheint mir aber, daß ein Umstand dabei bisher nicht beachtet worden ist: Um zu sagen, daß der Kreis in vier Quadranten zerlegt, also gevierteilt werden solle, bedient sich Aristophanes des Ausdrucks *„ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος“* — „auf daß vierwinklig (wörtlich!) werde Dir der Kreis“.

Das ist eine ganz ungewöhnliche und im höchsten Grade auffallende Ausdrucksweise. Es ist kein Wunder, daß sie irre geführt hat. Hätte ARISTOPHANES den Kreis nur schlechtweg vierteilen wollen, so hätte er *τετραχίζειν* sagen können oder er hätte nach Analogie von *τριχοτομεῖν* ein neues Wort gebildet. *τετράγωνον γενέσθαι* ist aber dafür, zunächst wenigstens, gar kein passender Ausdruck. Das Wort *τετράγωνος* hatte zur Zeit des ARISTOPHANES bereits seine fertige Bedeutung „viereckig", insbesondere „quadratisch". Machen, daß eine Figur *τετράγωνος* (oder besser ein *τετράγωνον*) werde, war ein fertiger, technischer Ausdruck, der eben „quadrieren" d. h. „ein inhaltsgleiches Quadrat herstellen" bedeutete. Auch existierten schon die dazu gehörigen termini *τετραγωνισμός* und *τετραγωνίζειν*. Das alles dürfen wir mit Sicherheit aus dem Referate des EUDEMUS über die Quadraturen des HIPPOKRATES schließen. Wenn also der sprachgewandte ARISTOPHANES, der Meister im Wortspiel, für seine Zwecke die Ausdrucksweise *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος* gebrauchte, so konnte das nur in einer bestimmten Absicht geschehen, denn er mußte sich der Zweideutigkeit bewußt sein. Diese Absicht liegt nun aber jetzt klar zutage: er wollte eben einen Scherz machen, ein Wortpiel. Ganz wörtlich heißt ja *τετραγωνίζειν* „vierwinklig (*γωνία*) machen". ARISTOPHANES kannte vom Hörensagen das Problem von der Quadratur des Kreises. Er wußte, daß es den Mathematikern nicht gelingen wollte, den Kreis „vierwinklig" zu machen, und er löste nun die schwere Aufgabe auf seine Art, indem er durch zwei Durchmesser die vergeblich gesuchten vier Winkel um den Mittelpunkt versammelte. Der Scherz ist nicht schlecht und des ARISTOPHANES nicht unwürdig. Und es hat auch nichts unwahrscheinliches an sich, daß ARISTOPHANES diesen Scherz, der sich ihm gelegentlich aufgedrängt haben mag, auf die Bühne brachte. Des Lacherfolges durfte er zum voraus sicher sein: Bei den Kundigen selbstverständlich, und bei den Unkundigen erst recht. Denn die konnten über den verrückten Mathematiker lachen, der darauf ausging, den Kreis viereckig zu machen, und von dem sie auch schon gehört hatten, daß er die ganze Zeitrechnung in Unordnung gebracht habe[1]). —

Für die Geschichte der Mathematik dürfte sich nun aus unserer Untersuchung das folgende Resultat ergeben:

ARISTOPHANES bringt in den „Vögeln" nicht die Kreisquadratur auf die Bühne, sondern die Zerlegung des Kreises in vier Quadranten durch Konstruktion von zwei aufeinander senkrechten Durchmessern[2]).

1) Darüber scherzt ja auch ARISTOPHANES in den Wolken 607—626.

2) Daß diese Konstruktion zur Zeit des ARISTOPHANES (mehr als ein Jahrhundert

ARISTOPHANES bedient sich dabei einer Ausdrucksweise, die eine wohlbeabsichtigte und scherzhafte Anspielung auf das Problem von der Kreisquadratur enthält. Die Stelle ist daher, wenn auch in anderem Sinne, als man bisher glaubte, in der Tat ein Beleg dafür, daß das Problem von der Quadratur des Kreises gegen das Ende des fünften Jahrhunderts bereits eine große Popularität erreicht hatte.

---

vor EUKLID) bekannt war, wissen wir zwar längst aus andern Quellen (z. B. PROKLUS). Da aber die Berichte über die Entwickelung der Geometrie vor EUKLID nur sehr spärlich sind, so ist auch dieser Beleg aus ARISTOPHANES willkommen.

Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Das Ms. Gol. 14 der Universitätsbibliothek in Leiden[1]) enthält Abschriften von ältern Manuskripten, die der berühmte Orientalist Jac. Golius durch einen Derwisch Aḥmed in Aleppo und einen in Amsterdam wohnenden christlichen Araber in den Jahren 1627 u. ff. für seinen Gebrauch ausführen ließ. Die 29 Abhandlungen sind zum größten Teile mathematischen Inhaltes; unter denselben befinden sich zwei sehr wichtige: Nr. 1, die Übersetzung des 5.—7. Buches der Kegelschnitte des Apollonius durch Ṯâbit b. Qurra (p. 1—163) und Nr. 2, die Algebra des 'Omar b. Ibrâhîm el-Chaijâmî (p. 175—218). Auch die Abhandlung Nr. 15 (p. 300—314) von el-Bîrûnî[2]): „fi tasṭîḥ el-ṣuwar we tabṭîḥ el-kuwar" (über die Ausbreitung [Projektion] der Sternbilder und Länder, d. h. über Himmels- und Erdkarten) mag von größerem Interesse sein, leider fehlen im Texte die Figuren; ich werde vielleicht später über dieselbe einige Notizen veröffentlichen. Überhaupt sind die für Golius gemachten Abschriften nicht frei von Lücken, Wiederholungen, falscher Schreibweise von Wörtern, schlechten Figuren, aber im ganzen recht deutlich geschrieben, so daß das Lesen gar keine Mühe macht. Im folgenden gebe ich den Inhalt einiger kleineren, in verschiedener Richtung interessanten, geometrischen Abhandlungen teils in wörtlicher, teils in gekürzter Übersetzung wieder.

---

1) Auch für Überlassung dieses Mss. für längere Zeit spreche ich der Verwaltung der Universitätsbibliothek in Leiden meinen verbindlichsten Dank aus.

2) Diese Abhandlung ist anonym; nach dem Verzeichnis der Schriften el-Bîrûnis (vergl. *Chronologie oriental. Völker von Albêrûnî, herausgeg. von E. Sachau*, Leipzig 1878, p. XLIII, und H. Suter, *Nachträge und Berichtigungen* etc., in Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissenschaften, 14, 1902, p. 171) und der Widmung der Abhandlung an den Malik el-'Âdil Chwârezmschâh ist aber kein Zweifel möglich, daß sie von el-Bîrûnî stamme; der Katalog von Leiden enthält hierüber keine Angabe.

I. Verdeutlichung des Beweises zur Rechnung der beiden Fehler, in der Verbesserung des Abû Sa'îd Ğâbir b. Ibrâhîm el-Ṣâbî.[1])

Diese Abhandlung mit dem Kommentar von AḤMED B. EL-SURRÎ[2]) bildet die Nummern 3 und 4 des Ms. Gol. 14 (p. 218—223); Nr. 4 enthält nämlich nicht nur, wie der Verfasser des Kataloges annimmt[3]), den Kommentar, sondern die Fortsetzung des Textes mit Glossen untermischt, so daß also unsere Abhandlung erst p. 223 schließt. Nach dem Titel zu schließen, müssen vor ĞÂBIR B. IBRÂHÎM schon ein oder mehrere Beweise zur Regel der beiden Fehler vorhanden gewesen sein, die aber den Sabier nicht befriedigt haben; in der Tat hatte schon QOSṬÂ B. LÛQÂ eine Abhandlung hierüber unter dem Titel „über den Beweis zur Regel der beiden Fehler" verfaßt.[4]) Diese Abhandlung ist in der Bibliothek des India Office (Nr. 1043,12⁰) noch vorhanden, war mir aber leider nicht zugänglich. Der Verfasser des Katalogs, O. LOTH, bemerkt hierzu (p. 299): „A revised edition of this treatise by JÂBIR B. IBRÂHÎM ṢÂBÎ seems to be contained in Cat. Lugd. III. 59". Ob aber unsere Abhandlung sich an diejenige QOSṬÂS anlehne, ergibt sich keineswegs aus derselben, der letztere Name wird darin nicht erwähnt, überhaupt ist gar kein Vorgänger genannt.

Da der Beweis selbst etwas verfehlt ist, so wäre es eine unnütze Mühe, eine vollständige wörtliche Übersetzung desselben geben zu wollen; ich kürze also wesentlich ab und bediene mich so oft als möglich unserer heutigen Darstellungsweise.

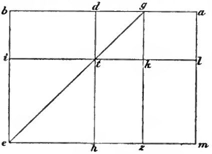


Fig. 1.

ĞÂBIR EL-ṢÂBÎ geht von dem richtigen Satze aus, daß, wenn eine Strecke ab in drei beliebige Teile ag, gd, db geteilt ist, dann die Gleichung besteht:

$$ab \,.\, gd + ag \,.\, bd = ad \,.\, bg.$$

1 Vergl. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* etc., in den Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissenschaften 10, 1900, p. 69. Der arabische Titel heißt: "îdâḥ el-burhân 'alâ ḥisâb el-chaṭâ'ain".

2) Vergl. l. c. p. 120; EL-SURRÎ muß es wohl heißen (nicht "el-Surâ" und nicht "el-Serî") nach dem Buche SOJÛṬIS, *De nominibus relativis*, herausgeg. von P. J. VETH, Leiden 1840, p. 136. b. (= ben) fehlt wohl irrtümlich im Ms.

3) *Catal. cod. orient. bibl. acad. Lugd. Batav.* Vol. III, p. 59.

4) Vergl. SUTER, *Die Mathem. u. Astronom.* p. 41.

Ob dieser Satz griechisches oder arabisches Eigentum sei, können wir nicht entscheiden, bei EUKLID findet er sich unseres Wissens nicht. EL-ṢÂBÎ gibt folgenden Beweis davon: Man beschreibe [Fig. 1] über bg das Quadrat bz, ziehe seine Diagonale eg, mache $bi = dg$, ziehe $il \parallel ab$, und durch den Punkt t $dh \parallel be$, nnd vervollständige das Rechteck $abem$, so ist, da dk ein Qnadrat, auch ih ein solches; es ist nun bekanntlich:

$$\begin{aligned} \text{Rechteck } bk &= \text{Rechteck } gh \\ \text{„} \quad az &= \text{„} \quad az \\ \hline \text{Addiert: Gnomon } bamzki &= \text{Rechteck } ah \\ \text{oder: } ab \,.\, bi + mz \,.\, kz &= ad \,.\, dh \\ \text{oder: } ab \,.\, gd + ag \,.\, bd &= ad \,.\, bg \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Nun setzt ǦÂBIR ag gleich der ersten Annahme α_1 der regula falsi, und gd gleich dem ersten Fehler $f(\alpha_1)$, ferner $ab = \alpha_2$ nnd $bd = f(\alpha_2)$, dann erhält er aus obiger Gleichung für die nnbekannte Größe ad den Ansdruck:

$$ad = x = \frac{\alpha_1 f(\alpha_2) + \alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_1) + f(\alpha_2)}$$

der richtig ist in dem Falle, wo die Fehler $f(\alpha_1)$ nnd $f(\alpha_2)$ verschiedene Vorzeichen haben, hier aber absolut genommen werden.

ǦÂBIR scheint aber nicht erkannt zn haben, daß dieser Beweis nur für einen ganz speziellen Fall zutrifft, nämlich für den Fall, wo $f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$ genau gleich $bg = \alpha_2 - \alpha_1$ ist. Das hat auch der Glossator AḤMED B. EL-SURRÎ eingesehen, indem er bemerkt, daß es hier znr Berechnung der Unbekannten ja gar keiner Multiplikation und Division bedürfe, denn x wäre ja einfach $= ag + dg = \alpha_1 + f(\alpha_1)$, oder $= ab - bd = \alpha_2 - f(\alpha_2)$. Ein anderer Fehler, den der Glossator dem Verfasser vorwirft, ist aber unbegründet, er scheint übersehen zu haben, daß ǦÂBIR EL-ṢÂBÎ bei der Anwendnng seines geometrischen Satzes auf die Regel der beiden Fehler andere Buchstaben annimmt als in der Beweisfigur, und scheint auch den Sinn einiger allerdings undeutlicher Stellen nicht richtig aufgefaßt zu haben; wir wenigstens haben keinen andern Fehler als den eben besprochenen gefunden, auch nicht in der Fortsetzung der Abhandlung, wo der Verfasser die Beweise für die Fälle gibt, wo die Fehler $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_2)$ beide gleiches Zeichen haben, also α_1 und α_2 entweder beide größer oder beide kleiner als ad sind; auf diese Beweise treten wir hier aber nicht mehr ein, sie sind leicht aus dem ersten abzuleiten.

Ein bedeutender mathematischer Kopf kann ǦÂBIR allerdings nicht gewesen sein, sonst hätte er seinen Fehler erkannt und sich leicht zu helfen gewußt, er hätte seinen Beweis in folgender Weise verallgemeinern können:

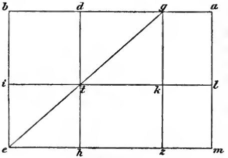


Fig. 2.

Es sei [Fig. 2] $ag = kl$ wieder $= \alpha_1$ und $gk = bi = f(\alpha_1)$ ferner wieder $ab = li = \alpha_2$ und $ie = kz = f(\alpha_2)$, dann ist wieder, ohne daß bz, dk und ih Quadrate zu sein brauchen:

Gnomon $bamzki$ = Rechteck ah

oder: $ab \cdot bi + kl \cdot kz = ad \cdot dh$,

$$\text{oder: } \alpha_2 f(\alpha_1) + \alpha_1 f(\alpha_2) = ad\,[f(\alpha_1) + f(\alpha_2)]$$

also:

$$ad = x = \frac{\alpha_2 f(\alpha_1) + \alpha_1 f(\alpha_2)}{f(\alpha_1) + f(\alpha_2)} \text{ [1]}$$

Dies hat auch der Glossator Aḥmed b. el-Surrî nicht erkannt. Es bliebe uns immerhin noch ein Weg übrig, die Ehre Ğâbirs zu retten, wenn wir nämlich annehmen wollten, er habe wohl gewußt, daß die Strecken $bd = \alpha_2 - x$ und $gd = x - \alpha_1$ nicht die Fehler $f(\alpha_2)$ und $f(\alpha_1)$ selbst, sondern nur ihnen proportionale Größen seien, und daß man unbeschadet der Richtigkeit des Resultates auch diese dafür setzen könne, sagt er doch nie: „so ist gd der erste Fehler", sondern nur: „so nennen wir gd den ersten Fehler"; aber in diesem Falle hätte er seiner Abhandlung den Satz beifügen müssen, daß die Fehler der Resultate den Differenzen $x - \alpha_1$ und $\alpha_2 - x$ proportional sind.

Wir ersehen aus dieser Darstellung, daß bei den arabischen Mathematikern Versuche gemacht worden sind, die Regel der beiden Fehler auf geometrischem Wege zu beweisen; vielleicht ist auch der richtige Beweis später noch gefunden worden, wir wissen es nicht. Aber wir verstehen nun die Bemerkung Ibn el-Bennâs in seinem *Talchîṣ*, daß die Methode der Wagschalen auf Geometrie beruhe; den Beweis gab er aber nicht, und wollte auch mit seiner Figur keineswegs etwa an denselben erinnern, wie vermutet worden ist.[2] In diesem Sinne sind also die Erörterungen M. Cantors[3] über diese Frage zu berichtigen.

Man entschuldige uns, wenn wir hier folgende Bemerkung nicht unterlassen können. In der Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, p. 419 führt G. Eneström eine Stelle aus einem Briefe G. Wertheims v. J. 1900 an, die lautet: „überhaupt ist die Erfindung des doppelten falschen Ansatzes

1) Dieses Resultat ergibt sich bekanntlich einfacher aus der Ähnlichkeit der Dreiecke gtk und eit.

2) Vergl. Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra* etc., 2. Ausg. Leipzig, 1896, p. 924—926.

3) *Vorlesungen über Geschichte der Mathem.* I², p. 760 f.

nach meiner Ansicht erst im 12. Jahrh. erfolgt". Diese Ansicht wird nun wohl durch die obige Abhandlung endgültig widerlegt sein; sie hätte aber auch nie aufgestellt werden sollen, wenn man erstens den Titel der jedenfalls im 12. Jahrh. ins Lateinische übersetzten Abhandlung „Liber augmenti et diminutionis, etc." und ihren Inhalt genauer studiert hätte, und zweitens berücksichtigt hätte, daß in dem vor 990 geschriebenen *Fihrist* an drei Stellen Abhandlungen „über die beiden Fehler" genannt werden (vergl. Suter, *Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist* etc., in den Abhandlungen zur Gesch. d. Mathem. **6**, 1892, p. 37).

II. Eine Aufgabe der Höhenmessung von Abû 'Alî b. el-Haitam.

Diese Aufgabe befindet sich in Nr. 8 unseres Codex (p. 236—237); sie stammt von dem bedeutenden ägyptischen Mathematiker Ibn el-Haitam (Alhazen)[1]), und findet sich in der Tat auch im Verzeichnis seiner Schriften erwähnt. Da sie von nicht gewöhnlichem Interesse ist, gebe ich hier ihre wörtliche Übersetzung.

„Abhandlung des Schaich Abû 'Alî b. el-Haitam über die Kenntnis der Höhe der aufrechtstehenden Gegenstände, der Berge und der Wolken. Wir setzen voraus [Fig. 3], daß *ab* die Höhe eines Berges oder andern Gegenstandes sei, die wir kennen wollen. Wir stellen in einem Punkte des Erdbodens einen Gegenstand (Stab) senkrecht auf, es sei dieser *de*, dann gehe der Beobachter von demselben aus vorwärts und wieder rückwärts, bis er die Spitze des Berges und die Spitze des Stabes als *einen* Punkt[2]) sieht; der Ort des Auges sei *g*, der Sehstrahl sei *gea*, und es werde *bdg* als gerade Linie auf der Oberfläche der Erde vorausgesetzt, so ist $gb : ab = gd : de$[3]); hierauf stelle man den Stab *de* an einem dem Berge näher gelegenen Orte *h* auf, es sei also der Stab (in neuer Stellung) *hz*, und der Beobachter gehe wieder vorwärts und rückwärts, bis er die Spitze des Berges und

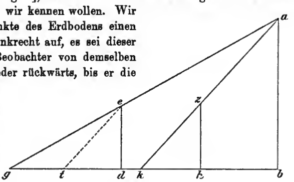


Fig. 3.

1) Suter, *Die Mathem. und Astron. d. Araber* etc. in den Abhandlungen zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **10**, 1900, p. 91—95.

2) Wörtlich „zusammen".

3) Die Proportionen gebe ich auch in der wörtlichen Übersetzung in heutiger Form.

des Stabes als *einen* Punkt sieht, der Ort des Auges sei in diesem Falle k, und der Sehstrahl sei kza, dann ist $ab : bk = zh : hk$, und weil die Linie bk kleiner als bg ist, ist auch hk kleiner als gd, also schneiden wir von gd ein Stück gleich hk ab, es sei dies dt, dann ist $dt : de = hk : hz$, aber es ist auch $gb : ab = gd : de$, und ebenso $ab : bk = de : dt$, da $de = zh$ und $dt = kh$ ist; also ist auch $gd : dt = gb : bk$, mithin auch durch Trennung (Zerlegung)[1] $gt : dt = gk : bk$; aber es ist $dt : de = bk : ab$, also auch $gt : de = gk : ab$, folglich $gk \cdot de = gt \cdot ab$; wird nun also das bekannte gk mit dem bekannten de multipliziert und das Produkt durch das (bekannte) gt dividiert[2], so ergibt sich das (gesuchte) ab, w. z. b. w. Beendigt ist die Abhandlung, Lob sei Gott etc.".

Am Schlusse der Abhandlung steht noch, von wem hinzugefügt wissen wir nicht: „Es sagt der gelehrte, vortreffliche SA'D EDDÎN AS'AD B. SA'ÎD EL-HAMADÂNÎ[3]): Man multipliziere die Entfernung der beiden Standorte mit dem Maßstab und teile das Produkt durch den Unterschied der beiden Schatten (Cotangenten) an den beiden Standorten (d. h. $gd-kh$), so erhält man die gesuchte Höhe des Gegenstandes".

Vergleicht man diese Lösung mit der heutigen trigonometrischen

$$ab = \frac{gk \,.\, \sin akb \,.\, \sin agb}{\sin gak}$$

so sieht man, daß jene wesentlich einfacher ist; die heutige erfordert (ohne Logarithmen) zwei Multiplikationen und eine Division, diejenige der Araber nur eine Multiplikation und eine Division; berücksichtigt man noch, daß die trigonometrischen Funktionen bei den Arabern in Sexagesimalbrüchen ausgedrückt wurden, so wird die Vereinfachung noch bedeutender; auf Genauigkeit aber kann das arabische Verfahren natürlich keinen Anspruch machen. Daß IBN EL-HAITAM nicht einen kürzern Beweis für seine Lösung gefunden hat, ist auffallend und uns nicht recht erklärbar, hat er sich doch in seinen bis jetzt bekannten Schriften als einen tüchtigen Geometer erwiesen; der einfachste Beweis ist jedenfalls folgender:

Dreieck get[4]) $\sim$ Dreieck gak, ebenso Dreieck $edt \sim$ Dreieck abk, also: $gt : gk = te : ka = de : ab$ und hieraus:

1) el-tafṣîl (= Trennung, Zerlegung) nennen die arab. Mathematiker die Herleitung der Proportion $a - b : b = c - d : d$ aus $a : b = c : d$.

2) Hier ist vergessen hinzuzufügen, wieso gt bekannt sei, es ist gleich $gd - kh$.

3) Dieser Gelehrte ist wahrscheinlich ein Zeitgenosse von AHMED B. EL-SURRÎ, denn dieser erwähnt einen Ausspruch des ersteren über die Regel der beiden Fehler in seinen Glossen zur Abhandlung des ĠÂBIR B. IBRÂHÎM EL-ṢÂBÎ und fügt zu seinem Namen hinzu: adâma allâhu 'uluwwahu = Gott erhalte seine Größe!

4) Die Linie et ist allerdings in der Figur des Mss. nicht gezogen.

$$ab = \frac{gk \cdot de}{gt}$$

Die trigonometrische Formel läßt sich übrigens leicht in diejenige der Araber überführen, es ist:

$$ab = \frac{gk \cdot \sin akb \cdot \sin agb}{\sin gak} = \frac{gk}{\cot agb - \cot akb}$$

$$= \frac{gk}{\frac{gd}{de} - \frac{kh}{de}} = \frac{gk \cdot de}{gd - kh} = \frac{gk \cdot de}{gt}. \text{ [1]}$$

Nach einer mündlichen Mitteilung des indischen Gelehrten Zia Uddîn Aḥmed, von dem nächstens eine Arbeit über den Mes'ûdischen Kanon des Bîrûnî erscheinen wird, kannte dieser arabische Mathematiker auch die trigonometrische Lösung unserer Aufgabe. Die Lösung Ibn el-Haiṯams befindet sich nun auch in andern mathematischen Schriften, und zwar habe ich sie bis jetzt an vier Orten gefunden: erstens bei den Indern Brahmagupta und Bhâskara (s. Colebrooke, p. 318); zweitens in der sog. Geometrie Gerberts, und zwar an zwei verschiedenen Stellen: Kap. 27—28 und 35 der Ausgabe von Olleris, Kap. XIV und XX der Curtzeschen Ausgabe in den Abhandlungen zur Gesch. der Mathem. 7, 1895 (p. 90 und 93), hier ist sie etwas, aber nicht wesentlich, anders gelöst; drittens in der von Curtze herausgegebenen[2] *Practica geometriae* eines Anonymus (Hugo Physicus?) aus dem 12. Jahrhundert, hier ist nur das Verfahren beschrieben, aber keine Lösung angegeben; viertens in der ebenfalls von Curtze veröffentlichten[3] *Practica geometriae* des Leonardo Mainardi (oder vielmehr de'Antonii) da Cremona, mit einem aus der lateinischen Ausgabe hinübergenommenen fehlerhaften Beweis. Welche Schlüsse soll man hieraus ziehen? Bei Heron[4] und den römischen Agrimensoren findet sich diese Lösung nicht, dagegen bei dem Inder Brahmagupta (c. 600 n. Chr.); es ist also ziemlich wahrscheinlich, daß sie dieser aus verloren gegangenen griechischen Schriften über praktische Geometrie, die nach Heron aus Alexandrien nach Indien gedrungen sein möchten, entlehnt hätte; von den Indern kam sie zu den Arabern (wir glauben nicht, daß diese sie direkt aus den griechischen Quellen entnommen haben), und von diesen nach dem christlichen Abendlande, und zwar schon ziemlich früh, jedenfalls vor der großen Übersetzertätigkeit des 12. Jahrh. Dies ist unsere Ansicht; wir wollen damit keineswegs diejenige Cantors als unmöglich hinstellen, daß

1) Man vergleiche hiermit den oben gegebenen Zusatz des Sa'd ed-dîn As'ad.

2) Monatshefte f. Mathem. 8, 1897, p. 20.

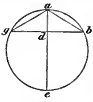
3) Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 13, 1902, p. 360—361.

4) Heron bestimmt die Höhe eines Gegenstandes mit der Dioptra auf andere Weise, s. Ausgabe v. Schöne, *Heronis opera* III, p. 228—231.

nämlich Gerbert diese und andere Aufgaben, über praktische Geometrie seiner Zeit im Kloster Bobbio aus jetzt nicht mehr vorhandenen Schriften griechisch-römischer Feldmesser geschöpft haben könnte. Daß die genannte Aufgabe aber auch indischen Ursprungs sein könnte, ist keineswegs ausgeschlossen, wenn auch nicht zu verkennen ist, daß sie dem Charakter der älteren indischen Geometrie etwas ferne steht.

III. Drei Aufgaben von Aḥmed b. el-Surrî.

Der Katalog der Leidener Bibliothek (Vol. III p. 59) verzeichnet unter Nr. 10 des Ms. Gol. 14 nur zwei Abhandlungen von Abû'l-Futûḥ b. el-Surrî[1]), nämlich: 1. in einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten zusammen gleich dem Durchmesser des Kreises seien, 2. über die genaue Ausmessung der Kugel; der Verfasser des Kataloges hat übersehen, daß noch eine weitere Abhandlung den beiden genannten sich anschließt, nämlich: 3. in ein gleichseitiges Dreieck ein ebensolches zu zeichnen, das zum ersteren in einem gegebenen Verhältnis stehe. Von diesen drei Aufgaben, die die Seiten 241—245 unseres Kodex einnehmen, verdient die zweite kaum eine Besprechung, sie ist auch anonym, und es ist daher zweifelhaft, ob sie von demselben Autor stamme, wie die erste und dritte. Die Darstellung ist am Schlusse mangelhaft, aber man erkennt, daß Oberfläche und Inhalt nach den Formeln $4r^2\pi$ und $\frac{4r^3\pi}{3}$ berechnet werden,


Fig. 4.

und daß das wesentliche hierbei die Bestimmung des Kugeldurchmessers sei, dessen direkte Messung den Arabern, wie es scheint, Schwierigkeiten machte. Derselbe wird dadurch gefunden, daß man [Fig. 4] von einem Punkte a auf der Kugel aus mit einer Zirkelöffnung ab einen beliebigen Kreis zieht, dessen Durchmesser gb mißt, aus dem hierdurch bestimmten Dreieck abg ad erhält, hierauf $de = \frac{gd^2}{ad}$ berechnet, und dann durch Addition von ad und de $2r$ bekommt.

Die erste und dritte Aufgabe gehören zum Übungsmaterial unserer heutigen Mittelschulen und bieten auch kein besonderes Interesse dar. Ich gebe im folgenden eine kurze Darstellung ihrer Lösungen.

1. Figur und Text der Lösung sind mangelhaft, besonders erstere ist

1) Es ist derselbe Mathematiker, der auch den Kommentar zu der Abhandlung des Ǵâbir b. Ibrâhîm über die Regel der beiden Fehler verfaßt hat; vergl. Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. 10, 1900, p. 120, No. 287.

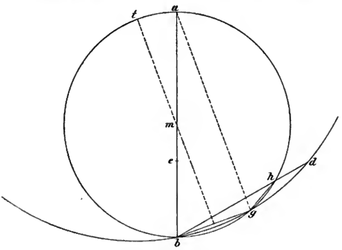


Fig. 5.

ganz verfehlt. Der Durchmesser des gegebenen Kreises [Fig. 5] sei ab, der Mittelpunkt m; man nehme einen beliebigen Teil be des Durchmessers und mache die Sehne bg gleich demselben, zeichne über bg einen Kreisbogen, der als Peripheriewinkel die Hälfte des Winkels bag fasse (sein Mittelpunkt ist t), zeichne in diesen Kreis von b aus die Sehne $bd = ae$, dieselbe schneide den gegebenen Kreis in h, so ist bhg das verlangte Dreieck; denn $bg = be$, und weil Winkel $bhg = 2$. Winkel bdg, ist $hd = hg$, also $bh + hg = bd = ae$, mithin $bg + bh + hg = ab$, w. z. b. w.

3. Einleitend bemerkt Aḥmed b. el-Surrî, er sei auf das nähere Studium dieser Aufgabe geführt worden durch die Behauptung eines Handwerkers (oder Künstlers, Konstrukteurs), daß die Seite desjenigen eingezeichneten Dreiecks, das gleich der Hälfte des größeren ist, die Seite dieses letzteren im Verhältnis 1 : 5 teile; er wolle nun zeigen, daß dies unrichtig sei, werde aber zuerst die Aufgabe für einen Fall lösen, der innerhalb der Grenzen ihrer Möglichkeit liege, denn das kleinste Dreieck, das man in ein gegebenes gleichseitiges zeichnen könne, habe zu diesem das Verhältnis 1 : 4. Er stellt nun zuerst folgende zwei Hilfsätze auf: 1. Zeichnet man in ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis und ebenso um dasselbe einen solchen, so stehen die beiden Kreisflächen zueinander im Verhältnis 1 : 4. 2. Man soll zu einem gegebenen Kreis einen zweiten finden, so daß beide zueinander in gegebenem Verhältnis stehen. Der Beweis zu 1. ist sehr einfach mit Benutzung des Satzes, daß zwei Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Die Aufgabe 2

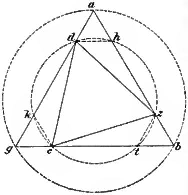


Fig. 6.

wird so gelöst: Das gegebene Verhältnis sei $e:d$, der Durchmesser des gegebenen Kreises ab; man zeichnet eine Strecke z, nach der Proportion $e:d = ab:z$; dann konstruiert man die mittlere Proportionale zwischen ab und z, sie sei ht, so ist dies der Durchmesser des gesuchten Kreises, wie leicht zu beweisen ist. Dann löst er die Aufgabe, in ein gleichseitiges Dreieck ein anderes solches zu zeichnen, das halb so groß wie das gegebene ist, auf folgende Weise: Man zeichne [Fig. 6] zu dem gegebenen Dreieck den umbeschriebenen Kreis, konstruiere um denselben Mittelpunkt nach der vorigen Aufgabe einen zweiten Kreis, dessen Fläche zu der des ersteren das Verhältnis 1 : 2 habe, wo dieser Kreis die Seiten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks schneidet, sind die Ecken des gesuchten Dreiecks. Der Beweis gründet sich auf XII, 1 Eukl., daß in Kreise eingeschriebene ähnliche Polygone sich verhalten wie die Quadrate der Durchmesser. Nun kommt er zum Beweise, daß $ah:ab$ nicht gleich $1:5$ sei, wie behauptet worden sei; da derselbe ohne algebraische Hilfsmittel geführt wird, ist er von Interesse und ich gebe denselben daher in gekürzter Form wieder: Man zieht die Sehnen dh, zt und ek; nun nehmen wir zuerst an, es sei $ah = \frac{1}{4} ab$; dann hat man, weil die kleinen Dreiecke adh, bzt und gke dem Ganzen ähnlich sind, die Proportion: $adh : abg = ah^2 : ab^2$, aber $ah = \frac{1}{4} ab$, also $\triangle adh = \frac{1}{16} \triangle abg$; so verhält es sich auch mit den übrigen kleinen Dreiecken, also

$$\triangle adh + \triangle bzt + \triangle gke = \tfrac{3}{16} \triangle abg$$

nun ist nach unserer Voraussetzung $hz = \frac{1}{2} ab = 2\, ah$, also $\triangle dhz : \triangle adh = 2:1$, mithin $\triangle dhz = \frac{2}{16} \triangle abg$, ebenso verhält es sich mit den Dreiecken etz und dke, also:

$$\triangle dhz + \triangle etz + \triangle dke = \tfrac{6}{16} \triangle abg$$

folglich alle sechs kleinen Dreiecke zusammen $= \frac{9}{16} \triangle abg$, also wäre $\triangle dez = \frac{7}{16} \triangle abg$, dies ist aber ein Widerspruch, da ja $\triangle dez = \frac{1}{2} \triangle abg$ ist; also kann ah nicht gleich $\frac{1}{4} ab$ sein. Ganz auf die gleiche Weise wird gezeigt, daß ah nicht gleich $\frac{1}{5} ab$ sein kann; es muß nun kleiner als $\frac{1}{4}$ und größer als $\frac{1}{5}$ von ab sein, die beiden Strecken ah und ab sind also inkommensurabel, weil zwischen 4 und 5 keine ganze Zahl liegt, sie verhalten sich also nicht wie eine (ganze) Zahl zu einer (ganzen) Zahl, w. z. b. w.

Aḥmed b. el-Surrî konnte also das richtige Verhältnis von ah zu ab $\left(= \frac{3-\sqrt{3}}{6} : 1\right)$ nicht finden; auch irrt er sich, wenn er meint, das Verhältnis sei irrational, weil zwischen 4 und 5 keine ganze Zahl liege; nach seinem Beweise könnte es z. B. ganz wohl $= \frac{7}{30}$ sein, denn diese Zahl liegt zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$. Es scheinen also diesem Mathematiker die Hilfsmittel nicht mehr zu Gebote gestanden zu haben, die der ca. 250 Jahre früher lebende ägyptische Gelehrte Šoǵâ' b. Aslam besessen hat, wie man aus seiner Schrift „Über das Fünfeck und das Zehneck"[1]) schließen kann; um so merkwürdiger ist, daß nach ihm noch ein Mann als Gelehrter mathematischer Richtung auftreten konnte, der seine Wissenschaft so sehr beherrscht hat wie Naṣîr ed-dîn el-Ṭûsî.

IV. Eine arabische Aufgabe über Flächenteilung von El-Moẓaffar b. Muḥ. b. el-Moẓaffar el-Ṭûsî.[2])

Diese Aufgabe bildet Nr. 17 des Ms. Gol. 14 und umfaßt darin die Seiten 322—327 (oben). Wegen der dabei angewandten sonderbaren Lösungsart muß ich dieselbe ziemlich ausführlich wiedergeben, allerdings mit Hinzuziehung neuerer Bezeichnungsweisen.

Die Figur ist mangelhaft ausgeführt, der Text weist Fehler in den Buchstaben und Zahlen auf, so daß die Richtigstellung nicht geringe Mühe bereitet hat. Nach der Anrufung Gottes etc. folgt:

„Es ist dies eine Aufgabe, deren Lösung Šems ed-dîn, der Emîr der Niẓâmîschen (?) Emîre von dem berühmten, einzigen, gelehrten Imâm Šaraf ed-dîn el-Moẓaffar b. Muḥ. b. el-Moẓaffar el-Ṭûsî verlangt hat, in der Stadt Hamadân im Jahre 606 d. H. (1209/10), nämlich ein gegebenes Quadrat in vier Teile zu teilen, so daß der in der Mitte ein Rechteck und die drei es begrenzenden Trapeze seien, und die vier Flächen zueinander in gegebenem Verhältnis stehen.

„Die Quadratseite [Fig. 7] sei 10 und die vier Figuren $gtxy$, $abxt$, $atgc$ und $cdyg$ sollen sich verhalten wie $1:2:3:5$. Man verlängert ab, nimmt auf der Verlängerung einen beliebigen Punkt e an, macht $e\mu = 9be$, verbindet μ mit d und zieht durch e die Parallele ew zu ud (dann ist also $bw = 1$)[3]), nun mache man $b\eta = 55$ (beliebige) Teile und $\eta\vartheta = 45$[4])

1) Festschrift zum achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneiders, Leipzig, 1896, p. 169—194.

2) Vergl. H. Suter, *Die Mathem. und Astron. d. Araber*, etc. in Abhandl. z. Gesch. der mathem. Wissensch. 10, 1900, p. 134.

3) Das Eingeklammerte hier und im folgenden steht nicht im Text.

4) Im Text steht beide mal 54.

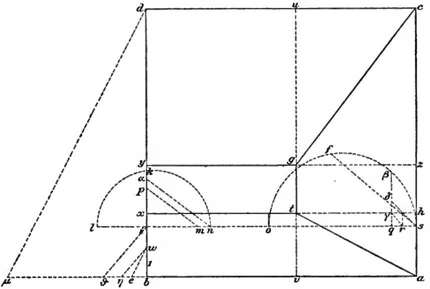


Fig. 7.

solcher, verbinde η mit w und ziehe durch ϑ die Parallele ϑi zu ηw (so ist also $wi = {}^9/_{11}\ bw$, mithin $bi = 1\,{}^9/_{11}$). Dann ziehe man durch i die Parallele is zu ab, verlängere sie über i hinaus und mache $il = 1\,{}^3/_4$ und $im = 2$; dann mache man $ip = 3025$[1]) (beliebige) Teile und $p\alpha = 725$[2]) solcher, ziehe pm und durch α die Parallele αn dazu (so verhält sich $im : in = 3025 : 3750$, also ist $in = 2\frac{1450}{3025}$). Hierauf beschreibe man über nl einen Halbkreis (der bd im Punkte k schneidet, so ist $ik^2 = il \cdot in = 4\frac{1025}{3025}$), mache $os = 5\frac{5}{11}$, beschreibe darüber einen Halbkreis, mache die Sehne $sf = 2\ ik$, halbiere den Bogen sf in β und ziehe βq senkrecht auf os (so ist $\beta q = \frac{1}{2}\ sf = ik$, also $\beta q^2 = oq \cdot qs = 4\frac{1025}{3025}$); nun macht man $q\gamma = 3$ (beliebige) Teile und $\gamma\delta = 4$ solcher, zieht δs und durch γ die Parallele γr dazu (so ist $rs = \frac{4}{7}\ qs$, also $oq \cdot rs = \frac{4}{7}\ oq \cdot qs = \frac{4}{7} \cdot 4\frac{1025}{3025} = 2\frac{1450}{3025}$); jetzt mache man $sh = rs$, ziehe hx parallel zu si und errichte in r eine Senkrechte, so ist rh ein Quadrat. Dann mache man $dy = 2\frac{1}{2}\ bx$, ziehe yz parallel zu ab, mache dann ferner $av = 1\frac{1}{2}\ bi + 3\frac{1}{2}\ rs$ und ziehe uv parallel zu bd, verbinde noch g mit c und t mit a, so ist das Quadrat in der verlangten Weise geteilt."

1) Im Ms. steht 3024.

2) Im Ms. steht 1725.

Den weitschweifigen Beweis gebe ich sehr verkürzt und in moderner Form:

Es ist Rechteck $hv = av \cdot ah = (1\frac{1}{2}\, bi + 3\frac{1}{2}\, rs)\ (bi + rs)$

$= (1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{9}{11} + 3\frac{1}{2}\, rs)\ (1\frac{9}{11} + rs) = \frac{900}{121} + 9\frac{1}{11}\, rs + 3\frac{1}{2}\, rs^2.$

Ferner Rechteck $hi = rh + r\gamma + o\gamma + ox$

$= rs^2 + \frac{3}{4}\, rs^2 + oq \cdot rs + oi \cdot rs$

$= 1\frac{3}{4}\, rs^2 + 2\frac{1450}{3025} + 4\frac{6}{11}\, rs = \frac{300}{121} + 4\frac{9}{11}\, rs + 1\frac{3}{4}\, rs^2$

also ist $hi = \frac{1}{3}\, hv$, mithin Rechteck hi = Dreieck aht.

Es ist aber $hb - hi = bs$ und $hb - aht = abxt$, also $bs = abxt$, oder:

Trapez $abxt = ab \cdot bi = 1\frac{9}{11}\ ab = \frac{200}{11} = \frac{2}{11} \square\ abcd.$

Nun hat man die Proportion:

Trapez $abxt$: Trapez $cdyg = bx : dy = 2 : 5$

also Trapez $cdyg = \frac{5}{11} \square\ abcd.$

Ferner hat man: Dreieck avt : Dreieck $cug = vt : gu = 2 : 5$

also Dreieck $cug = 2\frac{1}{2}$ Dreieck avt,

also: Dreieck avt + Dreieck $cug = 3\frac{1}{2}$ Dreieck $avt = 3\frac{1}{2}\ hi = 3\frac{1}{2}\ ac \,.\, rs$,

und Rechteck $au = ac \,.\, av = ac\ (1\frac{1}{2}\, bi + 3\frac{1}{2}\, rs)$,

das obere vom unteren subtrahiert, bleibt:

Trapez $atgc = 1\frac{1}{2}\ ac \,.\, bi = 1\frac{1}{2}\ bs = 1\frac{1}{2}\ abxt$

also Trapez $atgc = \frac{3}{11} \square\ abcd$;

also bleibt für das Rechteck $xygt$ noch $\frac{1}{11} \square\ abcd$,

mithin hat man die Proportion:

$xygt : abxt : atgc : cdyg = 1 : 2 : 3 : 5$, w. z. b. w.

Diese merkwürdige Konstruktion veranlaßt uns zu folgenden Bemerkungen: In erster Linie fallen die großen Verhältniszahlen 55 : 45 und 3025 : 725 auf, die ja auf 11 : 9 und 121 : 29 hätten reduziert werden können; aber auch diese wären nicht notwendig gewesen, zur Konstruktion genügt eine Streckenteilung in zehn und eine solche in sieben gleiche Teile. Auch wird man leicht einsehen, daß die Konstruktion bedeutend einfacher geworden wäre, wenn er die Seite des Quadrates 11 statt 10 angenommen hätte; vielleicht war ihm aber die Seitenlänge vorgeschrieben, ich erinnere daran, daß die arabischen Mathematiker bei algebraischen und geometrischen Aufgaben mit Vorliebe die Zahl 10 als Normalzahl wählten.[1]) Ferner muß der eigentümliche Weg auffallen, auf dem er βq erhält, er hätte ja nur durch k eine Parallele zu ab ziehen müssen, da $\beta q = ki$. Da eine

1) Vergl. die Aufgaben in der Algebra des Muḥ. b. Mûsâ el-Chwârezmî (ed. Rosen), und in der oben zitierten Abhandlung von Šoǵâʿ b. Aslam über das Fünfeck und Zehneck.

Analysis fehlt, so können wir nicht erkennen, auf welche Weise der Verfasser auf diese Lösung gekommen ist; unser moderner Weg führt auf quadratische Gleichungen, und zwar findet man leicht, wenn die Quadratseite mit a bezeichnet wird:

$$bx = \frac{2a}{7}\left(\frac{13 - \sqrt{15}}{11}\right), \quad xy = \frac{a}{11}\left(\sqrt{15} - 2\right), \quad xt = \frac{a}{11}\left(\sqrt{15} + 2\right).$$

Die Konstruktion wird dann am besten so ausgeführt, daß man zuerst a in 10 gleiche Teile teilt, dann $\sqrt{15} = \sqrt{3.5}$ sucht, hierauf xy konstruiert nach der Proportion $11 : a = \sqrt{15} - 2 : xy$, hierauf vom Reste $a - xy$ zwei Siebentel nimmt, so hat man bx, die andern fünf Siebentel sind dy.

Es will uns scheinen, als wenn jene großen Zahlen und die eigentümliche Art der Konstruktion zu dem Zwecke gewählt worden wären, die Lösung um so schwieriger und die Leistung des Mathematikers deshalb um so großartiger erscheinen zu lassen, und um ja nicht andere auf die Spur des Gedankenganges zu bringen, der zur Auflösung geführt hat. Ja nicht einmal nachmachen können sollte man die Konstruktion, denn wer wird eine Streckenteilung im Verhältnis 3025 : 725 ausführen! Übrigens muß Mozaffar el-Ṭûsî die mathematischen Kenntnisse seiner Zeitgenossen auch gar gering geschätzt haben, wenn er nicht einmal den Einwand erwartet oder gefürchtet hat, man könne ja 3025 : 725 mit 25 abkürzen. Daß Mozaffar selbst das letztere und überhaupt die Vereinfachung der Konstruktion nicht eingesehen habe, wird wohl niemand behaupten wollen. Eine solche absichtlich und zwar auf so plumpe Art komplizierter gemachte Lösung einer Aufgabe war nur möglich zur Zeit des Niederganges der Wissenschaft, zu einer Zeit, da selbst hochgestellte Persönlichkeiten keine Spur mehr von mathematischer Bildung besaßen, wo die Vertreter dieser Wissenschaft gleichsam als Wundermenschen angestaunt wurden, und selbstverständlich nicht darnach trachteten, die Meinung, die man von ihnen hatte, zu zerstören.

Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen.

Von Paul Stäckel in Hannover.

1.

In dem Verzeichnisse Eulerscher Abhandlungen, das Nicolaus Fuss der Gedächtnisrede auf seinen Großvater beigefügt hat[1]), wird eine Abhandlung: *Découverte d'une loi extraordinaire des nombres* angeführt, die in dem Journal littéraire de l'Allemagne, Mois de Janvier et Février 1751 erschienen sein sollte. Als sechzig Jahre später Nicolaus Fussens Sohn Paul Heinrich v. Fuss die Herausgabe der *Opera minora* Eulers in Angriff nahm, die über die 1849 veröffentlichten *Commentationes arithmeticae* hinauszuführen ihn leider die Ungunst der Zeiten und ein früher Tod verhindert haben, da konnte er sich diese seltene Zeitschrift auf keine Weise verschaffen. Schließlich wandte er sich am 19. April 1844 an Gauss, der ihn im vorhergehenden Jahre in Göttingen freundlich aufgenommen hatte[2]), „in der Hoffnung auf die so reiche und vollständige Göttinger Bibliothek". Wie die beiden langen Briefe an Fuss vom 8. und 15. Mai 1844 zeigen, hat sich Gauss der Anfrage aufs sorgfältigste angenommen; war er doch, wie er am 16. September 1849 nach Empfang der *Commentationes* an Fuss schreibt, der Überzeugung, daß „das Studium aller Eulerschen Arbeiten die beste durch nichts anderes zu ersetzende Schule für die verschiedenen mathematischen Gebiete bleiben wird"[3]).

1) *Éloge de M. Léonard Euler, lu a l'Académie Imperiale des Sciences, dans son Assemblée du 23 octobre 1783, avec une liste complette des Ouvrages de M. Euler,* Nova Acta Petrop. 1, ad annum 1783 [1787]; Histoire S. 159—212; auch besonders erschienen Petersburg 1783, deutsche Ausgabe Berlin 1786. Nicolaus Fuss (1755—1826) hatte eine Tochter des ältesten Sohnes von Leonhard Euler, Johann Albrecht Euler (1734—1800), geheiratet.

2) Schon Nicolaus Fuss hatte mit Gauss in Beziehungen gestanden; im besonderen hat er mit Gauss über dessen Berufung nach Petersburg verhandelt. P. H. v. Fuss hatte im Februar 1843 an Gauss die von ihm herausgegebene *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle,* 2 Teile (Petersburg 1843) gesandt; das Gauss-Archiv in Göttingen besitzt 6 Briefe von ihm an Gauss.

3) Die drei genannten Briefe von Gauss an P. H. v. Fuss hat kürzlich ein Neffe von diesem, Herr Geheimrat Viktor Fuss in Petersburg, dem Gauss-Archiv als Geschenk überwiesen; vgl. meine Note: *Vier neue Briefe von Gauss* in den Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1907, S. 372.

GAUSS stellte fest, daß die Göttinger Bibliothek die ganze Folge der Zeitschrift besitzt, die vierzig Jahre hindurch unter zweimaligem Wechsel von Titel und Verlagsort erschienen ist, nämlich 1720—1741 als Bibliothèque germanique zu Amsterdam (50 Tomes), 1741—1743 als Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord zu Haag (2 Tomes zu je 2 Parties) und 1746—1760 als Nouvelle bibliothèque germanique wieder zu Amsterdam (26 Tomes). Den Inhalt der 78 Tomes bilden im wesentlichen Berichte über neu erschienene Bücher und Akademieschriften. Eine Abhandlung des angegebenen Titels ist darin nicht zu finden, wohl aber enthält die 1. Partie des Tome II des Journals, die die Jahreszahl 1743 trägt, auf S. 115—127 einen kleinen mathematischen Originalaufsatz mit der Überschrift:

Démonstration de la somme de cette Suite

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{ etc.}$$

Der Verfasser ist nicht angegeben; er fehlt auch in dem am Schlusse des Bandes stehenden Inhaltsverzeichnis. Daß jedoch die Abhandlung von EULER herrührt, „erhellet", wie GAUSS bemerkt, „sogleich aus den Anfangsworten 'la méthode que j'ai donnée dans les Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, pour trouver la somme de cette suite, lorsqne l'exposant n est un nombre pair

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{ etc.}$$

a quelque chose d'extraordinaire usw.' in Verbindung mit der späterhin vorkommenden näheren Bezeichnung des betreffenden Bandes als T. VII, in welchem Bande sich wirklich die bezogene Abhandlung unter EULERS Namen befindet"[1]).

So hatte GAUSS statt der gesuchten eine bisher unbekannte Abhandlung EULERS entdeckt. Welches Interesse er daran nahm, zeigt der Umstand, daß er die Mühe nicht gescheut hat, die Abhandlung für FUSS eigenhändig abzuschreiben, damit sie „in der neuen Ausgabe reproduciert werde". „Ein gewöhnlicher Abschreiber", äußert er sich in dem Brief vom 15. Mai 1844, „würde allerdings nicht wohl dazu befähigt sein, oder

1) Der erst 1740 erschienene Band VII der Comment. Petrop. für 1734/35 enthält S. 123 EULERS Abhandlung: *De summis serierum reciprocarum;* man ersieht hieraus, wie irreführend es ist, wenn J. G. HAGEN in dem *Index Operum LEONHARD EULERI* (Berlin 1896), S. 11 diese Abhandlung unter der Jahreszahl 1734/35 anführt. Übrigens findet sich, was GAUSS entgangen zu sein scheint, in dem Journal doch ein Hinweis auf EULERS Autorschaft, denn in dem am Schlusse des Bandes befindlichen alphabetischen Verzeichnis der im Text vorkommenden Personennamen wird EULER mit der Seitenzahl 115 angeführt.

er müßte Zeile um Zeile gleichsam ein fac simile davon nehmen. Der Aufsatz wimmelt nämlich von barbarischen Druckfehlern, die allerdings ein Sachverständiger gleich als solche erkennt"[1]).

Die Irrtümer in der Angabe von NICOLAUS FUSS suchte GAUSS dadurch zu erklären, daß jener „nur aus dem Gedächtnisse oder noch wahrscheinlicher nach der Gedächtnisangabe eines Dritten citiert habe". Daß es sich so verhält, ist um so wahrscheinlicher als, nach C. G. J. JACOBI, EULER am 22. Juni 1747 der Berliner Akademie eine Abhandlung des Titels: *Découverte d'une loi extraordinaire des nombres* vorgelegt hat, die jedoch in deren Memoiren nicht aufgenommen worden ist; aus einer im Archiv der Berliner Akademie vorhandenen Abschrift hat sie FUSS in den *Commentationes arithmeticae*, T. II, S. 639, veröffentlicht[2]).

2.

Es kann kaum Wunder nehmen, daß die Abhandlung EULERS, die anonym in einer wenig verbreiteten holländischen Literaturzeitung erschienen war, unter den Mathematikern keine Beachtung gefunden hat. „PFAFF, hätte er sie gekannt," bemerkt GAUSS an FUSS, „würde er sie gewiß in seiner Schrift von 1788 nicht unerwähnt gelassen haben"; dieser *Versuch einer neuen Summationsmethode nebst anderen analytischen Bemerkungen* (Berlin 1788) bezieht sich auf die Summation der Reihen

$$S_{2r} = 1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \cdots$$

und enthält auch einige geschichtliche Notizen. Aber auch den späteren Autoren, die sich mit den Summen der reziproken Potenzen der natürlichen Zahlen beschäftigt haben, scheint EULERS Abhandlung entgangen zu sein. Sie fehlt in R. REIFFS *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen 1889) und wird auch nicht in M. CANTORS *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3^2, Leipzig 1901, Kapitel 110—113, S. 666—773

1) In der Vorrede zu den *Commentationes arithmeticae*, T. I, S. XXIV hat sich P. H. v. FUSS über die Entdeckung der Abhandlung im Journal durch GAUSS so geäußert: „Commentatio haec nomine auctoris caret. Cl. GAUSSIUS, qui humanissime in se susceperat in bibliotheca Göttingensi inquirere, ubinam librorum repeniretur alia quaedam EULERI Commentatio (cf. supra p. XVIII) ex occasione in hanc ipsam incidit. Sed cum erroribus scateat typographicis, vir summus non recusavit eam sua manu describere et ad nos in usum editionis transmittere".

2) In betreff der Herausgabe der Werke EULERS hat zwischen P. H. v. FUSS und C. G. J. JACOBI ein umfangreicher Briefwechsel stattgefunden, der sehr wertvolle Vorarbeiten für dieses schwierige Unternehmen enthält; so sandte zum Beispiel JACOBI an FUSS Auszüge aus den Protokollen der Berliner Akademie, die ergeben, wann EULER die einzelnen Abhandlungen vorgelegt hat. In Gemeinschaft mit Herrn W. AHRENS werde ich diesen Briefwechsel demnächst in der Bibliotheca Mathematica veröffentlichen.

angeführt. Auch G. ENESTRÖM hat sie in seiner *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés* (Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, S. 22) und in dem *Briefwechsel zwischen LEONHARD EULER und JOHANN I. BERNOULLI* (Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 249) nicht herangezogen[1].

Als ein kleiner Beitrag zu der Feier der zweihundertsten Wiederkehr des Geburtstages von LEONHARD EULER möge es aufgefaßt werden, wenn im folgenden seine vergessene *Démonstration* wieder abgedruckt wird. Vorher aber möge dargelegt werden, welche Stellung diese Abhandlung in der Geschichte der unendlichen Reihen einnimmt. Es erscheint das um so mehr angebracht, als die Geschichte der Summen S_{2r} bisher noch nicht in zusammenhängender Weise behandelt worden ist und die zerstreuten Notizen, die man darüber in den historischen Werken findet, manche Irrtümer und Lücken aufweisen. Dabei soll nur die Zeit bis 1755 berücksichtigt werden; in der Tat ist seitdem nichts Wesentliches hinzugekommen.

3.

In dem ersten Teile seiner *Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis eorumque summa finita* (Basel 1689)[2] beschäftigt sich JAKOB BERNOULLI unter anderem auch mit der Summation von unendlichen Reihen, deren Glieder Brüche mit dem Zähler Eins sind, während die Nenner aus figurierten Zahlen oder aus den Differenzen dieser Zahlen und einer bestimmten von ihnen bestehen. Er erkennt, daß die Summe der reziproken Werte der natürlichen Zahlen selbst unendlich ist, dagegen gelingt es ihm, die endlichen Summen der unendlichen Reihen zu bestimmen, bei denen die Nenner Dreieckszahlen, die Differenzen der Dreieckszahlen und einer bestimmten Dreieckszahl, die Differenzen der Quadratzahlen und einer bestimmten Quadratzahl sind. „Sind die Nenner jedoch reine Quadrate, wie bei der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ etc., so ist merkwürdigerweise die Erforschung der Summe schwieriger als man erwarten sollte; daß die Summe endlich ist, erschließen wir aus der anderen

1) Wie ENESTRÖM erwähnt hat (Biblioth. Mathem. 3_2, 1889, S. 4; 4_2, 1890, S. 24) gibt es eine historische Monographie von J. MELDERCREUTZ, *De summatione seriei reciprocae e quadratis numerorum naturalium* (Holmiae 1755), die unter dem Präsidium des Verfassers in Upsala von C. A. BERGSTRÖM verteidigt wurde. ENESTRÖM hatte die Freundlichkeit, mir diese Dissertation zugänglich zu machen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle bestens danken möchte.

2) Wiederabgedruckt *Opera*, Genf 1744, T. I, S. 373—402. — Nach der oben zitierten Abhandlung von J. MELDERCREUTZ (S. 6) hat schon J. WALLIS in seiner *Arithmetica infinitorum* (Oxford 1655) die unendliche Reihe der reziproken Quadratzahlen erwähnt.

[Summe der Dreieckszahlen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots$], da sie augenscheinlich kleiner als diese ist. Sollte jemand das, was unseren Anstrengungen bis jetzt entgangen ist, finden und uns mitteilen, so werden wir ihm sehr dankbar sein[1]).

Diese Aufforderung hatte insofern Erfolg, als JAKOB BERNOULLIS jüngerer Bruder JOHANN BERNOULLI sich mit der Frage beschäftigte. „Je vois déjà la route de trouver la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. ce que nous ne pouvions pas autrefois“, schreibt er, wieder einmal etwas voreilig, am 22. Mai 1691 an seinen Bruder[2]); ohne Zweifel hat er bald entdeckt, daß er sich geirrt hatte.

Später hat FONTENELLE in seiner *Géométrie de l'infini* (Paris 1727) einige Sätze über die Summe der reziproken Quadratzahlen aufgestellt, die jedoch, wie MACLAURIN in der „Introduction“ zu seinem *Treatise of fluxions* (Edinburg 1742) bemerkt hat, unrichtig sind. Ferner fand STIRLING in der *Methodus differentialis* (London 1730), S. 28 mittels seiner Summationsmethode den Näherungswert

1,644 934 066,

der von dem wahren Werte 1,644 934 064 8 .... erst in der neunten Dezimalstelle abweicht[3]). Auch in dem Briefwechsel zwischen DANIEL

1) Diese entscheidende Stelle ist M. CANTOR entgangen, der vielmehr sagt, in der zweiten Abhandlung JAKOB BERNOULLIS über Reihen vom Jahre 1692 (*Opera* T. 1, S. 517—542) sei auch „erstmalig die Reihe der reziproken Quadratzahlen allerdings erfolglos in Angriff genommen“ (a. a. O. 3^2, S. 96). Von einer solchen erfolglosen Bemühung habe ich in der zweiten Abhandlung nichts finden können; die Summe S_2 tritt darin allerdings auf, aber nur als Hilfsgröße bei der Umformung anderer unendlicher Reihen, ohne daß sie selbst untersucht würde. Möglicherweise bezieht sich die Angabe CANTORS auf die dritte Abhandlung vom Jahre 1698, wo (siehe *Opera* T. II, S. 759) JAKOB BERNOULLI die Summierung der Reihe auf die Quadratur einer gewissen Kurve reduziert hat. Nebenbei sei noch bemerkt, daß es S. 658 bei der Erwähnung von S_2 statt JOHANN BERNOULLI heißen muß JAKOB BERNOULLI.

2) Mitteilung von ENESTRÖM aus einem noch nicht veröffentlichten Briefe JOHANN BERNOULLIS an JAKOB BERNOULLI, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 249.

3) Diese Angaben sind der Dissertation von MELDERCREUTZ entnommen. Dieser weist auch darauf hin, daß EULER in den Petersburger Commentarii 6, 1732/33, gedruckt 1738 (gemeint ist die Abhandlung *Methodus generalis summandi progressiones*, S. 68—97, § 12) die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $x^n : (an + b)^m$ mittels eines bestimmten Integrals summiert hat, die für $a = 1$, $b = 0$, $m = 2$, $x = 1$ in die Summe der reziproken Quadratzahlen übergeben würde; man findet so die Formel

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \int_0^1 \frac{ln(1-x)}{-x}\,dx;$$

freilich setzt EULER selbst nur $m = 2$, $x = 1$, aber beschäftigt sich nicht mit dem

BERNOULLI und GOLDBACH tritt sie auf (Briefe vom 29. August 1728 und 31. Januar 1729); im besonderen zeigt GOLDBACH wie man durch einfache Überlegungen beweisen könne, daß die Summe zwischen 1,644 und 1,645 liegt[1]).

Da die eben erwähnten Briefe aus der Zeit stammen, in der DANIEL BERNOULLI mit EULER zusammen in Petersburg lebte (1727—1733), so ist es wahrscheinlich, daß das reizvolle, aber schwierige Problem der Summation der Reihe der reziproken Quadratzahlen auch zwischen diesen beiden Mathematikern besprochen worden ist, und diese Vermutung gewinnt dadurch fast den Grad einer Gewißheit, daß EULER von seiner Entdeckung des genauen Wertes der Summe zuerst DANIEL BERNOULLI Kenntnis gegeben hat.

Leider ist der Brief, in dem EULER die Formel

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

angab, bis jetzt nicht wieder aufgefunden worden. Wir wissen davon nur aus der Antwort DANIEL BERNOULLIS vom 12. September 1736. Hier heißt es: „Das theorema summationis seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \text{ etc.} = \frac{pp}{6} \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{90}$$

ist sehr merkwürdig. Sie werden ohne Zweifel a posteriori darauf gekommen sein. Ich möchte die Solution gern von Ihnen sehen“[2]).

Die Formel $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ hat JOHANN BERNOULLI durch seinen Sohn DANIEL erfahren[3]) und sofort versucht, seinerseits einen Beweis dafür zu finden. Es ist erstaunlich, daß er genau die kühne Methode wiedergefunden hat, deren sich EULER bedient hatte. Sie besteht darin, daß der Satz: „Bei einer algebraischen Gleichung, deren absolutes Glied den Wert Eins hat, ist der Koeffizient des Gliedes mit der ersten Potenz der Unbekannten gleich der negativen Summe der reziproken Werte der Gleichungswurzeln“ auf die Gleichung „unendlich hohen Grades“:

$$1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \ldots = 0$$

Falle $a = 1$, $b = 0$ und versucht auch nicht den Wert des Integrales zu ermitteln. Vergl. auch EULERS nachgelassene Abhandlung: De summatione serierum in hac forma contentarum: $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \ldots$; Mém de l'acad. d. sc. de St.-Pétersbourg 3, 1809/10 (1811), S. 26, sowie den Brief an NICOLAUS BERNOULLI vom 1. September 1742, L. EULER: *Opera postuma*, Petersburg 1862, 1, S. 521.

1) *Corresp.* II, S. 263, 281.

2) *Corresp.* II, S. 435. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906, S. 127 setzt den Brief EULERS vermutungsweise in den August 1736.

3) Vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 253.

angewandt wird, die durch die Substitution $x^2 = z$ aus der Gleichung $\frac{\sin x}{x} = 0$ hervorgegangen ist; es ist klar, daß diese Gleichung die Wurzeln $z = n^2 \pi^2$ hat, wo n irgend eine positive, von Null verschiedene ganze Zahl bedeutet.

Ein Vorzug der Methode ist, daß sie sofort noch weitere Summationsformeln liefert, die sich aus dem bekannten Zusammenhange zwischen den Koeffizienten der Gleichung und den Summen der Produkte der reziproken Wurzeln zu je zwei, drei, vier, ... ergeben. Aus diesen Formeln findet man, wie EULER und BERNOULLI sofort erkannten, vermöge der GIRARD-NEWTONschen Relationen zwischen den Summen der Potenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung nach und nach die Werte der Summen S_4, S_6, S_8, ...[1]) EULER hat übrigens statt der Gleichung $\sin x = 0$ auch allgemeiner die Gleichung $\sin x = a$ betrachtet, wo a eine Konstante bedeutet, der er verschiedene geeignete Werte gibt, zum Beispiel den Wert Eins; er gelangt auf diesem Wege nicht nur zu den Summen S_{2r}, sondern auch zu weiteren Summen, auf die jedoch hier nicht eingegangen werden kann.

4.

In gewisser Beziehung war JOHANN BERNOULLI über EULER hinausgegangen, er erhob nämlich (Brief vom 2. April 1737 an EULER) gegen die soeben auseinandergesetzte Methode den Einwand, sie beruhe auf der unbewiesenen Voraussetzung, daß die Gleichung $\sin x = 0$ keine imaginären Wurzeln besitze und überhaupt keine anderen, als die, die den unzählig vielen, zu dem Werte Null des Sinus gehörigen Bogen entsprechen. Dafür, daß es sich so verhalte, habe er eine Art von Beweis, der ihm die Sache jedoch nur wahrscheinlich mache [2]).

In seiner Antwort vom 27. August 1737 erkennt EULER an, daß dieses Bedenken von großem Gewichte sei; freilich scheine es nicht leicht zu sein, zu beweisen, daß die Gleichung $\sin x = 0$ keine imaginären Wurzeln habe. Jedoch könne als Bestätigung seiner Methode der Umstand dienen, daß die dadurch gefundenen Werte der Summen S_{2r} mit den durch numerische Summation gefundenen gut übereinstimmten [3]).

1) Obwohl EULERS Abhandlung *De summis serierum reciprocarum* bereits 1740 erschienen war, hat JOHANN BERNOULLI doch 1742 seine Herleitung der Summen S_2, S_4, S_6 in den vierten Band der *Opera omnia* aufgenommen, der die *Anecdota* enthält (S. 20—25).

2) Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 253 - 255.

3) In dem vorher angeführten Briefe an NICOLAUS BERNOULLI vom 1. September 1742 bemerkt EULER, er habe seine Methode erst veröffentlicht, nachdem er sich von dieser Übereinstimmung überzeugt hatte. Die Zahlenwerte von S_2 bis S_{16}, auf 16 Dezimalstellen berechnet, hat er in den *Institutiones calculi differentialis*, P. II, Petersburg 1755, S. 456 mitgeteilt.

Außerdem habe er aber den Wert $\frac{\pi^2}{6}$ für S_2 auf einem ganz anderen Wege wiedererhalten, und nun deutet EULER gerade die Methode an, die in dem Journal littéraire durchgeführt ist. Er geht aus von der Reihe für arc sin x:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots$$

und bildet mit ihrer Hilfe die Gleichung

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = \int_0^x \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Auf der rechten Seite wird gliedweise integriert und dann $x = 1$ gesetzt. So kommt:

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots$$

Es ist aber

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wie sich durch partielle Integration ergibt[1]). Mithin erhält man

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots,$$

woraus der Wert von S_2 leicht hergeleitet werden kann. Er zweifele nicht daran, meinte EULER am Schluß des Briefes, daß auch die Summen $S_4, S_6, \dots$ durch eine ähnliche Analyse gefunden werden könnten[2]).

JOHANN BERNOULLI (Brief vom 5. Nov. 1737) erklärt EULERS Darlegungen für sehr schön und seines Scharfsinns würdig; die neue Herleitung von S_2 sei schlüssig und der alten bei weitem vorzuziehen. Er habe nach ihrem Muster die Reihenformel

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{8} + \dots$$

1) Auf diese Rekursionsformel ist EULER später zurückgekommen und hat untersucht, wie man die Funktion v von x wählen müsse, damit eine Relation der Form

$$\int_0^1 x^n\,dv = \frac{\beta n + b}{\alpha n + a}\int_0^1 x^{n-1}dv + \frac{\gamma n + c}{\alpha n + a}\int_0^1 x^{n-2}dv$$

besteht (*Methodus inveniendi formulas integrales quae certis casibus datam inter se teneant rationem, Opuscula analytica*, Petersburg 1785, t. II, S. 178—216; wiederabgedruckt *Institutiones calculi integralis*, T. IV, S. 378—415).

2) Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 257—259.

gefunden[1]); wie JOHANN BERNOULLIS *Opera omnia*, T. IV (Basel 1742), S. 24—25 zeigen, hatte er diese Formel erhalten, indem er statt des arc sin x den arc tg x nahm. Sie ergibt sich aber auch, wie EULER in seiner Antwort vom 10. Dezember 1737 sagt, wenn man in der Entwickelung der Funktion $(\text{arc sin } x)^2$ nach Potenzen von x, nämlich

$$(\text{arc sin } x)^2 = \frac{1}{1}\frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \dots$$

$x = 1$ setzt[2]).

Merkwürdigerweise findet sich diese Potenzreihe für $(\text{arc sin } x)^2$ bereits bei dem japanischen Mathematiker SEKI (1642—1708)[3]), und es war daher von Wichtigkeit, festzustellen, wann sie in dem Abendlande zuerst auftritt. Wir wissen, daß sie EULER schon im Jahre 1737 bekannt gewesen ist; sein Brief an JOHANN BERNOULLI ist jedoch erst im Jahre 1904 von G. ENESTRÖM veröffentlicht worden. Fragt man aber, wann die Reihe zuerst im Drucke vorkommt, so wurden bis jetzt die *Mélanges d'analyse algébrique* von J. DE STAINVILLE angeführt, die 1815 zu Paris erschienen sind[4]). Um so überraschender ist es, daß EULER bereits 1743 in dem Journal litteraire die Herleitung der Potenzreihe für $(\text{arc sin } x)^2$ ausführlich angegeben hat. Diese Reihe wird nämlich in recht eleganter Weise mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten aus der linearen Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 1$$

gewonnen, der die Funktion $(\text{arc sin } x)^2$ bei der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ genügt.

In dem Journal verwendet EULER die Reihe für $(\text{arc sin } x)^2$ dazu, um einen zweiten Beweis für die Formel $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ zu geben, von dem sich in den Briefen an JOHANN BERNOULLI nichts findet. Es ist nämlich

$$\frac{1}{6}(\text{arc sin } x)^3 = \int_0^x \left(\frac{1}{1}\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{8} + \dots\right)\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Auf der rechten Seite wird wieder gliedweise integriert, nach der In-

1) Biblioth. Mathem. 5_3, S. 266—267.

2) Ebenda, S. 270.

3) Vgl. P. HARZER, *Die exakten Wissenschaften im alten Japan;* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 14, 1905, S. 318.

4) Dieses seltene Werk scheint in Deutschland nur auf der Universitätsbibliothek zu *Breslau* vorhanden zu sein. Die Potenzreihe für $(\text{arc sin } x)^2$ ist wohl erst dadurch allgemein bekannt geworden, daß sie CAUCHY, unter Berufung auf STAINVILLE, in seine *Analyse algébrique*, Paris 1822, S. 550 aufgenommen hat; vgl. auch das Zitat bei J. G. HAGEN, *Synopsis der höheren Mathematik*, Bd. I (Berlin 1891), S. 113.

tegration $x = 1$ gesetzt und auf die einzelnen Integrale die Reduktionsformel angewandt. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{2^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8^2}\frac{\pi}{2} + \ldots,$$

woraus durch Division mit $\frac{\pi}{8}$ die Formel für S_2 hervorgeht.

5.

Es liegt nahe zu vermuten, daß Euler 1737 gehofft hatte, mittels der Reihenentwickelungen der Potenzen des arc sin x die Formeln für die Summen S_{2r} zu erhalten. Jedenfalls war er jedoch, als er die Abhandlung in dem Journal niederschrieb, zu der Überzeugung gelangt, daß eine solche Hoffnung trügerisch sei.

Wann aber hat Euler die *Démonstration* verfaßt? Gewisse Anhaltspunkte für die Bestimmung der Zeit werden sich ergeben, wenn wir den Gang seiner weiteren Untersuchungen über die Summen S_{2r} betrachten.

Zunächst ist eine erst im Jahre 1750 veröffentlichte Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes* zu nennen, die sich in dem T. XII der Petersburger Kommentarien für das Jahr 1740, S. 53, befindet, die aber, wie sich herausstellen wird, spätestens 1741 entstanden sein muß. Die Girard-Newtonschen Relationen hatten es zwar ermöglicht, Schritt für Schritt die Werte der Summen $S_2, S_4, S_6, S_8, \ldots$ zu berechnen, allein die Berechnung wurde mit wachsendem Exponenten $2r$ immer mühsamer, und man mußte wünschen, einen bequemeren Weg zu finden. Dies gelang Euler durch folgende Überlegung. Bei der Gleichung

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \ldots = 0$$

seien die Summen der reziproken Potenzen der Wurzeln der Reihe nach $A, B, C, D, \ldots$ Dann besteht vermöge der Girard-Newtonschen Relationen die Identitität:

$$\frac{\alpha - 2\beta x + 3\gamma x^2 - 4\delta x^3 + \ldots}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma y^3 + \delta x^4 - \ldots} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots;$$

dabei ist der Zähler des Bruches gleich der negativen Ableitung seines Nenners. Kann man also den Bruch nach Potenzen von x entwickeln, so hat man in den Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x die Summen der reziproken Wurzelpotenzen. Ist nun im besonderen die Gleichung

$$1 - \sin x = 0$$

vorgelegt, die die Doppelwurzeln $x = \frac{\pi}{2}, -3\frac{\pi}{2}, +5\frac{\pi}{2}, -7\frac{\pi}{2}, \ldots$ besitzt, so hat man die Funktion

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

nach Potenzen von x zu entwickeln. Diese genügt aber der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 + y^2),$$

mit der Anfangsbedingung $x = 0, y = 1$, zu deren Integration nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$y = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

angesetzt wird.

Die neue Methode benutzt Euler, um sogleich die Werte von S_2 bis S_{24} zu berechnen, und zwar erscheinen diese Werte in der Gestalt

$$S_{2r} = \frac{2^{2r-1}}{(2r+1)!} A_{2r} \pi^{2r},$$

wo die A_{2r} Brüche bedeuten, die nach keinem unmittelbar ersichtlichen Gesetze fortschreiten; es ist im besonderen

$$A_2 = \frac{1}{2},\ A_4 = \frac{1}{6},\ A_6 = \frac{1}{6},\ A_8 = \frac{3}{10},\ A_{10} = \frac{5}{6},\ A_{12} = \frac{691}{210}, \ldots.$$

Die Koeffizienten A_{2r} stehen aber, wie Euler erkennt, im engen Zusammenhange mit den Koeffizienten, die bei seiner klassischen Summenformel aufgetreten waren; diese geht nämlich bei Benutzung der Zeichen A_{2r} über in die Gleichung:

$$\sum_0^n f(x) = \int_0^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{1}{3!} A_2 [f'(n) - f'(0)]$$
$$- \frac{1}{5!} A_4 [f'''(n) - f'''(0)] + \frac{1}{7!} A_6 [f^{V}(n) - f^{V}(0)] - \ldots [1]$$

6

Die Abhandlung, über die im Vorhergehenden berichtet wurde, läßt sich als eine Ausgestaltung der Methode vom Jahre 1736 bezeichnen. Die Methode selbst erfuhr im Jahre 1741 heftige Angriffe. Daniel Bernoulli machte in einem Briefe an Euler vom 20. September 1741 dagegen geltend, daß „eine aequatio per series nicht die proprietates habe, als die aequationes algebraicae, in quibus coefficiens secundi termini est summa radicum; solches könnte ich mit gar vielen Argumenten beweisen. Wenn also Ew. ehemals gefunden, daß $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \frac{1}{6} cc$, posita $c =$ circumferentiae circuli, cujus diameter $= 1$, so halte ich dieses theorema nur

1) Wenn Euler am Schlusse seiner *Démonstration* sagt, er habe bereits zwei verschiedene Methoden zur Berechnung der Koeffizienten A_{2r} gegeben, so meint er damit wohl erstens die Methode der Reihenentwickelung von $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ und zweitens die Definition der Koeffizienten A_{2r} durch die Summenformel.

accidental, . . . allein applicieren Sie eben dieses raisonnement auf eine Ellipse cujus axis major $= m$, axis minor $= n$, circumferentia $= S$, so werden Sie finden, quod sit

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \frac{mmSS}{6n^4},$$

quod foret absurdum. Diese letztere Observation hat auch Herr Prof. Cramer aus Genf überschrieben"[1]). Eulers Antwort ist leider verloren, daß er jedoch die Einwendungen Daniel Bernoullis als stichhaltig anerkannt hat, ergibt sich daraus, daß er am 16. Januar 1742 einem Neffen Johann Bernoullis, Nicolaus Bernoulli in Basel, eine strengere Begründung seiner Methode vom Jahre 1736 und eine ganz neue, auf der Anwendung bestimmter Integrale beruhende Herleitung der Summen S_{2r} mitgeteilt hat[2]). Daß Euler sich gerade an Nicolaus Bernoulli wandte, hängt wohl damit zusammen, daß dieser sich mit der Summation der Reihe der reziproken Quadrate beschäftigt hatte[3]).

Jene strengere Begründung besteht in dem Nachweise, daß die Gleichung $\sin x = 0$ nur die Wurzeln $x = n\pi$ hat, wo n irgend eine positive oder negative ganze Zahl mit Einschluß der Null bedeutet. Durch Verbindung der Gleichungen

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

und

$$e^{z} = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

gewinnt Euler die Formel

$$\sin x = \frac{1}{2i}\lim_{n=\infty}\left\{\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^n\right\}$$

1) *Corresp.* II, S. 477.

2) *Opera postuma* 1, S. 519.

3) *Inquisitio in summam seriei* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ Comment. Petrop. **10**, ad annum 1738 [1747], S. 19—21. N. Bernoulli zeigt hier, daß die Funktion

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots,$$

wenn die Koeffizienten A_n der Rekursionsformel genügen

$$A_n + (an[n+1] + bn + c) = A_n + \frac{1}{1}\,(e[n+1]n + f[n+1] + g)$$

einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Kann man also ein Integral dieser Gleichung finden, bei dem die Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = A_1$ erfüllt ist, so liefern die Werte des Integrals für $x = 1$ die Summe der unendlichen Reihe $A_1 + A_2 + A_3 + \dots$. Die Schwierigkeit, diese Methode auf S_2 anzuwenden, besteht darin, daß N. Bernoulli die zugehörige Differentialgleichung nicht integrieren konnte und daher aus S_2 durch recht umständliche Kunstgriffe eine andere Reihe herleitet, bei der die Integration durch Kreisfunktionen gelingt.

und zerlegt die Differenz der n-ten Potenzen nach Absonderung des Faktors $\frac{2ix}{n}$ in trinomische Faktoren. Der Übergang zur Grenze führt alsdann zu der berühmten Produktformel:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

die demnach dem Probleme, die Summe der reziproken Quadrate zu finden, ihre Entstehung verdankt[1]). Wenn man jetzt die Potenzreihe, die aus der Produktformel durch Ausmultiplizieren hervorgeht, mit der NEWTONschen Potenzreihe für $\sin x$ vergleicht, erhält man Relationen, aus denen sich die Summen S_{2r} bestimmen lassen.

NICOLAUS BERNOULLI meinte (Brief vom 13. Juli 1742), der letzte Schluß sei nur dann berechtigt, wenn man beweise, daß die NEWTONsche Reihe für jeden Wert von x konvergiere; denn der von CRAMER mitgeteilte Trugschluß erkläre sich daraus, daß die dabei benutzte Reihe bei wachsenden Werten des Ellipsenbogens divergent werde[2]). EULER, dem Betrachtungen über Divergenz und Konvergenz immer unbehaglich waren, hat, wie sein Brief an NICOLAUS BERNOULLI vom 10. November 1742 zeigt, diese für die damalige Zeit recht scharfsinnigen Betrachtungen nicht zu würdigen gewußt; das CRAMERsche Paradoxon, meint er, finde seine Auflösung darin, daß die betreffende Gleichung auch imaginäre Wurzeln besitze.

Die neue Herleitung gründet sich auf die Integralformel:

$$\text{(I)} \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} = \frac{\pi}{q \operatorname{tg} \frac{p\pi}{q}},$$

in der p und q positive ganze Zahlen, p kleiner als q, bedeuten; sie ergeben sich durch Partialbruchzerlegung und Summation der durch die Integration entstehenden endlichen Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin}{\cos} (a\nu + b).$$

Wenn man aber die Integranden nach steigenden Potenzen von x entwickelt und darauf gliedweise integriert, so gelangt man zu der unendlichen Summe

$$\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+nq} + \frac{1}{p-nq}\right)$$

1) Für die Gedanken, die EULER bei der Produktformel leiteten, vergleiche man die ausführlichen Darlegungen in dem langen Briefe an NICOLAUS BERNOULLI, *Opera postuma* I, S. 521—527.

2) *Correspond.* II, S. 683—684. — 3) *Opera postuma* I, S. 528.

und hat also für

$$\frac{p}{q} = s$$

die Identität

$$(T) \qquad \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi s} = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+n} + \frac{1}{s-n}\right).$$

Hierin bezeichnet s zunächst einen positiven echten Bruch, man darf aber, wie Euler sich ausdrückt, nach dem Gesetze der Stetigkeit s auch als eine stetig veränderliche Größe ansehen, nach der differentiiert werden kann. Wiederholte Differentation liefert die Identitäten

$$\frac{1}{(2r)!} \frac{d^{2r}}{ds^{2r}} \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi s} = \frac{1}{s^{2r}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(s+n)^{2r}} + \frac{1}{(s-n)^{2r}}\right).$$

Wird hierin $s = \frac{1}{2}$ gesetzt, so gelangt man zu den Summen S_{2r}.

Eine Reihe ähnlicher Betrachtungen führt von der Integralformel

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1+x^q} \, dx = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

zu der Identität:

$$(S) \qquad \frac{\pi}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + \sum_{n-1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{s+n} + \frac{1}{s+n}\right),$$

aus der man durch wiederholte Differentiation weitere Identitäten erhält. Auf diese Art findet Euler die Summen der unendlichen Reihen

$$1 - \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} - \frac{1}{7^{2r+1}} + \frac{1}{9^{2r+1}} - \cdots;$$

dagegen ist es weder ihm noch einem späteren Mathematiker gelungen, die Summen

$$S_{2r+1} = 1 + \frac{1}{2^{2r+1}} + \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{4^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} + \cdots$$

in geschlossener Form darzustellen. Daß sie zu den entsprechenden Potenzen von π jedenfalls nicht in einfachen rationalen Verhältnissen stehen, hat schon Euler bemerkt; ob der von ihm vermutete Zusammenhang mit dem natürlichen Logarithmus von 2[1]) wirklich besteht, verdiente geprüft zu werden.

Auch zu der neuen Herleitung hat Nicolaus Bernoulli eine feine Bemerkung gemacht; es ist sehr zu bedauern, daß dieser hochbegabte Mann wegen seiner vielen Amtsgeschäfte als Professor der Jurisprudenz keine Zeit gefunden hat, sich mehr mit Mathematik zu beschäftigen. Zur Herleitung der Formeln, die hier mit (T) und (S) bezeichnet sind, bedürfe es, schreibt er, keines so großen Apparates, denn die Formel (T) folge

1) *Opera postuma* I, S. 521.

sofort aus der Produktdarstellung für $\sin \pi s$ durch logarithmische Differentiation und auf ähnliche Art könne man auch die Formel (S) finden[1]). Als EULER hierüber Aufklärung wünscht, antwortet er am 24. Oktober 1742, man brauche nur bei dem Quotienten $\frac{\sin \pi s}{\cos \pi s}$ in Zähler und Nenner die Produktdarstellungen einzusetzen und dann wieder logarithmisch zu differentiieren[2]). Wo sich diese eleganten Beweise für die Formeln (T) und (S) zuerst gedruckt finden, habe ich nicht ermitteln können. EULER scheint sie nicht benutzt zu haben; in der zusammenfassenden Darstellung seiner Untersuchungen über die Kreisfunktionen, *Introductio* (Lausanne 1748), T. I, Cap. 10, gibt er zwar eine elementare Herleitung dieser Formeln (§ 178), sie geschieht aber durch Umformungen im Sinne der sogenannten algebraischen Analysis.

7.

Bei seiner Einführung in die Berliner Akademie am 6. September 1742 hat EULER nicht weniger als sieben Abhandlungen zur Aufnahme in deren Schriften vorgelegt, von denen fünf sogleich in den Miscellanea Berolinensia gedruckt wurden, deren siebenten Band vom Jahre 1743 sie zieren. Den Gegenstand der dritten und vierten Abhandlung bilden die Untersuchungen, über die soeben berichtet wurde. In der Abhandlung *De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur* (S. 129—171) findet sich die Herleitung der Integralformeln (I) und (II), und unmittelbar darauf folgt die Abhandlung *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera* (S. 172—192)[3]). Wohl nicht ohne Absicht hatte sich EULER mit dieser Abhandlung in Berlin eingeführt, die einen Höhepunkt in seinen mathematischen Leistungen bedeutet. Wie fruchtbar der Gedanke war, die Kreisfunktionen als Produkte darzustellen, bei denen die Nullstellen in Evidenz gesetzt werden, hat sich später bei den elliptischen Funktionen gezeigt, und die Frage nach einer solchen Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen hat die Mathematiker bis zum Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigt.

Wenden wir uns jetzt zurück zu EULERS Abhandlung in dem Journal

1) *Correspond.* II, S. 688—689.

2) Ebenda, S. 694.

3) EULERS *Opuscula analytica* t. II (Petersburg 1785), enthalten auf S. 257—274 eine Abhandlung *De seriebus potestatum reciprocis methodo nova ac facillima summandis*. Merkwürdigerweise ist diese neue Methode mit der alten vom Jahre 1742 durchaus identisch, so daß man annehmen muß, EULER habe bei der Abfassung der Abhandlung, die wahrscheinlich aus den letzten Jahren seines Lebens stammt, sich seiner früheren Untersuchungen nicht mehr erinnert.

littéraire vom Jahre 1743, so lassen sich für deren Abfassungszeit ziemlich enge Grenzen angeben. Da in ihr der T. VII der Petersburger Commentarii erwähnt wird, kann sie nicht vor 1740 geschrieben sein, und auf der anderen Seite zeigt der Briefwechsel zwischen EULER und NICOLAUS BERNOULLI, daß sie vor 1742 entstanden ist. Man wird demnach mit der Angabe 1740 bis 1741 das Richtige treffen. Die Bedeutung der *Démonstration* für die Geschichte der Summen S_{2r} läßt sich jetzt so kennzeichnen:

1) in ihr wurde die 1737 brieflich an JOHANN BERNOULLI mitgeteilte zweite Herleitung des Wertes der Summe der reziproken Quadrate zum ersten Male durch den Druck veröffentlicht. Diese Herleitung ist nicht nur, wie GAUSS sich ausdrückt, „recht artig", sondern genügt auch den Ansprüchen der modernen Strenge;

2) außerdem enthält die Abhandlung eine dritte bemerkenswerte Herleitung derselben Summe, die weder in Briefen an JOHANN BERNOULLI vorkommt noch sonst von EULER erwähnt worden ist;

3) bei dieser dritten Herleitung wird die Entwickelung der Funktion $(\arcsin x)^2$ in eine Potenzreihe, die EULER 1737 ohne Beweis an JOHANN BERNOULLI brieflich mitgeteilt hatte, vollständig durchgeführt. Sie ist darin im Abendlande zum ersten Male durch den Druck veröffentlicht, während bisher nur bekannt war, daß sie 1815 bei STAINVILLE auftritt.

Wenn zu Anfang bemerkt wurde, daß EULERS *Démonstration* unter den Mathematikern keine Beachtung gefunden habe, so gibt es doch vielleicht eine Ausnahme. In dem Werke: *The doctrine and application of fluxions*, das THOMAS SIMPSON im Jahre 1750 zu London erscheinen ließ, findet sich nämlich (S. 395) genau die Herleitung für die Summe der reziproken Quadratzahlen, die EULER dort angegeben hatte[1]), allerdings als Spezialfall einer Reihe für $\int H(a - bz^n)^m \times z^{qn-1}\, dz$, wo H selbst ein Integral von der Form $\int (k + lz)^r \times z^{vn-1}\, dz$ ist. Ob es sich dabei um ein zufälliges Zusammentreffen handelt oder ob SIMPSON EULERS Abhandlung gelesen hat, das wird sich wohl jetzt nicht mehr aufklären lassen.

8.

Es sei gestattet, den Bericht noch ein wenig weiter zu führen, da sich so ein gewisser Abschluß erreichen läßt.

Die zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen über die

1) Auf diesen merkwürdigen Umstand bin ich durch die Dissertation von MELDERCREUTZ aufmerksam geworden (S. 34—35), dem freilich die EULERsche *Démonstration* entgangen ist.

Kreisfunktionen in der *Introductio* (1748), auf die schon hingewiesen wurde, enthält in den Ergebnissen kaum etwas Neues. Nur eine Äußerung EULERS muß angeführt werden. Nachdem EULER aus der Produktdarstellung des Sinus eine Methode zur Bestimmung der Summen S_{2r} hergeleitet hat, gibt er (T. I, S. 131) die ausgerechneten Formeln bis zu $2r = 26$; nur wird jetzt

$$S_{2r} = \frac{2^{2r-2}}{(2r+1)!} C_{2r} \pi^{2r}$$

gesetzt, so daß $C_{2r} = 2A_{2r}$ ist. „Bis hierhin", sagt EULER, „hat man durch einen Kunstgriff, der an anderer Stelle erklärt werden wird, die Koeffizienten der Potenzen von π fortsetzen können. Ich habe diese Tabelle hier beigefügt, weil die beim ersten Anblick ganz regellose Reihe der Brüche $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}, \frac{35}{1}$ usw. bei vielen Gelegenheiten sehr nützlich ist."

Welches sind die vielen Gelegenheiten? Die EULERsche Summationsformel ist schon erwähnt worden. Dazu kommen die Summen

$$1 - \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} - \frac{1}{4^{2r}} + \ldots = \frac{2^{2r}-1}{(2r+1)!} A_{2r}\pi^{2r},$$

die EULER wohl schon 1736 gefunden hatte und die auch in der *Introductio* wiederkehren. Genügt das, um von „vielen Gelegenheiten" zu sprechen? Man wird so zu der Vermutung gedrängt, daß EULER damals noch andere Eigenschaften jener Koeffizienten gekannt habe. Etwas darüber veröffentlicht hat er allerdings erst 1755 in den *Institutiones calculi differentialis*, denn hier wird (Pars II, Cap. 5, § 124 und folgende) eine neue Herleitung der Summen S_{2r} gegeben, bei der sich der Zusammenhang der Koeffizienten A_{2r} mit den sogenannten BERNOULLIschen Zahlen B_{2r} herausstellt[1]). EULER geht aus von der aus (T) folgenden Identität

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} \cot g\, \pi u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - u^2}.$$

Werden auf der rechten Seite die Glieder nach steigenden Potenzen von u entwickelt, während links die von EULER bereits hergeleitete Potenzentwickelung eingesetzt wird, so entsteht die Formel:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^{r-1}}{(2r)!} B_{2r} u^{2r-2} = \sum_{r=1}^{\infty} S_{2r} u^{2r-2}.$$

1) Die Darstellung bei M. CANTOR, a. a. O. 3², S. 767 kann leicht zu Irrtümern Veranlassung geben. Wenn dieser sagt: „EULER nennt die Zahlen [B_{2r}] nach dem Namen ihres Erfinders, JAKOB BERNOULLI, die *Bernoullischen Zahlen*", so wird man dem ganzen Zusammenhange nach vermuten, das solle heißen, EULER habe an dieser Stelle der *Institutiones* den Namen *Bernoullischen Zahlen* zuerst eingeführt. EULER selbst schreibt jedoch: „numeri qui ab inventore JACOBO BERNOULLIO vocari solent BERNOULLIANI". In der Tat hatte schon A. DE MOIVRE in den *Miscellanea analytica*, London 1730 (Complementum S. 19, 20, 21) den Namen *Bernoullische Zahlen* eingeführt.

Da EULER die ersten 15 BERNOULLIschen Zahlen berechnet hatte[1]), so waren damit die Summen der reziproken Potenzen bis $2r = 30$ bekannt. Vielleicht ist dieses Verfahren der in der *Introductio* erwähnte „Kunstgriff“, vielleicht aber hat EULER damals auch an das Verfahren gedacht, das er in der Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes* entwickelt hatte; eine Verweisung auf diese Abhandlung war 1748 nicht möglich, da sie erst 1750 erschienen ist.

So hat EULER nicht nur zuerst die Summen der reziproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen bestimmt, sondern auch den Zusammenhang der dabei auftretenden Koeffizienten mit anderen wichtigen Formeln der Analysis nachgewiesen. Seine Untersuchungen über diesen Gegenstand gehören zu den schönsten und tiefsten, mit denen uns sein Genius beschenkt hat.

Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord.

Année 1743. Tome second. Première Partie.

(115) *Démonstration de la somme de cette Suite*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + etc.$$

La méthode que j'ai donnée dans les *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg,* pour trouver la somme de cette suite, lorsque l'exposant n est un nombre pair

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

a quelque chose d'extraordinaire, parcequ' elle est tirée d'un principe, dont on n'a pas encore fait beaucoup d'usage dans les recherches de cette nature. Elle est cependant aussi sûre et aussi fondée, que toute autre méthode, dont on se serve ordinairement, dans la sommation des Suites infinies: (116) ce que j'ai fait voir aussi par le parfait accord de quelques cas déjà connus d'ailleurs et par les approximations, qui nous fournissent une manière aisée d'examiner la vérité dans la pratique. Mais il semble aussi que cette méthode ait un très grand avantage, en ce qu'elle nous conduit en même tems à la connaissance d'une infinité d'autres Suites, dont les sommes ont été inconnües jusqu'à présent; pendant que les méthodes ordinaires ne nous découvrent presque rien sur ce genre de Suites. Plusieurs Géomètres ont honoré cette découverte de leur attention, en cherchant une démonstration du cas $n = 2$ auquel j'avois trouvé que la somme de cette suite

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

1) *Inst. Calc. diff.* Pars II, S. 420—421.

égaloit la sixième partie du quarré de la circonférence d'un cercle, dont le diamêtre est $= 1$. Ce cas leur sembloit d'abord d'autant plus remarquable que Feu Mr. Jacques Bernoulli, apres l'avoir cherché long tems en vain, l'avoit jugé d'une grande conséquence, pour perfectionner la Théorie des *séries infinies*.

Je communiquerai ici une méthode tout à fait différente de celle, par où j'y suis parvenu au commencement, (117) qui nous donnera par le moyen des intégrations la somme de la dite suite; mais qui ne peut être employé que dans ce seul cas; de sorte que la sommation des plus hautes puissances, selon toute apparence, ne peut etre achevée, que par ma première méthode générale. Cette méthode particulière, que je vais expliquer ici, pourra servir cependant tant pour confirmer d'avantage la générale, que pour faire voir la grande difficulté et presque l'impossibilité de traiter de la même manière les cas suivans, lorsque n est 4, ou 6 ou un autre nombre pair quelconq, si l'on voulait opérer selon les méthodes reçües dans la Theorie des suites.

Je considère un cercle, dont le rayon est $= 1$, duquel je prends un arc quelconq $= s$, dont le *sinus* soit $= x$: delà on aura par la nature du cercle $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ et $s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Si nous mettons à présent $x = 1$, l'arc s deviendra égal au quadrant du cercle, c'est à dire si nous exprimons la raison du diamêtre à la circonference par $1 : \pi$ l'arc s sera égal à $\frac{\pi}{2}$ au cas que $x = 1$. Il est clair que j'emploie la lettre π pour marquer le nombre de Ludolf a Keulen 3,14159265 etc. Soit maintenant proposée cette formule différen-(118)tielle $sds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ dont l'intégral sera $= \frac{ss}{2}$, et si l'on fait après l'intégration $x = 1$, l'intégral sera $= \frac{\pi\pi}{8}$. Cherchons à présent par la méthode ordinaire l'intégral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ et convertissons l'intégral $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ selon les règles connües dans une série infinie, et nous aurons:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = x + \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1.3}{2.4.5} x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} x^9 + \text{etc.}$$

Cette suite substituée à la place de $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ donnera

$$sds = \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1}{2.3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3}{2.4.5} \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} \frac{x^9 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \text{etc.}$$

De cette suite chaque terme est absolument intégrable; car l'intégral du premier terme est $1-\sqrt{(1-xx)}$ pris de cette façon, qu'il s'évanouisse en mettant $x=0$, ainsi que demande la (119) nature de la question par laquelle l'intégral de sds doit s'évanouir en faisant $x=0$. Le premier terme étant intégrable, tous les suivants le seront aussi, parceque l'intégration de chaque terme se réduit a l'intégration du précédent. On verra cela clairement, si l'on fait réflexion, qu'il y a généralement

$$\int\frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{n+1}{n+2}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{(1-xx)}.$$

Mais comme nous cherchons seulement l'intégral de sds au cas $x=1$, faisons dans le membre $-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{(1-xx)}$ qui est algébrique $x=1$, et nous aurons pour ce cas $x=1$ cette réduction générale

$$\int\frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{n+1}{n+2}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Delà nous tirerons les intégrals de tous les termes de notre suite pour le cas $x=1$, comme l'on verra dans cette table:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=1-\sqrt{(1-xx)}=1\ \text{(faisant } x=1)$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2}{3},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{4}{5}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2.4}{3.5},$$

(120) $$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{6}{7}\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2.4.6}{3.5.7},$$

$$\int\frac{x^9\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{8}{9}\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$$

et ainsi de suite.

Mais par la *série* donnée pour sds, nous avons l'intégration achevée,

$$\frac{ss}{2}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}+\frac{1}{2.3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-xx)}}+\frac{1.3}{2.4.5}\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-xx)}}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-xx)}}+\text{etc.}$$

$=\frac{\pi\pi}{8}$ après avoir fait $x=1$, auquel cas devient $s=\frac{\pi}{2}$, comme nous l'avons vû. Nous n'avons dont qu'à multiplier chaque intégral par son coefficient numérique, pour trouver cette *série*

$$\frac{\pi\pi}{8}=1+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.5}+\frac{1}{7.7}+\frac{1}{9.9}+\text{etc.}$$

qui ne contient dans les dénominateurs que les quarrés des nombres impairs, les numérateurs demeurant par tout égaux à l'unité. La somme de ces fractions à l'infini sera par conséquence égale à $\frac{\pi\pi}{8}$, qui est la même, que j'ai trouvée par ma méthode générale pour cette suite. Delà nous tirerons à présent aisément la somme de celle-ci

(121) $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

de laquelle si l'on ôte son quart, qui est

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$$

tous les quarrés pairs s'en iront, et on aura celle-ci

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

qui contient par conséquent les trois quarts de l'autre

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

de sorte que nous avons pour la sommation de celle-ci

$$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

ainsi que j'avois trouvé par l'autre méthode générale expliquée dans les *Commentaires de l'Académie imp. de Pétersbourg au Tome VII.*

Comme nous sommes parvenu par le moïen de ce calcul à la suite des quarrés impairs

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

de laquelle nous avons tiré d'abord par une juste conséquence la suite de tous les quarrés

(122) $$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \text{etc.},$$

je puis aussi par un calcul un peu différent immediatément trouver la somme celle-ci, dont celle-là comprendra trois quarts. Pour parvenir à ce but, je cherche une autre *série* commode qui m'exprimera l'intégral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ généralement pour toute valeur possible du sinus x. En cette vüe je pose $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ dont j'obtiens cette équation

$$dy\sqrt{(1-xx)} = dx\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

qui différentiée en mettant dx constant, donnera

$$ddx\,(1-xx) - xdxdy = dx^2.$$

Cette équation, quoique différentielle du second degré, est très commòde pour exprimer la valeur de y par une *série*, qui procède selon les puissances d'x. Pour trouver cette *série* supposons connu d'ordinaire

$$y = \alpha xx + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \varepsilon x^{10} + \text{etc.}$$

où nous commençons d'abord par le quarré d'x, parceque nous voïons de l'équation $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ que mettant x infiniment (123) petit, dy devient égal à xdx et par conséquent $y = xx$. Ensuite nous faisons croitre par tant les exposans d'x de deux, parceque dans l'équation *différentio-différentielle*

$$ddy\,(1-xx) - xdxdy = dx^2$$

les x et dx remplissent par tout deux dimensions. De cette équation supposée nous tirons

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + 8\delta x^7 + \text{etc.}$$

et en différentiant la seconde fois posant dx constant

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\alpha + 3\,.\,4\beta x^2 + 5\,.\,6\gamma x^4 + 7\,.\,8\delta x^6 + \text{etc.}$$

Mais en divisant l'équation différentio-différentielle par dx^2, nous avons

$$\frac{ddy}{dx^2} - \frac{xxddy}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} - 1 = 0$$

qui substituant pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{ddy}{dx^2}$ les valeurs trouvées donne

$$\left.\begin{array}{l} +\,2\alpha + 3.4\beta x^2 + 5\,.\,6\gamma x^4 + 7\,.\,8\delta x^6 + \text{etc.} \\ \quad -\,2\alpha x^2 \;-\,3\,.\,4\beta x^4 - 5\,.\,6\gamma x^6 - \text{etc.} \\ \quad -\,2\alpha x^2 \;-\,4\beta x^4 \quad -\,6\gamma x^6 - \text{etc.} \end{array}\right\} = 1$$

(124)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{2.2.\alpha}{3.4} = \frac{2.2}{2.3.4} \\ \gamma &= \frac{4.4.\beta}{5.6} = \frac{2.2.4.4}{2.3.4.5.6} \\ \delta &= \frac{6.6.\gamma}{7.8} = \frac{2.2.4.4.6.6}{2.3.4.5.6.7.8} \\ \varepsilon &= \frac{8.8.\delta}{9.10} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Aïant trouvé ces nombres, on aura

$$y = \frac{ss}{2} = \frac{xx}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{8} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}$$

A présent cherchous par le moïen de cette suite en la multipliant par $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ l'intégral de $\frac{ssds}{2}$ qui sera

$$\frac{s^3}{6} = \frac{1}{2}\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2}{3.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2.4}{3.5.8}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2.4.6}{3.5.7.8}\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \text{etc.}$$

et prenons ces intégrals seulement dans le cas $x = 1$ auquel nous aurons

$$s = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{s^3}{6} = \frac{\pi^3}{48}.$$

Mais tous ces intégrals se réduisent par la réduction générale donnée à celle-ci (125) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ qui dans le cas $x = 1$ devient $= \frac{\pi}{2}$ et par conséquent les autres seront

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{3}{3}\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{5}{6}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\pi}{2}$$

etc.

Multiplions chaque intégral par son coefficient qui lui convient dans la *série* égale à $\frac{s^3}{6}$ ou dans notre cas à $\frac{\pi^3}{48}$ et nous aurons

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{2.2}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4.4}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6.6}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8.8}\,\frac{\pi}{2} + \text{etc.}$$

Divisons de part et d'autre par $\frac{\pi}{2}$ et multiplions par 4 ce qui donnera

$$\frac{\pi^3}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

de sorte que nous sommes parvenus à la somme de cette suite sans avoir eu besoin de la conclure de l'autre

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

(126.) Ces deux méthodes toutes faciles qu'elles sont, mériteroient une plus grande attention, si elles se pouvoient employer également pour trouver les sommes des plus hautes puissances paires, qui sont toutes comprises dans mon autre méthode générale tirée de la considération des racines d'une équation infinie. Mais malgré toute la peine que je me suis donnée pour trouver seulement la somme des biquarrés

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}$$

je n'ai pas encore pu réussir dans cette recherche, quoique la somme par l'autre méthode me soit connue laquelle est $= \frac{\pi^4}{90}$. Par faciliter la peine, que d'autres peut-être se donneront, dans cette affaire, j'y joindrai les sommes de toutes les puissances paires, que j'ai trouvées par l'autre méthode:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{2}{1.2.3}\,\frac{1}{2}\,\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{2^3}{1.2.3.4.5}\,\frac{1}{6}\,\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{2^5}{1.2.3\ldots7}\,\frac{1}{6}\,\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{2^7}{1.2.3\ldots9}\,\frac{3}{10}\,\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = \frac{2^9}{1.2.3\ldots11}\,\frac{5}{6}\,\pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{etc.} = \frac{2^{11}}{1.2.3\ldots13}\,\frac{691}{210}\,\pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \text{etc.} = \frac{2^{13}}{1.2.3\ldots15}\,\frac{35}{2}\,\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \text{etc.} = \frac{2^{15}}{1.2.3\ldots17}\,\frac{3617}{30}\,\pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \text{etc.} = \frac{2^{17}}{1.2.3\ldots19}\,\frac{43867}{42}\,\pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \text{etc.} = \frac{2^{19}}{1.2.3\ldots21}\,\frac{1222277}{110}\,\pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \text{etc.} = \frac{2^{21}}{1.2.3\ldots23}\,\frac{854513}{6}\,\pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \text{etc.} = \frac{2^{23}}{1.2.3\ldots25}\,\frac{1181820455}{546}\,\pi^{24}$$

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \text{etc.} = \frac{2^{25}}{1.2.3\ldots27}\,\frac{76977927}{2}\,\pi^{26}.$$

La loi que ces expressions tiennent, est en partie si connüe qu'elle n'a pas besoin d'explication. La seule difficulté qui se trouve, est dans les fractions, qui sont représentées en des caractères différens

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{691}{210} \quad \frac{35}{2} \quad \text{etc.}$$

(127) mais j'ai déjà donné deux méthodes différentes pour trouver ces fractions encore plus loin.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1³ : 12. Siehe die Bemerkung zu **1**² : 12 (BM 1_3, 1900, S. 265).

1³ : 15. Vgl. die Bemerkung zu **1**² : 15 (BM 3_3, 1902, S. 323).

1³ : 22. Mit einigem Staunen findet man, daß Herr Cantor als Beleg der Bemerkung: „Bis zur Million scheint die Zahlenschreibung der Keilschrift sich nicht erstreckt zu haben; zum mindesten sind keine Beispiele davon bekannt" nur eine im Jahre *1868*, also vor beinahe *vierzig* Jahren erschienene Arbeit anführt. Viel besser wäre es wohl gewesen, die ganze Bemerkung sowie etwa $^3/_4$ der Seite 23 zu streichen, wenn Herr Cantor keine wesentlich jüngere Quelle als Beleg zitieren konnte.

Nach den Untersuchungen von H. V. Hilprecht spielt die Zahl $60^4 =$ 12,960,000 in der babylonischen Arithmetik eine besonders hervorragende Rolle, und Hilprecht hat eine Tafel aufgefunden, wo gewiße Quotienten der Zahl 195,955,500,000,000 angegeben werden (siehe D. E. Smith, Bulletin of the American mathematical society **13**₂, 1907, S. 396). G. Eneström.

1³ : 51. Es ist mir unbekannt, aus welchem Grunde Herr Cantor die Bemerkung von Paul Tannery in der BM 1_3, S. 266 unberücksichtigt gelassen hat. Tannery hebt hervor, daß Perigenes sicherlich eine unrichtige Lesart statt Epigenes ist, der wahrscheinlich im 2. vorchristlichen Jahrhundert lebte, also zu einer Zeit, wo chaldäische Mathematik schon lediglich Astrologie bedeutete. Ferner bemerkt Tannery, daß Zeller gar nicht sagt, das Werk des Jamblichos von Chalcis enthalte auch Mathematisches. Unter solchen Umständen dürfte die Angabe: „Es muß wohl die Mathematik dort [= bei den Babyloniern] eine erzählenswerte Geschichte erlebt haben, wenn wir auch nur daraus schließen, daß sie alten Schriftstellern würdig däuchte, sich mit ihr zu beschäftigen" am besten gestrichen werden sollen. G. Eneström.

---

1) Dritte Auflage des 1 Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

$1^3:58$. Siehe die Bemerkung zu $1^2:22$ (BM 1_3, 1900, S. 265).

$1^3:66$. Hier wäre ein Hinweis auf $1^3:504$ angebracht; siehe die Bemerkung zu $1^2:29$ (BM 1_3, 1900, S. 266).

$1^3:71$. Siehe die Bemerkung zu $1^2:34$ (BM 1_3, 1900, S. 266).

$1^3:106$. Vgl. die Bemerkung zu $1^2:64$ (BM 3_3, 1902, S. 137).

$1^3:146$. Siehe die Bemerkung zu $1^2:135$ (BM 1_3, 1900, S. 266).

$1^3:152$. Über den Ursprung des Satzes vom Hypotenusenquadrat kommen bis zur Zeit von Proklus 10 Zeugnisse in Betracht, die ich zusammengestellt und besprochen habe in § 8 meiner Abhandlung: *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* in der Festschrift: Novae Symbolae Joachimicae (Halle 1907). Cantor nennt nur 4 Zeugnisse und sagt, diese lauten bestimmt. Ich finde, diese 4 lauten nicht alle bestimmt und die 6 übrigen auch nicht alle. Cicero bezweifelt das Opfer entschieden, auch Porphyrius macht eine zweifelnde Bemerkung, Plutarch bezieht das Opfer auf einen anderen Satz und ebenso Diogenes I 25. Apollodors Verse, die von Plutarch, Athenäus und Diogenes zitiert werden, sagen nur, Pythagoras habe wegen einer geometrischen Figur ein Opfer gebracht. Athenäus und Diogenes fügen allerdings im Text hinzu, Apollodor erzähle von dem Opfer anläßlich des Satzes vom Hypotenusenquadrat. Bei Plutarch steht dies nicht. Da Plutarch und Diogenes das Opfer auch auf andere Sätze beziehen, so haben wahrscheinlich alle drei Schriftsteller nur Apollodors Verse vor sich gehabt, und die beiden späteren unter ihnen haben in ihrem Text ihre eigene Vermutung mit der Aussage Apollodors vermengt.

Das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 3, 4, 5 wird bis zur Zeit von Proklus nur von Vitruv als Erfindung von Pythagoras bezeichnet.

G. Junge.

$1^3:153$. Selbst wenn man annimmt, daß Pythagoras die Theorie des Irrationalen gefunden hat — ich habe in der soeben zitierten Abhandlung eine Reihe von Bedenken dagegen vorgebracht — so folgt daraus doch nicht, daß Pythagoras den Satz vom Hypotenusenquadrat kannte. Wahrscheinlich ist das Irrationale am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck entdeckt worden oder, was dasselbe ist, an der Diagonale des Quadrats. Man kann aber sehr wohl wissen, daß das Quadrat über der Diagonale die doppelte Fläche hat wie das Quadrat selbst, ohne darum den allgemeinen Satz vom Hypotenusenquadrat zu kennen!

Anm. [5]). Über die letzten Pythagoreer s. Zeller, *Philosophie der Griechen* I^5 (1892), S. 339.

G. Junge.

$1^3:155$. Die Arithmetik, die Theon von Smyrna lehrt, ist vielfach nicht die altpythagoreische, wie Cantor annimmt, auch nicht die platonische, wie man nach dem Titel von Theons Werk glauben sollte, sondern neupythagoreisch. Theon behandelt, was Cantor nicht erwähnt, S. 25 und 26 die gerade-ungeraden und die ungerade-geraden Zahlen, deren Unterscheidung erst nacheuklidisch ist. Er gibt dem Worte „heteromek“ einen Sinn, der ebenfalls erst

nach-euklidisch ist. Auch seine Definition der vollkommenen Zahl ist vor Euklid nicht nachweisbar, und nur in diesem Falle scheint Theon zu ahnen, daß seine Definition nicht die altpythagoreische ist. Vgl. unten die Bemerkungen zu 1^3: 159, 160, 168. G. Junge.

1^3: 157. Das Wort λογιστικός in der Bedeutung „Rechner" kommt bei Plato noch im *Theätet* 145 A vor, λογιστική in der Bedeutung „Rechenkunst" sehr oft; s. Ast, *Lexicon Platonicum*.

Anm. [4]). Über die pythagoreische Zahlenlehre spricht Zeller a. a. O. hauptsächlich S. 343—448. G. Junge.

1^3: 158. Nach der eigenen Ansicht des Aristoteles ist die Eins ἀρχή der Zahlen, s. Metaph. X 1, 1052 b 23; V 15, 1021 a 12. (Der Index von Bonitz gibt unter εἷς zahlreiche Nachweise über Stellen verwandten Inhalts.) Die Eins ist nicht selbst Zahl, sondern sie ist das Maß, mit dem die Zahlen gemessen werden; s. Metaph. XIV 1, z. B. 1088 a 6: *διὸ καὶ εὐλόγως οὐκ ἔστι τὸ ἓν ἀριθμός· οὐδὲ γὰρ τὸ μέτρον μέτρα, ἀλλ' ἀρχὴ καὶ τὸ μέτρον καὶ τὸ ἕν.*

Diese Lehren waren vielleicht pythagoreischen Ursprungs, aber jedenfalls von den Griechen allgemein akzeptiert. Sie sind auch in Euklids Elementen VII Def. 1, 2 zu erkennen.

Dagegen war es eine spezifisch pythagoreische Lehre, daß die Eins und die Zahlen Element und Prinzip der Dinge seien; s. Zeller, a. a. O. S. 343—350. Nur hiervon ist an der von Cantor zitierten Stelle, Metaph. XIII 8, die Rede, nämlich 1083 b 8—19.

Die von Cantor angeführte Stelle aus Theon ist vielleicht unecht, da sie den Zusammenhang völlig unterbricht. Hiller bemerkt zu dem ganzen Satze „fort. del.". In demselben Satze wird übrigens gesagt, auch die unbestimmte Zweiheit sei keine Zahl. G. Junge.

1^3: 159. Das Philolaus-Fragment in Anm. [1]) heißt vollständig: *ὅ γα μὰν ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ἴδια εἴδεα, περισσὸν καὶ ἄρτιον, τρίτον δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων μιχθέντων ἀρτιοπέρισσον. ἑκατέρω δὲ τῶ εἴδεος πολλαὶ μορφαί.* Unter dem *ἄρτιον* sind also wahrscheinlich nur die Potenzen von 2 zu verstehen, die anderen geraden Zahlen sind für Philolaus das *ἀρτιοπέρισσον;* s. Zeller, a. a. O. S. 350 Anm. 2 und besonders Tannery, Bullet. d. sc. mathém. 8_2 (1884), S. 293. Tannery gibt eine Übersicht über den Bedeutungswandel von *ἀρτιοπέρισσος* und verwandten Ausdrücken.

Zu den Potenzen von 2, den *ἀφ' ἑνὸς διπλασιαζόμενοι*, wie Aristoteles Metaph. XIII 8, 1084 a 6 sagt (Euklid IX 32 sagt vorsichtiger *ἀπὸ δυάδος διπλ.*), gehört in gewissem Sinne auch die Eins, d. h. die Eins gehörte für Philolaus zum *ἄρτιον*. Daher wohl die auf den ersten Blick verwunderliche Bemerkung von Aristoteles Metaph. I 5, 986 a 20, die Eins sei für die Pythagoreer sowohl gerade wie ungerade.

Jedenfalls war die pythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden nicht so einfach wie es nach Cantors Darstellung scheint. G. Junge.

1^3: 160. Cantor beachtet nicht, daß das Wort „heteromek" die Bedeutung gewechselt hat. Bei Plato (*Theätet* 147. 148) und Aristoteles (Anal.

post. I 4, 73 b 1 und in der Kategorientafel I 5, 986 a 26) heißen alle Nichtquadratzahlen „heteromek", bei Nikomachus und Theon dagegen allerdings die Zahlen von der Form $n(n+1)$. Vgl. Tannery, Ann. de la fac. des lettres des Bordeaux 6 (1884), S. 99; Bullet. des sc. mathém. 8_2 (1884), S. 297, und meine oben bei $1^3:152$ genannte Abhandlung § 6.
G. Junge.

$1^3:160$. Ich sehe keinen Anlaß, bei dem 3. Gegensatz der Kategorientafel, *ἓν καὶ πλῆθος*, an Prim- und zusammengesetzte Zahlen zu denken. Aristoteles spricht über diesen Gegensatz Metaph. X 3, 1054 a 20 und IV 2, 1004 a 10, aber von Prim- und zusammengesetzten Zahlen ist nirgends die Rede. Vielmehr ist offenbar der Gegensatz zwischen der Eins und den anderen Zahlen gemeint; s. oben die Bemerkung zu $1^3:158$. G. Junge.

$1^3:162$. Die Pythagoreer haben die Quadrat- und Gnomonzahlen wohl nicht durch aneinander gelegte Quadrate dargestellt, sondern durch nebeneinander gesetzte Punkte oder Steinchen, etwa wie Hankel, *Gesch. der Mathem.* S. 104 angibt; s. die Figur. Die übrigen Vieleckszahlen nämlich außer den Quadratzahlen lassen sich überhaupt nicht anders als durch einzelne Punkte darstellen. Daß aber außer den Quadratzahlen wenigstens noch die Dreieckszahlen altpythagoreisch waren, schließe ich zwar nicht mit Cantor S. 159 aus ihrem Vorkommen bei Theon, aber ich halte es für wahrscheinlich, da Aristoteles die Dreieckszahlen erwähnt. Die Stelle ist gleichzeitig ein Beleg für das Steinchenlegen der Pythagoreer; es wird erzählt, wie ein pythagoreischer „Philosoph" Eurytus durch Steinchenlegen das Wesen der Dinge erforschen wollte. Metaph. XIV 5, 1092 b 10: . . . *καὶ ὡς Εὔρυτος ἔταττε τίς ἀριθμὸς τίνος, οἷον ὁδὶ μὲν ἀνθρώπου, ὁδὶ δε ἵππου, ὥσπερ οἱ τοὺς ἀριθμοὺς ἄγοντες εἰς τὰ σχήματα τρίγωνον καὶ τετράγωνον, οὕτως ἀφομοιῶν ταῖς ψήφοις τὰς μορφὰς τούτων* (das letzte Wort nach dem Vorschlag von Zeller, a. a. O. S. 395 Anm. 3).



G. Junge.

$1^3:163—165$. Die Timäus-Stelle enthält den Begriff des Irrationalen gar nicht. Es ist von geometrischen Mitteln die Rede. Wenn das geometrische Mittel zweier Zahlen *irrational wird*, wie wir sagen würden, so existiert es für Plato überhaupt nicht. Vgl. meine oben bei $1^3:152$ genannte Abhandlung und Cantor $1^3:912$. G. Junge.

$1^3:166$. Vgl. die Bemerkung zu $1^2:155$ (BM 3_3, 1902, S. 138).

$1^3:168$. Aristoteles (Metaph. I 5, 986 a 8) sagt ganz ausdrücklich, daß für die Pythagoreer 10 eine vollkommene Zahl sei. Theon erwähnt übrigens S. 46, daß die Zahl 10 von den Pythagoreern und daß auch die Zahl 3 vollkommen genannt wird, obgleich sie nach seiner, mit Euklid VII Def. 22 übereinstimmenden, Definition nicht vollkommen sind. Euklids und Theons Definition ist vor Euklid nicht nachweisbar. G. Junge.

$1^3:176$. Über den Bericht, Pythagoras habe von den Galliern gelernt, s. Zeller, a. a. O. S. 302. Zeller hält diesen Bericht für eine Erfindung und dadurch entstanden, daß Pythagoreer und Gallier den Seelenwanderungsglauben gemeinsam hatten. G. Junge.

1^3 : 180. Siehe die Bemerkung zu 1^3 : 152 (oben S. 62).

1^3: 181. Vgl. die Bemerkung zu 1^2: 169 (BM 3_3, 1902, S. 188).

1^3 : 182. ARISTOTELES sagt an *zwei* Stellen, die Diagonale eines Quadrats sei inkommensurabel mit der Seite, weil sonst Gerades und Ungerades gleich sein müßte. Die Stellen sind Anal. pr. I 23, 41 a 26; I 44, 50 a 37.

Dieser Satz, der EUKLID X 117 zu stehen pflegt, ist hier nach HEIBERG interpoliert; s. *Euclidis Elementa* ed. HEIBERG V p. LXXXIV. Die Tatsache, daß der Beweis sehr alt ist, jedenfalls schon ARISTOTELES bekannt war, wird durch diese Feststellung natürlich nicht beeinflußt. G. JUNGE.

1^3 : 183. Siehe die Bemerkung zu 1^3 : 160 (oben S. 63—64).

1^3 : 203. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 190—191 (BM 7_3, 1906/7, S. 378).

1^3 : 213. Anm. 4). Daß THEODOR mathematischer Lehrer PLATOS war, steht bei DIOGENES an zwei Stellen, nämlich außer II 103 noch III 6.

G. JUNGE.

1^3: 225. ALLMAN (*Greek Geometry*, 1889, S. 126) hat schon vor langer Zeit darauf aufmerksam gemacht, daß CANTOR die Stelle der „Gesetze" 819, 820 (die pagina bei CANTOR ist falsch) mit Unrecht auf die Stereometrie deutet. Die Stelle geht vielmehr auf das Irrationale. Die geringe Pflege der Stereometrie beklagt PLATO im „Staat" VII 528.

Zu den „Gesetzen" 819, 820 s. übrigens RITTER, Komm. zu PLATOS Ges. (Leipzig 1896), S. 221f., wo mit guten Gründen die Meinung vertreten wird, daß PLATO hier über die gegenseitige Meßbarkeit von Längen-, Flächen- und Raumgrößen spricht. G. JUNGE.

1^3 : 236. Siehe die Bemerkung zu 1^3 : 160 (oben S. 63—64).

1^3: 245. Herr CANTOR erwähnt drei Stellen aus PAPPOS, und schließt aus denselben, daß ARISTAIOS teils eine Arbeit über Kegelschnitte in fünf Büchern, teils fünf Bücher körperlicher Örter verfaßt hat. Aber die zweite Stelle ist nach HULTSCH unecht, und diese Ansicht dürfte jetzt unter den Sachkundigen ziemlich allgemein angenommen sein (siehe z. B. J. L. HEIBERG, *Literargeschichtliche Studien über Euklid*, Leipzig 1882, S. 85). Auch die erste Stelle ist nach HULTSCH eine Interpolation, und wenn sie wirklich beide echt wären, könnten sie sich sicherlich auf dieselbe Arbeit als die dritte Stelle, d. h. auf die fünf Bücher der körperlichen Örter beziehen. Daß ARISTAIOS ein Zeitgenosse des EUKLIDES war, hat HEIBERG (a. a. O. S. 85) aus der zweiten Stelle gefolgert, aber wenn diese Stelle unecht ist, so dürfte darauf kein besonderes Gewicht gelegt werden können.

Dass ARISTAIOS der Ältere die „Vergleichung der fünf regelmäßigen Körper" verfaßt hat, steht nicht bei HYPSIKLES (vgl. P. TANNERY, *La géométrie grecque* I, Paris 1887, S. 154), so daß der Verfasser dieser Schrift ebensogut der sonst durchaus unbekannte ARISTAIOS der Jüngere sein könnte.

G. ENESTRÖM.

1^3: 270. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 255 (BM 3_3, 1902, S. 238).

1^3: 287. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 272 (BM 4_3, 1903, S. 396) und BM 6_3, 1905, S. 322.

1^3: 297. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 283 (BM 1_3, 1900, S. 499) sowie BM 7_3 (1906/7), S. 328.

1^3: 298. Hinsichtlich der Definition: „Die Gerade ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte" sagt Herr Cantor, daß sie häufig als archimedisch genannt wird, und daß allerdings der darin enthaltene Satz bei Archimedes vorkommt, daß aber Archimedes keineswegs beabsichtigte, durch diesen Satz die Gerade zu erklären. Um seine Behauptung zu begründen, verweist Herr Cantor auf die bekannte Stelle des ersten Buches über Kugel und Zylinder. Auf der anderen Seite behauptete schon Proklos an einer ebensosehr bekannten Stelle seines Kommentars zum ersten Buche der Elemente, daß Archimedes die Gerade als die kürzeste Entfernung zweier Punkte *definiert* hat (*ὁ δ' αὖ Ἀρχιμήδης τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο γραμμὴν ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν*) und Simplikios sagt nach der Übersetzung des Gherardo Cremonese ebenfalls ausdrücklich, daß Archimedes „diffinivit eam [= lineam rectam] dicens: linea recta est brevior lineis, quarum extremitates sunt eedem" (*Anaritii In decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*, ed. M. Curtze, Leipzig 1899, S. 6). Bevor *alle* Schriften des Archimedes bekannt sind, dürfte es also ratsam sein, nicht bestimmt zu verneinen, daß Archimedes wirklich die Gerade auf die fragliche Weise *definiert* hat. Die Definition könnte z. B. sehr wohl in der verlorenen Schrift über Parallellinien gestanden haben.

G. Eneström.

1^3: 310. Da Herr Cantor im Vorübergehen den Inhalt des 8. Satzes des Buches von den Konoiden und Sphäroiden berührt, wäre es von besonderem Interesse zu erwähnen, daß, wie Zeuthen ausdrücklich hervorgehoben hat, der Kegel, dessen Konstruktion dort gelehrt wird, im allgemeinen ein schiefstehender Kegel wird. Archimedes hat also gezeigt, daß zu jeder Ellipse ein schiefstehender Kegel gefunden werden kann, auf dessen Mantel sie sich befindet. Aber ist es dann möglich, daß ein so hervorragender Mathematiker wie Archimedes nicht sofort sehen würde, daß Ellipsen auf jedem schiefstehenden Kegel herausgeschnitten werden können? Freilich scheint Herr Cantor weiter unten (S. 335, Z. 7—8) bestimmt zu behaupten, daß dieser Umstand dem Archimedes nicht bekannt war, aber mit einer solchen Geringschätzung der Scharfsinnigkeit eines der größten Mathematikers des Altertums dürften nur wenige mathematisch-historische Forscher einverstanden sein. Meint Herr Cantor indessen mit seiner soeben zitierten Bemerkung nur, daß die fragliche Kenntnis des Archimedes nicht direkt belegt ist, so hat er natürlich recht, aber jedenfalls wäre es von Interesse zu bemerken, daß sich Archimedes tatsächlich mit Ellipsen auf *schiefstehenden* Kegeln beschäftigt hat.

G. Eneström.

1^3: 351. Vgl. die Bemerkung zu 1^2: 335 (BM 6_3, 1905, S. 305).

1^3: 380. Da Herr Cantor weiter unten (S. 405) durch gesperrte Schrift hervorhebt, daß eine unreine quadratische Gleichung in einer Pseudo-Heronschen Schrift rechnerisch gelöst wird, wäre es ganz besonders angebracht zu erwähnen,

daß sich im 3. Buche (Satz 4) der echten HERONschen *Metrika* eine solche Lösung findet. In dem fraglichen Satze (S. 148—151 der Ausgabe von H. SCHÖNE) handelt es sich um die Berechnung einer Länge x, die so beschaffen ist, daß

$$x(14-x)=\frac{6720}{144},$$

und nach dem von H. SCHÖNE herausgegebenen Texte gibt HERON als Annäherungswert der gesuchten Größe 8 an, aber ohne Zweifel ist der Text hier verstümmelt, denn für $14-x$ wird $5\frac{1}{2}$ als Annäherungswert angegeben, so daß sicherlich $8\frac{1}{2}$ statt 8 zu lesen ist (vgl. H. SUTER, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 103). Wie HERON die Wurzel berechnet hat, deutet er gar nicht an. Aus der Gleichung folgt, daß

$$x=7+\sqrt{2\tfrac{1}{3}}=7+\sqrt{\tfrac{21}{9}}=7+\tfrac{\sqrt{21}}{3},$$

und nach der von HERON im ersten Buche der *Metrika* angewendeten Methode zur Ausziehung von Quadratwurzeln ist

$$\sqrt{21}=5-\tfrac{4}{10},$$

so daß $$x=7+\tfrac{\sqrt{21}}{3}=7+\tfrac{5-\frac{4}{10}}{3}=8\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{30}.$$

Der Annäherungswert $8\frac{1}{2}$ ist also ziemlich gut. G. ENESTRÖM.

1^3:429. Siehe die Bemerkung zu 1^2:400 (BM 1_3, 1900, S. 267).

1^3:431. Siehe die Bemerkung zu 1^2:402 (BM 7_3, 1906/7, S. 379).

1^3:432. In betreff der verloren gegangenen geometrischen Arbeit des NIKOMACHOS sagt P. RAMUS (*Scholarum mathematicarum libri unus et triginta*, Basileae 1569, S. 37): „NICOMACHUS . . . geometriam . . . scripserat . . . Geometriam aiunt esse Venetiis apud DIEGUM HURTADUM". Ob diese Spur weiter verfolgt worden ist, weiß ich nicht; jedenfalls ist es mir nicht gelungen, bei den mathematisch-historischen Verfassern, die sich eingehender mit NIKOMACHOS beschäftigt haben (z. B. NESSELMANN, LORIA, TANNERY), eine Erwähnung der RAMUSschen Notiz aufzufinden. G. ENESTRÖM.

1^3:488. Vgl. die Bemerkung zu 1^2:457 (BM 3_3, 1902, S. 238).

1^3:500. Vgl. die Bemerkung zu 1^2:466 (BM 4_3, 1903, S. 397).

1^3:500. Siehe die Bemerkung zu 1^2:467 (BM 1_3, 1900, S. 267).

1^3:502. Siehe die Bemerkung zu 1^2:468 (BM 7_3, 1906/7, S. 203) sowie die „Ergänzungen und Verbesserungen" des Herrn CANTOR (S. 912).

1^3:509. Siehe die Bemerkung zu 1^2:475 (BM 3_3, 1902, S. 139).

1^3:510. Da Herr CANTOR jetzt anerkennt, daß MAXIMUS PLANUDES etwas früher gelebt hat, als in der 2. Auflage der *Vorlesungen* angegeben wurde, hätte wohl der Bericht über diesen Mathematiker versetzt werden sollen, um die chronologische Ordnungsfolge zu beobachten.

1^3: 513. Auch der Absatz über Rhabdas sollte auf Grund der Verbesserungen der chronologischen Angaben versetzt werden, und zwar *nach* dem Stück über Moschopulos.

1^3: 515. Siehe die Bemerkungen zu 1^2: 480—481 (BM 7_3, 1906/7, S. 80—81).

1^3: 528. Da Herr Cantor (siehe Seite 587) nicht mehr festhält, daß die sogenannte *Geometria Boëtii* echt ist, sondern zugibt, daß man die Abfassung derselben in das 11. Jahrhundert versetzen muß, so ist seine Bemerkung, daß für das komplementäre Divisionsverfahren ein anderer Ursprung als ein römischer zunächst nicht zu Gebote steht, jetzt fast unverständlich. Tatsächlich tritt das komplementäre Divisionsverfahren erst im 10. Jahrhundert auf, und die Annahme, daß das Verfahren älteren Ursprungs sei, ist lediglich eine unbelegte Mutmaßung, auch wenn man damit einverstanden ist (siehe S. 588), daß der Verfasser der *Geometria Boëtii* wesentlich feldmesserische Quellen benutzt hat.

G. Eneström.

1^3: 545. Es ist mir nicht recht verständlich, warum Herr Cantor dem Auffinder (E. Hoppe) des vermeintlichen Nachweises der Abhängigkeit des Vitruvius von Heron schuldig (siehe Z. 8) war, seine Schlußfolgerungen (mehr als zwei Druckseiten) im Wortlaute zu wiederholen, auch wenn man voraussetzen wollte, daß diese Schlußfolgerungen richtig und beweiskräftig gewesen wären; solche lange wörtliche Wiederholungen dürften sonst in den *Vorlesungen* kaum oder wenigstens nur äußerst selten vorkommen. Indessen ist diese Frage natürlich von geringem Belang, viel wichtiger ist dagegen, daß die erste Hälfte der Hoppeschen Ausführungen, so viel ich sehen kann, eine Mystifikation enthält, deren Opfer Herr Cantor durch einen wunderbaren Zufall geworden ist. Um zu erklären, was ich meine, bringe ich hier unten die fragliche Heron-Stelle zum Abdruck, teils nach der Nixschen Übersetzung, teils nach dem Hoppeschen Zitate. Die kursiv gedruckten Worte bei Nix entsprechen den Punkten bei Hoppe.

Nix.

Nehmen wir zuerst an, er [der Hebel] sei dem Erdboden parallel. Der Hebel sei die Linie $\alpha\beta$, und die durch ihn zu bewegende Last, nämlich γ, bei dem Punkte α, die bewegende Kraft bei dem Punkte β, *der Stein unter dem Hebel, auf dem sich derselbe bewegt, bei dem Punkte δ und sei $\beta\delta$ größer als die Linie $\delta\alpha$.* Wenn wir nun das bei β befindliche Hebelende heben, *so daß sich der Hebelarm über den Stein, um den sich der Hebel dreht, erhebt, so bewegt sich die Last γ nach der anderen Seite.* Dann beschreibt der Punkt β einen Kreis um den Mittelpunkt δ und der Punkt α um denselben Mittelpunkt einen kleineren Kreis.

Hoppe.

Nehmen wir zuerst an, er (der Hebel) sei dem Erdboden parallel. Der Hebel sei die Linie $\alpha\beta$ und die durch ihn zu bewegende Last, nämlich γ, bei dem Punkte α, die bewegende Kraft bei dem Punkte β, ... Wenn wir nun das bei β befindliche Hebelende heben .... dann beschreibt der Punkt β einen Kreis um den Mittelpunkt ς (ς ist die Kante des Körpers γ, gegen welche der Hebel drückt) und der Punkt α um denselben Mittelpunkt einen kleineren Kreis.

Bei HERON finden sich also Hebel, Last und ein Stein unter dem Hebel, auf dem sich derselbe bewegt, und selbstverständlich handelt es sich also um einen zweiarmigen Hebel. HOPPE hat dagegen den Stein *entfernt* (er hat nämlich die Worte ausgelassen, wo HERON den Stein nennt!), bekommt dadurch einen einarmigen Hebel, und da die HERONschen Ausführungen selbstverständlich nicht für diesen Fall passen *können*, so wirft HOPPE dem HERON „einen Fehler" vor. Ja, er geht noch weiter und schreibt ihm eine „irrige Beobachtung" zu, von der bei HERON nicht einmal eine Andeutung vorkommt. Muß man nicht dies eine Mystifikation nennen?

Aber jetzt kommt das wunderbarste. Herr CANTOR hat das HOPPEsche Zitat nicht ohne weiteres abgedruckt, sondern dasselbe mit der NIXschen Übersetzung verglichen, er hat sogar gesehen, daß nicht der Buchstabe ς, sondern der Buchstabe δ bei NIX vorkommt, aber **den Stein** hat Herr CANTOR weder im NIXschen Texte (vgl. oben die kursiv gedruckten Worte) noch in der NIXschen Figur 27, S. 116 (wo der Stein δ sofort entdeckt werden muß) aufgefunden. Er hat darum ganz einfach in das HOPPEsche Zitat δ statt ς eingesetzt und in seiner eigenen Figur 81 eine Ecke der *Last* (!) durch δ bezeichnet!

Die erste Hälfte der HOPPEschen Schlußfolgerungen ist also meines Erachtens nur eine Mystifikation, die zweite Hälfte ist im *günstigsten* Falle (vgl. R. MEIER, *De Heronis aetate*, Leipzig 1905, S. 32—33) ein sehr billiges „argumentum ad ignorantiam" von folgender Form: HERON hat eine gewisse Maschine beschrieben, wir kennen jetzt keinen älteren Schriftsteller, bei dem eine Beschreibung dieser Maschine vorkommt, also (?!) hat HERON dieselbe zuerst beschrieben.

Herr HOPPE selbst ist von der Richtigkeit seines „Nachweises" so überzeugt, daß er behauptet, wir seien dadurch mit zweifelloser Sicherheit (!) für das Leben des HERON auf die Zeit vor VITRUVIUS gekommen. Dagegen scheint Herr CANTOR nicht so weit zu gehen, denn S. 547 bemerkt er: „wer dagegen die erwähnte Verwandtschaft auf gemeinsame Abhängigkeit von einem unbekannten älteren Schriftsteller deutet . . .". Aber dann ist es noch schwieriger einzusehen, warum Herr CANTOR schuldig gewesen wäre, die langen HOPPEschen Schlußfolgerungen im Wortlaute zu wiederholen. G. ENESTRÖM.

1^3: 563—564. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 524 (BM 7_3, 1906/7, S. 282).

1^3: 564. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 400 (BM 1_3, 1900, S. 267).

1^3: 576. Als das unabwendbarste Zeichen dafür daß BOËTIUS „eine Geometrie schrieb" bezeichnet Herr CANTOR die Enzyklopädie des CASSIODORIUS. Aber aus der Angabe des CASSIODORIUS geht ja nicht hervor, daß BOËTIUS „eine Geometrie schrieb", sondern nur, daß er die EUKLIDischen Elemente übersetzt hat („EUCLIDEM translatum in latinam linguam idem vir magnificus BOËTIUS dedit"). Da nun die Hauptfrage immer gewesen ist (vgl. S. 581 Z. 7—9), ob die „*Geometria Boëtii*" echt oder unecht sei, so versteht man überhaupt nicht, welchen Zweck der Verweis auf CASSIODORIUS hat und noch weniger, welchen Zweck die folgenden Zeilen der Seite 576 haben (merkwürdigerweise weist Herr CANTOR dabei auch nicht in der 3. Auflage auf die Worte des CASSIODORIUS: „Qui [= EUCLIDES translatus] si diligenti cura relegatur" hin).

Unangebracht ist es jedenfalls, Z. 20 die von CASSIODORIUS erwähnte Schrift als „*die* Geometrie“ zu bezeichnen, da Herr CANTOR selbst S. 577 Z. 1 zugibt, daß es sich nur um die Übersetzung der EUKLIDischen Elemente handelt.

G. ENESTRÖM.

1^3: 580. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 539—540 (BM 7_3, 1906/7, S. 283).

1^3: 583. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 542 (BM 1_3, 1900, S. 268).

1^3: 590—591. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 550 (BM 7_3, 1906/7, S. 204).

1^3: 660. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 618 (BM 6_3, 1905, S. 306—307).

1^3: 664. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 622 (BM 2_3, 1901, S. 143).

1^3: 703. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 661 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3: 704. Siehe die Bemerkungen zu 1^2: 662 (BM 3_3, 1902, S. 139; 1^3, 1900, S. 499).

1^3: 706. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 663 (BM 3_3, 1902, S. 405).

1^3: 713. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 671 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3: 715—716. Ich habe schon in meiner Bemerkung zu 1^2: 673 (BM 5_3, 1904, S. 407—408) hervorgehoben, daß der Ausdruck „in alio libro arithmetico“ nicht, wie Herr CANTOR angenommen hat, auf eine Schrift über spekulative Arithmetik hinzuweisen braucht, sondern wenigstens ebensogut „in dem anderen Buche der Arithmetik“ bedeuten und sich auf den unmittelbar vorher von ALKHWARIZMI zitierten „liber algebre et almucabalah“ beziehen kann, da tatsächlich im 12. Jahrhundert die Algebra auch „arithmetica“ genannt wurde (siehe z. B. ANARITIUS, ed. CURTZE, Leipzig 1899, S. 267). Da indessen Herr CANTOR noch in der dritten Auflage der *Vorlesungen* behauptet, aus der fraglichen Stelle gehe unzweifelhaft hervor, daß unter jenem anderen Buche der Arithmetik die spätere sogenannte spekulative Arithmetik im Gegensatze zur praktischen Arithmetik gemeint sei, so scheint es mir jetzt angebracht, meine Ansicht etwas ausführlicher zu begründen.

Die betreffende Stelle lautet:

> Et iam patefeci in libro algebre et almucabalah, id est restaurationis et oppositionis, quod uniuersus numerus sit compositus, et quod uniuersus numerus componatur super unum. Vnum ergo inuenitur in uniuerso numero; et hoc est quod in alio libro arithmetice dicitur,

und die erste Frage ist: kann man den Satz: „unum invenitur in universo numero“ in der Algebra des ALKHWARIZMI wiederfinden? Diese Frage muß meiner Ansicht nach entschieden mit Ja beantwortet werden, denn ALKHWARIZMI

sagt nach der Rosenschen Übersetzung: „every number, which may be expressed from one to ten, surpasses the preceding by one unit“ und fügt hinzu, daß etwas ähnliches auch für Zehner, Hunderter usw. gilt. Nimmt man jetzt hinzu, daß es nirgends erwähnt wird, Alkhwarizmi habe eine Arbeit über spekulative Arithmetik verfaßt, so scheint es nicht leicht zu erklären, wie aus dem zitierten Passus unzweifelhaft hervorgehen kann, daß er eine solche Arbeit wirklich verfaßte.

Es ist mir unbekannt, ob Herr Cantor bemerkt hat, daß bei Alkhwarizmi an einer folgenden Stelle (S. 10 der Boncompagnischen Ausgabe) ein Zitat vorkommt, und auf welche Weise Herr Cantor dies Zitat erklärt. Die Stelle lautet:

> Etiam patefeci in libro, quod necesse est omni numero qui multiplicatur in aliquo quolibet numero, ut duplicetur unus ex eis secundum unitates alterius.

Meiner Ansicht nach bedeutet „liber“ auch hier die Algebra, und zwar bezieht sich das Zitat auf die Fortsetzung der von mir oben wörtlich wiedergegebenen Stelle der Rosenschen Übersetzung. Nach der Ansicht des Herrn Cantor sollte vielleicht „liber“ die sonst durchaus unbekannte spekulative Arithmetik bezeichnen. Aber liegt es nicht näher anzunehmen, daß Alkhwarizmi nur eine einzige Schrift verfaßt hat, die er in seinem Rechenbuch zu zitieren Anlaß hatte, nämlich gerade die Algebra? G. Eneström.

1^3 : 717. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 674 (BM 7_3, 1906/7, S. 204—205) sowie die „Ergänzungen und Verbesserungen“ des Herrn Cantor (S. 912).

1^3 : 718. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 675 (BM 5_3, 1904, S. 408).

1^3 : 720. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 677 (BM 7_3, 1906/7, S. 284).

1^3 : 730. Siehe die Bemerkungen zu 1^2 : 687—689 (BM 4_3, 1903, S. 205—206; 2_3, 1901, S. 143—144).

1^3 : 734. Die Angabe: „Eine geometrische Schrift [der Söhne des Musa ben Schakir] ist in mittelalterlicher Übersetzung auf uns gekommen“ ist unvollständig und darum leicht irreleitend. In Wirklichkeit ist nicht nur diese Übersetzung, sondern auch das Original der Schrift auf uns gekommen, und zwar in einer besseren Redaktion als der von Gherardo Cremonese benutzten. Ausführliche Auskunft über das arabische Original hat H. Suter in seinem, von Herrn Cantor nicht erwähnten Artikel *Über die Geometrie der Söhne des Musâ ben Schakir* (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 259—272) gebracht.
G. Eneström.

1^3 : 736—737. Wenn die *Vorlesungen* den Zweck haben, den Lesern *richtige* Auskunft über Geschichte der Mathematik zu bieten, so ist es sinnlos, in betreff der Geschichte des Termes „sinus“ zuerst zu bemerken: „aus dieser [d. h. Platone Tiburtinos] Übersetzung soll das Wort *sinus* als Name einer trigonometrischen Funktion in die Mathematik aller Völker eingedrungen sein“,

denn die Angabe ist, wie Herr Cantor nachträglich (S. 737) zugibt, *nachweislich* falsch. In Wirklichkeit kommt bei Al-Battani nur der *Begriff* „sinus“ vor, aber kein Wort, das dem Wortlaut nach durch „sinus“ übersetzt werden kann; den Begriff „sinus“ bezeichnet Al-Battani nämlich durch Chorde oder halbe Chorde (vgl. z. B. H. Suter, Bibliotb. Mathem. 5_3, 1904, S. 81 und die von ihm zitierte Stelle der Arbeit Nallinos). Wenn also Herr Cantor (S. 737) sagt: „Jedenfalls übersetzte ... nicht Plato von Tivoli ... das arabische dschaib durch das ganz richtige Wort sinus“, so ist diese Angabe buchstäblich richtig, denn Platone Tiburtino konnte offenbar nur das übersetzen, was in seiner Vorlage stand, aber erst auf Grund der Fußnote 2) kann der nicht sachkundige Leser erraten, daß das, was hier über die *Wörter* „dschaib“ und „sinus“ gesagt wird, gar nichts mit Al-Battani zu tun hat. G. Eneström.

1^3 : 738. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 694 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3 : 743. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 699 (BM 7_3, 1906/7, S. 205).

1^3 : 748. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 704 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3 : 750. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 706 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3 : 780. Siehe die Bemerkungen zu 1^2 : 735 (BM 1_3, 1900, S. 500).

1^3 : 781. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 736—737 (BM 7_3, 1906/7, S. 284—285). Herr Suter hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß der von Miram Tschelebi zitierte Ala-Eddin Ali-Koschdji nicht, wie ich angenommen habe, Atab-Eddin Al-Kaschi (gestorben etwa 1436) sondern der Astronom Ali Ben Muhammed Ala eddin al-Kuschdji (gestorben etwa 1474) ist. Die Worte „Nous en donnerons . . . Cadhi Zadeh el-Rumi“ (S. 16 des Sédillotschen Artikels) gehören also nicht hierher, und „l'auteur“ ist wohl Al-Kaschi. Freilich wird früher von Miram Tschelebi zweimal (a. a. O. S. 16, 30) „l'illustre auteur“ genannt und damit meint er ohne Zweifel Ulug Beg (d. h. in Wahrheit nicht Ulug Beg selbst sondern die Bearbeiter seiner Tafeln); man könnte darum versucht sein anzunehmen, daß Al-Kaschi nur das Problem der Dreiteilung des Winkels auf die Lösung der Gleichung $Px = x^3 + Q$ zurükgeführt hat, und daß später ein Mitarbeiter der Ulug Begschen Tafeln diese Gleichung wirklich löste. Auf der anderen Seite erwähnt Herr Suter in seiner Arbeit *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Abbandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 10, 1900, S. 174) einen in Kairo aufbewahrten Traktat des Al-Kaschi über die Auffindung der Sehne und des Sinus für den Drittel eines Bogens, dessen Sehne und Sinus bekannt sind, und es scheint folglich als ob die Darstellung des Miram Tschelebi nicht gut redigiert wäre. Jedenfalls ist eine sachkundige Untersuchung des erwähnten Traktates von Al-Kaschi sehr erwünscht. G. Eneström.

1^3 : 794. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 748 (BM 1_3, 1900, S. 500).

1^3: 800. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 752 (BM 6_3, 1905, S. 104).

1^3: 802. Siehe die Bemerkungen zu 1^2: 753, 754 (BM 5^3, 1904, S. 408—409).

1^3: 805—806. Siehe die Bemerkungen zu 1^2: 756—757 (BM 6_3, 1905, S. 308; 1_3, 1900, S. 500—501.

1^3: 815. Vgl. die Bemerkung zu 1^2: 767 (BM 1_3, 1900, S. 501).

1^3: 855. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 805 (BM 1_3, 1900, S. 269).

1^3: 857. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 807 (BM 1_3, 1900, S. 269) sowie BM 7_3, 1906/7, S. 400—401.

1^3: 859. Vgl. die Bemerkung zu 1^2: 808 (BM 1_3, 1900, S. 269).

1^3: 862. Z. 15 beziehen sich die Verweise auf die in den *Vorlesungen* nicht einmal erwähnte Ausgabe von Pez (vgl. die folgende Bemerkung); in der Ausgabe von Olleris haben die betreffendenden Kapitel die Nummern 22, 23 und 25. Dagegen ist das Z. 16 zitierte „22. Kapitel" wirklich das 22. Kapitel der Olleris schen Auflage. Hinsichtlich dieses Kapitels, wo bekanntlich das Wort „halhidada" oder „alhidala" steht, bemerkt Herr Cantor, daß es in der Münchener Handschrift 14836 nicht vorkommt. Diese Angabe ist insofern richtig, als sich das Kapitel ebensowenig wie das folgende in dem Traktate vorfindet, den das alte Inhaltsverzeichnis des Cod. lat. Monac. 14836 „Geometria Gerberti" nennt (Bl. 24^b—40^b, 45^a—75^b). Dagegen kommt das Kapitel in der Handschrift etwas später zweimal vor, nämlich Bl. 80^b und 109^a. An der ersten Stelle steht nach Curtze „halgidada" und an der zweiten „alhidada". Wenn das Wort, wie Herr Cantor annimmt, ursprünglich nicht im Texte sondern als Randbemerkung stand, so dürfte diese Randbemerkung jedenfalls schon aus dem 11. Jahrhundert herrühren, denn nach Curtze entstammt der zweite Teil des Cod. lat. Monac. 14836, abgesehen von einem sehr alten Abschnitt (Bl. 136—143), wahrscheinlich der 2. Hälfte des 11. Jahrhunderts.

G. Eneström.

1^3: 863. In betreff der Angabe „Im 24. Kapitel" (Z. 1) vgl. die Bemerkung zu 1^2: 812 (BM 1_3, 1900, S. 269), wo „ligne 22" statt „ligne 21" zu lesen ist. Die Bemerkung rührte von Paul Tannery her, der gefunden hatte, daß nicht im 24. aber wohl im 30. Kapitel der von Herrn Cantor zitierten Ausgabe von Olleris ein Verfahren erwähnt wird, welches den Beobachter zwingt, sein Gesicht glatt an die Erde zu drücken. Dagegen wird nicht im 30. sondern im 25. Kapitel von der Mißlichkeit des Verfahrens gesprochen, so daß in Wirklichkeit Z. 1 „25. Kapitel" statt „24. Kapitel" zu lesen ist. Warum Herr Cantor ursprünglich „24. Kapitel" schrieb, erfährt man aus Anm. 298 (S. 228) seiner Arbeit: *Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst* (Leipzig 1875), wo angegeben wird, daß bei den Verweisen auf Gerberts Geometrie die Auflage von Pez

benutzt worden war, und in dieser Auflage hat das von Herrn Cantor gemeinte Kapitel allerdings die Nummer 24. Aber in keiner der drei Auflagen des 1. Bandes der *Vorlesungen* wird auch nur angedeutet, daß Pez eine Auflage von Gerberts Geometrie besorgt hat, noch weniger gesagt, daß sich die Verweise auf diese Auflage beziehen, und es ist darum leicht erklärlich, daß der sachkundige Leser ohne weiteres den Verweis auf das 24. Kapitel als eine entschiedene Unrichtigkeit auffassen muß. Bekanntlich sind in den Handschriften die Absätze der *Geometria Gerberti* nicht numeriert. G. Eneström.

1^3: 867. Hier ist der Passus: „Diese Schriften Gerberts ... waren geometrischen Inhalts. Zwei andere beziehen sich auf Rechenkunst" irreleitend, denn der Leser *muß* die Ansicht bekommen, daß die Worte „Zwei andere" die Bedeutung „Zwei andere Schriften Gerberts" haben. Aus ein paar folgenden Aussprüchen desselben Absatzes könnte der aufmerksame Leser vielleicht folgern, daß es nicht ganz sicher ist, ob die zwei Schriften von Gerbert herrühren, aber erst S. 869 erfährt er, daß Herr Cantor unentschieden lassen will, ob Gerbert wirklich die erste Schrift verfaßt hat. Vergl. auch meine Bemerkung zu 1^2: 816 (BM 7_3, 1906/7, S. 82—83). G. Eneström.

1^3: 869. Herr Cantor bemerkt, daß er darauf verzichtet zu entscheiden. ob die von Olleris herausgegebene *Regula de abaco computi* von Gerbert herrührt, weil nirgend strenge Beweise vorliegen, vielmehr nur Vermutung gegen Vermutung steht. Aber diese Bemerkung kann sich *höchstens* auf die Seiten 311—333 des Ollerisschen Textes beziehen, während sie in betreff der Abteilung über Bruchrechnen (S. 333—348) ganz sicher nicht zutrifft. Es ist nämlich, besonders von Nagl, nachgewiesen, daß der Text „Cum passione contraria" eine selbständige Schrift ist, die nichts mit den vorangehenden Regeln über Multiplikation und Division ganzer Zahlen zu tun hat, und daß man nicht den geringsten Grund hat zu vermuten, daß Gerbert der Verfasser des Textes war. Freilich ist es auf der anderen Seite unmöglich zu *beweisen*, daß dieser Text *nicht* von Gerbert herrührt, so lange es nicht festgestellt ist, daß Cod. Bern. 299 oder irgend andere Handschrift des Textes wirklich älter als Gerbert ist, aber darum darf man nicht sagen, daß hier Vermutung gegen Vermutung steht. Vielmehr steht hier gegen eine von Olleris ausgesprochene Vermutung der Nachweis, daß diese Vermutung teils durchaus unbegründet teils unwahrscheinlich ist.

Der Text „De passione contraria" ist in den von Bubnov zitierten Handschriften unvollständig, weil darin der Schluß der Erklärung des Beispieles $120 : 11\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ fehlt. Dieser Schluß ist aber kürzlich von Herrn H. Omont in einer bisher unbekannten Handschrift aufgefunden und in den Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale **39** (1907) veröffentlicht worden. Dieselbe Handschrift enthält unmittelbar nach dem Schluß der Erklärung und der Probe einen unvollständigen Absatz, den ich hier unten zum Abdruck bringe:

> Quamcumque unciarum copulationem, id est aut deuncis, aut dextantis, vel ceterarum, considerare desideras quid sint in se aut in invicem, hanc certus facilem cape regulam: XII^mam^ partem cujuscumque copulationis volueris cum proprio unciarum numero, duces secundum hoc quod sunt in se, vel cum alieno numero unciarum, secundum hoc quod sunt in

invicem. Deinde collige summam ejus, si potes in uncias, sin in minucias, vel, si ita contigerit, in utrumque, et hoc habeto pro hoc quod sunt in se aut in invicem. Verbi gratia. Si vis scire quid sit deunx in se, cum habeat XI. uncias, in his nequit XII^{ma} pars inveniri, nisi forte in scripulis, nam habet scripulos CC^{tos}LX^{ta}IIII., quorum XII^{ma} pars sunt XX^{ti}II scripuli, quos cum proprio numero unciarum multiplices, hoc est cum XI., nam undecies XXII. sunt CC[X]LII., que colligenti in uncias et minutias fiunt X. uncia ac remanent II° scripuli. Verum (?) deunx in se est dextans et dimidia sextula, si vero miraris quid sit deunx in trientem, sume iterum deuncis XII^{mam}, id est XXII., et multiplica cum numero untiarum . . .

Ob dieser Ahsatz wirklich eine Fortsetzung des Textes „Cum passione contraria" ist oder nicht, dürfte schwer festzustellen sein. Er hesagt, daß $(\frac{11}{12})^2 = \frac{11}{12} \cdot 264$ scripuli $= 242$ scripuli $= \frac{10}{12} + \frac{1}{12 \cdot 12}$ und bringt den Anfang einer entsprechenden Berechnung von $\frac{11}{12} \cdot \frac{4}{12}$; hier ist also eigentlich eine Erklärung gewisser Sätze der ersten Ahteilung des Textes „De passione contraria" gegehen, die ***Multiplikation*** von Brüchen behandelt. Auf der anderen Seite finden sich ähnliche Ausführungen am Ende der von Boncompagni herausgegebenen „Regule ahaci" des Atelhart von Bath, so daß es nicht unmöglich ist, daß der Text „Cum passione contraria" auch nach dem Funde des Herrn H. Omont nicht vollständig hekannt ist. G. Eneström.

1^3 : 875—876. Hier herichtet Herr Cantor über den Inhalt eines von Paul Tannery und Clerval (1900) herausgegehenen Briefes an Regimbold von Köln. Wie Tannery in der von Herrn Cantor benutzten Arbeit (*Correspondance d'écolâtres*, S. 489 Anm. 1 und 2) ausdrücklich hervorheht, ist der Inhalt dieses Briefes schon früher von Winterberg aus einer anderen Handschrift veröffentlicht worden, und zwar in den Ahhandlungen zur Geschichte der Mathematik **4**, 1882, S. 183—187 (Überschrift: „Liber Franconis de quadratura circuli explicit. Incipit liber de eadem re"). Indessen hat Herr Cantor die Angahe Tannerys übersehen und aus diesem Grunde herichtet er in der 3. Auflage der *Vorlesungen* zweimal über ein und dieselbe Schrift, nämlich nicht nur S. 875—876, sondern auch S. 877. Man hekommt also Gelegenheit zu prüfen, inwieweit es zweckmäßig sein kann, eine neue Auflage dadurch herzustellen, daß man zu verschiedenen Zeiten in sein Handexemplar die Ergänzungen einträgt, die auf Grund neuen Materials nötig erscheinen, und das Handexemplar dann ohne weiteres als Druckmanuskript anwendet. Es ergiht sich dabei, daß der erste Bericht (S. 877) des Herrn Cantor nur etwa zwei Druckzeilen, der zweite (S. 875—876) dagegen etwa 30 Druckzeilen umfaßt. Freilich dürfte in diesem Fall zwischen den zwei Berichten ein Zeitraum von etwa 18 Jahren liegen, aher jedenfalls scheint der hier hervorgehohene Umstand die allgemeine Erfahrung (vgl. Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 398) zu hestätigen, daß ein und dieselbe Person zu verschiedenen Zeiten ein und dieselbe Schrift ganz verschieden berücksichtigt und daß es also nicht zu empfehlen ist, ein Druckmanuskript auf die ohen angegebene Weise herzustellen.

G. Eneström.

1^3 : 877. Die alte Angabe, daß Franco von Lüttich seinen Traktat über die Quadratur des Kreises dem Erzhischof Hermann II. gewidmet hat, findet

Herr Cantor zweifelhaft, weil die Vatikanische Handschrift den Namen des Bischofs nicht nennt. Aber Paul Tannery hat in der von Herrn Cantor S. 876 zitierten Arbeit (*Correspondance d'écolâtres*, S. 489 Anm. 1) die Dedikationsschrift aus einer anderen Handschrift (Cod. lat. Paris. 7377 C) zum Abdruck gebracht, und aus dem was Tannery sagt („quant aux vers, qui sont adressés à l'archevêque de Cologne Hermann II"), scheint es, als ob die Richtigkeit der alten Angabe durch die Pariser Handschrift bestätigt wäre.

In betreff der Angabe: „Ferner hält Franco selbst $\frac{9}{10}$ des Durchmessers für die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates, rechnet also mit $\pi = (\frac{9}{5})^2 = 3{,}24$", könnte es eigentlich genügen zu bemerken, daß sie gestrichen werden muß, da sie sich auf den schon S. 875—876 erwähnten Brief an Regimbold von Köln bezieht. Da indessen Herr Cantor die Bemerkung von Paul Tannery in der BM 1_3, 1900, S. 269 unberücksichtigt gelassen hat, so scheint es mir angebracht, auf die Frage, ob hier wirklich $\frac{9}{10}$ des Durchmessers für die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates gehalten wird, näher einzugehen. Ich bringe darum zuerst zum Abdruck die betreffende Stelle sowohl nach Winterberg als nach Tannery und Clerval:

Winterberg (1882).

Ac centro autem ad circularem usque lineam (IIII) in equa spatia ipsa recta linea secetur quibus .IIII. V. eiusdem quantitatis superaddatur punctumque ibi figatur in quo angulus terminabitur, et sic in ceteris tribus ut per puncta quadrati deducantur latera. banc circuli quadrate que auctoritatem in sesquiquarta proportione retineat qui in priori contemplari teduerit.

Tannery und Clerval (1900).

A centro autem ad circularem usque lineam quatuor in aequa spatia ipsa recta linea secetur, quibus IIII, quinta eiusdem quantitatis superaddatur, punctumque ibi figatur, in quo angulus terminabitur, et sic in tribus caeteris ut per puncta quadrati deducantur latera. Hanc circuli quadraturam quae auctoritatem in sesquiquarta proportione retineat, qui in priore contemplari teduerit.

Wie man sofort sieht, sind die zwei Texte fast wörtlich übereinstimmend, und obgleich die erklärende Figur in den Handschriften fehlt, dürfte es kaum zweifelhaft sein, wie die Stelle zu verstehen ist. Man zieht in einem Kreis zwei gegeneinander senkrechte Durchmesser, verlängert dieselben in jeder Richtung um $\frac{1}{4}$ des Radius und vereinigt die vier auf diese Weise erhaltenen Punkte, wodurch ein Quadrat entsteht, das dem Kreise flächengleich ist. Da nach der Konstruktion die Diagonale des Quadrates $\frac{5}{4}$ des Durchmessers ist, so wird offenbar die Seite des Quadrates $\frac{5}{2\sqrt{2}} R$, wenn R der Radius ist, folglich $\pi = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8}$, wie Paul Tannery in der BM 1_3, 1900, S. 269 angegeben hat.

Warum Herr Cantor Tannerys Bemerkung unberücksichtigt ließ, weiß ich nicht; jedenfalls ist er dadurch in die unangenehme Lage gekommen, sich selbst zu widersprechen, denn S. 876 bemerkt er (Z. 9—10) in betreff derselben Vorschrift: „Augenscheinlich entspricht diese Vorschrift dem Werte $\pi = 3\frac{1}{8}$".

G. Eneström.

1^3: 878. Siehe unten die Bemerkung zu 1^3: 900.

$1^3:882$. Herr Cantor gibt hier ein Beispiel der sogenannten „divisio cum differentia“ d. h. des komplementären Divisionsverfahrens, und es wäre nicht ohne Interesse auszufinden, aus welchem Grunde dies Verfahren von der Abacisten angewendet wurde. Es liegt nahe anzunehmen, daß es benutzt wurde, um bei dem Probieren zu große Werte der einzelnen Ziffern des Quotienten zu vermeiden (vgl. M. Chasles, *Explication des traités de l'Abacus et particulièrement du traité de Gerbert*; Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] **16**, 1843, S. 17 des Sonderabzuges), aber für diesen Zweck braucht man das Verfahren gar nicht, denn man kann die gewöhnliche Methode anwenden, wenn man nur vor dem Probieren die erste Ziffer des Divisors um eine Einheit erhöht. Meiner Ansicht nach bezweckte man durch die „Divisio cum differentia“ so viel als möglich Subtraktionen zu vermeiden, und eine Stütze meiner Ansicht finde ich darin, daß zuweilen bei der „divisio sine differentia“ ein umständliches Verfahren angewendet wurde, die kaum einen anderen Zweck haben konnte, als wenn irgend möglich die Subtraktionen auf die leichte Form $10 - a$ $(a < 10)$ zu beschränken. Ein instruktives Beispiel des angedeuteten Verfahrens findet sich in einer kürzlich von Herrn H. Omont (siehe die Bemerkung zu $1^3:868$) aufgefundenen Handschrift. Das Beispiel ist $6500:354$, und in moderner Bezeichnung sieht das Verfahren auf folgende Weise aus [$E(k)$ bedeutet wie gewöhnlich die größte in k enthaltene *ganze* Zahl]:

$$10\,E\left(\tfrac{600}{354}\right) = 10;\ 6000 - 10 \cdot 354 = 6000 - 3540 = 2460.$$
$$E\left(\tfrac{2000}{354}\right) = 5;\ 2000 - 5 \cdot 354 = 2000 - 1770 = 230.$$
$$500 + 460 + 230 = 1190.$$
$$E\left(\tfrac{1000}{354}\right) = 2;\ 1000 - 2 \cdot 354 = 1000 - 708 = 292.$$
$$190 + 292 = 482.$$
$$E\left(\tfrac{482}{354}\right) = 1;\ 482 - 354 = 128.$$

Der Quotient ist also $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ und der Rest 128.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß man weit später den Grundgedanken dieses Verfahrens (d. h. die Beschränkung auf Subtraktionen von der Form $10 - a$) in gewissen Gebieten angewendet hat (z. B. bei das sogenannte Borgen) oder noch anwendet (z. B. bei der Subtraktion zweier Logarithmen). Bekanntlich wird das Verfahren gewöhnlich „dekadische Ergänzung“ genannt, und Lagrange hat es sogar als allgemeines Subtraktionsverfahren empfohlen (siehe *Oeuvres* **7**, Paris 1877, S. 182). G. Eneström.

$1^3:889$. Die kategorische Form der Angabe: „Heriger von Lobbes, ... von dessen hierher gehörenden Schrift bereits (S. 869) die Rede war“ stimmt nicht ganz gut überein mit dem, was S. 869 gesagt wurde, und noch weniger mit der Angabe S. 867. An dieser Seite wird die *Regula de abaco computi* als *eine* Schrift bezeichnet, und man kann nicht umhin, die Ansicht zu bekommen, daß Herr Cantor die ganze Schrift dem Gerbert zuschreibt (vgl. oben die Bemerkung zu $1^3:867$). S. 869 erwähnt Herr Cantor nachträglich die *Auffassung*, welche Heriger von Lobbes für den Verfasser des ersten Hauptteiles der *Regula de abaco computi* hält, verzichtet aber darauf, eine Entscheidung in betreff dieser Frage zu treffen.

Die Gründe, aus denen Bubnov den größten Teil der ersten Hauptabteilung der *Regula de abaco computi* dem Heriger von Lobbes überweist, scheinen die folgenden zu sein: 1) Nach einem Verfasser des 13. Jahrhundert hat Heriger

„Regule numerorum super abbacum Gerberti“ verfaßt; 2) In einer Handschrift (Cod. lat. Monac. 14689) findet sich oberhalb einer Schrift über den Abacus die Überschrift „Incipiunt item aliae regulae Herigeri super abacum“; 3) In einer anderen Handschrift (Cod. Leid. Scal. 38) findet sich ein Traktat: „Ratio numerorum abaci secundum Herigerum“, deren Inhalt aus der ersten Hauptabteilung der *Regula de abaco computi* entnommen zu sein scheint. Daß die Auffassung des Herrn Bubnov richtig sein kann, ist gewiß nicht von der Hand zu weisen; auf der anderen Seite kann bemerkt werden: 1) daß der Cod. lat. Monac. 14689 dem 12. Jahrhundert entstammt, also wenigstens 100 Jahre nach der Abfassung von Herigers Arbeit geschrieben ist; 2) daß diese Handschrift nur einen Teil des Traktates umfaßt, den Herr Bubnov Heriger zuschreibt; 3) daß, soweit bekannt ist, alle übrigen Handschriften dieses Traktates anonym sind; 4) daß in betreff des Traktates „Ratio numerorum abaci secundum Herigerum“ nur zwei Handschriften diese Überschrift tragen (die eine ist von Herrn Bubnov erwähnt, die andere von Herrn H. Omont kürzlich aufgefunden), und daß dieser Traktat ebensowohl ein Auszug aus einer anderen noch nicht untersuchten Schrift sein kann. G. Eneström.

1^3: 893. In betreff des Ursprunges der Wörter Igin, Andras, usw. kann bemerkt werden, daß sich die von Herrn Cantor abgedruckten zehn Verse in einer kürzlich von der Nationalbibliothek in Paris erworbenen und von Herrn H. Omont in den Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale **39** (1907) beschriebenen Handschrift (Nouvelles acquisitions, ms. latin 886) finden, aber mit der Überschrift „Versus de nominibus caracterum *arabicorum* ad abacum pertinentium“. Da die Handschrift nach Herrn H. Omont zwar nicht früher als am Ende des 11. Jahrhunderts aber nicht später als am Ende des 12. Jahrhunderts anzusetzen ist, so verdient die Angabe derselben sicherlich neben der Behauptung des Rudolf von Laon berücksichtigt zu werden. G. Eneström.

1^3: 900. Vielleicht ist Z. 16 „XII. S.“ nur ein Schreibfehler statt „XI. S.“, denn meines Wissens ist es bisher nicht angezweifelt worden, daß die bekannte Erlanger Handschrift 288 schon aus dem 11. Jahrhundert herrührt (vgl. z. B. *Gerberti Opera mathematica ed. N. Bubnov*, Berlin 1899, S. 188; P. Tannery, BM 1_3, 1900, S. 42); dieselbe Angabe hat Herr Cantor selbst S. 577 Anm. 5 (vgl. auch S. 581 Z. 10 und S. 587 Z. 27). Wenn also Oddo nach der Entstehung der *Geometria Boëtii* seine Regeln verfaßt haben muß, so können diese Regeln dennoch sehr wohl dem 11. Jahrhundert entstammen.

Auf der anderen Seite gibt freilich Herr Cantor S. 878 an, daß die Erlanger Handschrift dem 12. Jahrhundert angehört, so daß es scheint, als ob zweimal der Schreibfehler „XII. S.“ statt „XI. S.“ vorkommen würde. Dadurch wird natürlich der Fehler noch gefährlicher für den nicht sachkundigen Leser. G. Eneström.

1^3: 902. Unter den Schriften über den Abakus könnten auch die zwei von Narducci 1882 (Bullett. di bibliogr. de sc. matem. **15**, 135—162) veröffentlichten genannt werden; die zwei von Narducci benutzten Handschriften

entstammen nach ihm der 2. Hälfte des 12. Jahrhunderts. Die erste Schrift enthält eine Stelle, die meines Erachtens von besonderem Interesse ist. Nachdem (S. 139) der Gebrauch der gewöhnlichen Multiplikationstafel gelehrt worden ist, bemerkt der Verfasser:

> Verumtamen, qualiter et hoc idem absque huius presentis figure inspectione, quod decentius est, possit inueniri, breuiter dicam. Tota itaque summa eius in .I. II. III. IIII. et .V. pendet. Illi etenim numeri caute multiplicati ad maiorem numerum inueniendum facillimum prebent intellectum.

Nach diesen Worten erwartet man natürlich die Regel der komplementären Multiplikation, aber auffälligerweise fährt der Verfasser fort:

> In numerorum igitur multiplicacione quot insunt quinarii primum uide, et quot quinarios numerus ille quinariis superfluens remultiplicatus conpingat, deinde adscende, et sic tunc illius quesiti numeri summam collige. Exempli causa: Octies .VII. quot sunt? LVI. Quomodo scis? Ita. In octies .VII. VIII. sunt quinarii, et supersunt ex cunctis septenariis octies duo binarii. Octo igitur quinarii et octies duo binarii coniuncti ad hoc quod quesitum est facile reddunt intellectum.

Der Verfasser lehrt also gar nicht die komplementäre Multiplikation, sondern sein Verfahren entspricht der Formel

$$ab = a \cdot 5 + a(b - 5),$$

während bei ihm wie bei allen übrigen Abacisten die komplementäre Multiplikation fehlt. Hat er diese in einer Algorismus-Schrift gefunden, aber den Sinn der Regel mißverstanden? Oder hat er sein Verfahren richtig aus einer älteren Schrift über den Abakus entnommen? G. Eneström.

1[3]: 906. Vgl. die Bemerkung zu **1**[2]: 852 (BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269).

1[3]: 908. Siehe die Bemerkungen zu **1**[2]: 854 (BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104.

1[3]: 909. Siehe den Schluß der Bemerkung zu **1**[2]: 671 (BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499).

1[3]: 910. Siehe die Bemerkungen zu **1**[2]: 855 (BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 84).

1[3]: 911. Siehe die Bemerkung zu **1**[2]: 856 (BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309).

1[3]: 911. Der letzte Absatz ist so reizend geschrieben, daß man wirklich wünscht, alle Ausführungen desselben wären durchaus unanfechtbar gewesen. Aber leider ist dies nicht der Fall in betreff des für die Darstellung sehr wichtigen Passus: „Zum ersten Male war ihnen [d. h. den mit dem Jahre 1200 auftretenden mathematischen Geistern, in erster Linie Leonardo Pisano und Jordanus Nemorarius] wieder genügender Stoff gegeben, mit welchem ihre Erfindungsgabe sich beschäftigen, von welchem aus sie wesentliche Fortschritte machen konnten". Diesen Passus motiviert Herr Cantor dadurch, daß *das christliche Abendland* erst mit dem Jahre 1200 im Besitze gewisser Quellen

und Kenntnisse mathematischer oder literarischer Art war. Aber bekanntlich hat uns gerade Leonardo Pisano selbst mitgeteilt, daß er seine mathematischen Kenntnisse zum großen Teil *auf Reisen nach Ägypten, Syrien und Griechenland* [was wohl eigentlich Konstantinopel bedeutet] erworben hatte, und wesentlich dasselbe hätte ein anderer auf dieselbe Weise schon 100 Jahre vor Leonardo Pisano oder noch früher lernen können. Das Jahr 1200 hat also für die Geschichte der europäischen Mathematik *nicht* die von Herrn Cantor hervorgehobene Bedeutung. G. Eneström.

2:5, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 286.

2:5. In meinem Aufsatze *Über zwei angebliche mathematische Schulen im christlichen Mittelalter* (Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 252—262) habe ich erwähnt (S. 256 Anm. 1), daß ich die Angabe, Leonardo Pisano sei Kaufmann gewesen, nicht in Cossalis Arbeit *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* hatte auffinden können. Nach erneuter Durchsicht der Arbeit habe ich jetzt zwei Stellen entdeckt, woraus man schließen kann, daß Leonardo nach der Ansicht Cossalis Kaufmann war, und diese Stellen finden sich am Ende des Kapitels V:2 („Del libretto De numeris quadratis di Leonardo Pisano"), wo man eigentlich keinen Grund hat Aufschlüsse über Leonardos Beruf zu suchen. S. 167 spricht Cossali von Leonardos „navigazioni per oggetti di traffico alla Sicilia, alla Grecia, alla Siria", und S. 169 bemerkt er: „tragittò Leonardo per affari di traffico alla Grecia". Offenbar sind diese Angaben unmittelbar oder mittelbar aus der Einleitung zum *Liber abaci* entnommen.

Auf Grund der Cossalischen Angaben bemerkte Montuela dann in den Zusätzen (S. 715) zur zweiten Auflage des zweiten Bandes der *Histoire des mathématiques* (Paris an VII): „Négociant dans les échelles d'Afrique et du Levant, ... il [Leonardo Pisano] eut la noble ambition de s'instruire dans les sciences qui fleurissoient chez les Arabes", und trug dadurch bei, die Legende, daß Leonardo Kaufmann war, außerhalb Italiens zu verbreiten. G. Eneström.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2**:8, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309. — **2**:10, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2**:14—15, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2**:20, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2**:25, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2**:30, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2**:31, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2**:32, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S 105. — **2**:34, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310. — **2**:37, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2**:38, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2**:39, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2**:41, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352.

2:41. Herr Cantor macht darauf aufmerksam, daß Kaiser Friedrich II. nicht vor 1226 in Pisa war, während als Entstehungsjahr des *Liber quadratorum* des Leonardo Pisano 1225 angegeben wird, obgleich in dieser Schrift berichtet wurde, Leonardo sei dem Kaiser in Pisa vorgestellt worden. Diesen Widerspruch hat ein junger Verfasser vor einigen Jahren dadurch erklärt, daß die Pisaner eine besondere Zeitrechnung hatten und er gibt bestimmt an, daß das

pisanische Jahr 1225 teilweise mit dem gewöhnlichen Jahr 1226 zusammenfiel (siehe M. Lazzarini, Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, S. 3). Leider scheint diese Erklärung unrichtig zu sein, denn nach den mir zugänglichen Schriften, wo über pisanische Zeitrechnung berichtet wird, begann das pisanische Jahr 1225 im März 1224 und endete im März 1225. Der fragliche Widerspruch dürfte also fortwährend unerklärt sein. G. Eneström.

2:46. Die Titel „flos, flores“ u. ä. im Sinne „Auswahl, Sammlung“ waren in jener Zeit, besonders in Italien, häufig. Die Erklärung Leonardos bedeutet also nur eine höfisch-poetische Wendung. A. Sturm.

2:51, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106. — **2:53**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2:57**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2:59—60**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310—311. — **2:61**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287. — **2:63**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2:67**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2:70**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73**, 82, 87, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:88**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395. — **2:89, 90**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2:91—92**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395—396. — **2:97**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:98—99**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 210. — **2:100**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140.

2:100. Die Librische Angabe, daß Guglielmo de Lunis einen algebraischen Traktat ins italienische übersetzte, kann sehr wohl auf einer unrichtigen Deutung des Ausdruckes „traslato darabico a nostra lingua“ bei R. Canacci beruhen. Bekanntlich wurde in Italien die italienische Sprache erst in der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts als Schriftsprache benutzt, und es ist durchaus unbekannt, wann Guglielmo de Lunis lebte; selbstverständlich muß er vor Canacci aber frühestens im 12. Jahrhundert gelebt haben. Nun nehmen Cossali und Libri ohne weiteres an, daß bei Canacci „nostra lingua“ die italienische Sprache bedeutet und folgern daraus unmittelbar, daß Guglielmo de Lunis nicht vor der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts gelebt haben kann, aber meiner Ansicht nach ist die Annahme willkürlich, und wenn Guglielmo de Lunis z. B. in das 12. Jahrhundert zu versetzen ist, so bedeutet „nostra lingua“ eher die lateinische Sprache. Daß bei Ghaligai nach den Worten: „Segue el Testo di Guglielmo“ ein Passus in italienischer Sprache „Rendiamo gratie allo altissimo etc.“ vorkommt, beweist gar nicht, daß Ghaligai diesen Passus wörtlich abgeschrieben hat, sondern derselbe kann sehr wohl eine Übersetzung sein.
G. Eneström.

2:101, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 396. — **2:104—105**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2:106**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 380. — **2:111**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:116**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:117—118**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107, 311. — **2:122**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397. — **2:126**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2:127**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:128**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:129**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2:132**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:144**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381. — **2:145**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2:148**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2:150—151**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288. — **2:155—156**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2:157**, 158, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:160—162**, siehe

BM 6_3, 1905, S. 311—312; 7_3, 1906/7, S. 87—88. — **2:163**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504; 6_3, 1905, S. 312. — **2:164**, siehe BM 6_3, 1905, S. 313. — **2:165**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 382. — **2:166**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2:175**, siehe BM 3_3, 1902, S. 140. — **2:206**, siehe BM 6_3, 1905, S. 313. — **2:210**, siehe BM 2_3, 191, S. 352—353. — **2:218**, siehe BM 4_3, 1903, S. 284. — **2:219**, siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2:222**, siehe BM 6_3, 1905, S. 397—398. — **2:229, 242**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504—505. — **2:243**, siehe BM 1_3, 1900, S. 505; 6_3, 1905, S. 398; 7_3, 1906/7, S. 382. — **2:245, 246, 247**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 383—384.

2:250, Z. 20 v. o. lies „im XIV. Jahrh.“ statt „XV.“

2:253, siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2:273**, siehe BM 1_3, 1900, S. 505. — **2:274**, siehe BM 3_3, 1902, S. 325. — **2:281**, siehe BM 5_3, 1904, S. 411. — **2:282, 283**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506; 2_3, 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506—507. — **2:296**, siehe BM 2_3, 1901, S. 354. — **2:305**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 88. — **2:313**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507. — **2:314**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 288—289. — **2:317**, siehe BM 5_3, 1904, S. 69; 7_3, 1906/7, S. 384. — **2:320**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 88—89. — **2:322**, siehe BM 6_3, 1905, S. 399. — **2:325**, siehe BM 6_3, 1905, S. 313—314. — **2:328**, siehe BM 3_3, 1902, S. 140; 4_3, 1903, S. 285. — **2:334**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507.

2:339. Über Zambertis persönliche Verhältnisse ist den Widmungen seiner Übersetzungen zu entnehmen, daß er einen Bruder Joannes hatte, der ein Freund optischer Studien war. A. Sturm.

2:339. Das wenige, das man von Bartolomeo Zambertis Persönlichkeit weiß, ist von B. Boncompagni im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1874, S. 159—161 zusammengestellt worden. Man ersieht daraus, daß Zamberti Sekretär des Venetianischen Senates war. G. Eneström.

2:351, siehe BM 6_3, 1905, S. 399. — **2:353**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507; 4_3, 1903, S. 87. — **2:355, 357**, siehe BM 6_3, 1905, S. 399—400. — **2:358, 360**, siehe BM 4_3, 1903, S. 87. — **2:371**, siehe BM 6_3, 1905, S. 314. — **2:379**, siehe BM 6_3, 1905, S. 400; 7_3, 1906/7, S. 384. — **2:380**, siehe BM 6_3, 1905, S. 400—401. — **2:381**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507. — **2:385**, siehe BM 3_3, 1902, S. 81; 4_3, 1903, S. 207; 7_3, 1906/7, S. 289. — **2:386**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507; 5_3, 1904, S. 306. — **2:388**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 289.

2:392. Tannstetters Geburtsort ist auf den Karten nicht als „Rhein“, sondern „Rain“ angegeben. Letztere Schreibart entspricht auch der Auffassung Tannstetters und der Tatsache, daß Rain einst Grenzstadt war. Es befindet sich dort noch eine alte Säule: hie das pairland 1439. A. Sturm.

2:395, siehe BM 1_3, 1900, S. 507—508.

2:396. Tannstetter sagt über Tschertte: „In Mathematik geschickt, besonders in Gründen der Malerei und Baukunst“. Das erklärt sich einfach daraus, daß Tschertte Baumeister war. A. Sturm.

2:**397**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 211. — **2**:**399**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107—108. — **2**:**401**, **405**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2**:**410**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 290. — **2**:**411**, **412**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 89.

2:420. Da auch die älteren Auflagen des KÖBELschen Rechenbuches die römischen Ziffern als „Teutsche zal, gemain Teutsch zal“ im Gegensatz zur „Zyfferzale“ bezeichnen, so kommen die angeführten Rechenbücher von 1525 und 1530 für die ältere Übung dieser Benennung nicht in Betracht. Es sei noch bemerkt, daß KÖBEL allerdings für die 10 Zahlzeichen wiederholt den Namen „Zyffern“ gebraucht, aber ausdrücklich hervorhebt, daß sie „der gemain man“ so nennt. Er selbst unterscheidet genau: Zum ersten soltu wissen, das newn bedeutlich figuren sein vnd ain Zyffer 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 das ist die zyffer.

A. STURM.

2:**425**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2**:**427**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314—315. — **2**:**429**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201—202. — **2**:**430**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2**:**440**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2**:**442**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2**:**449**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2**:**454**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242. — **2**:**474**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2**:**479—480**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 290—291, 385.

2:481. Über GHALIGAI verfaßte BONCOMPAGNI etwa 1860 eine große Abhandlung *Intorno alla vita di FRANCESCO GHALIGAI, matematico fiorentino del secolo XVI. Dissertazione di B. BONCOMPAGNI*, die er 1862 zum Absatz bringen ließ, aber aus Gründen, die mir unbekannt sind, wurde die Abhandlung nie gedruckt und herausgegeben. Eine Korrektur des ganzen Satzes (226 Druckseiten in großem Quartformat mit besonderem Titelblatt) bekam P. RICCARDI und diese Korrektur ist jetzt in meinem Besitze. Eine andere Korrektur hatte BONCOMPAGNI selbst aufbewahrt, und diese wurde 1898 zusammen mit seinen anderen Büchern versteigert. Aus dieser Abhandlung, deren Inhalt freilich nur sehr wenig mit GHALIGAI zu tun hat, geht hervor, daß GHALIGAI schon 1505 als Lehrer der Arithmetik in Florenz wirkte und daß er daselbst am 10. Februar 1536 starb; vermutlich war er etwa 1480 geboren. Von seiner Arbeit gibt es eigentlich nur zwei Auflagen, denn in der dritten Ausgabe von 1552 sind nur Titelblatt und Blatt 114 neu gedruckt (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1874, S. 486). Die von Herrn CANTOR erwähnten Bezeichnungen der Potenzen der Unbekannten rühren nicht von GHALIGAI selbst, sondern von seinem Lehrer GIOVANNI DEL SODO her, und GHALIGAI führt (Bl. 70^b) noch zwei solche Bezeichnungen mit entsprechenden Namen auf, nämlich  (pronico) $= x^7$ und  (tromico) $= x^{11}$.

G. ENESTRÖM.

2:481, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2**:482, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 401. — **2**:**483**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 291. — **2**:**484**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2**:**486**, **489**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2**:**490**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 385—386. — **2**:**497**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 291, 386. — **2**:**503**, **505**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292. — **2**:**509**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2**:**510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2**:**512**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2**:**514**, **516**, **517**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2**:**524**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 90. — **2**:**527**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2**:**529**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91. — **2**:**530**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2**:**531**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212. — **2**:**532**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292.

---

2 : 532. Aus dem *Opus novum de proportionibus* (1570) von Cardano dürfte auch der 141. Satz (S. 136—137) verdienen, erwähnt zu werden. Die Überschrift lautet: „Numeros fractos ad minores in eadem proportione valde propinqua deducere", und Cardanos Lösung dieses Problems ist wesentlich die folgende. Er nimmt einen Bruch $\frac{a}{b}$, wo $a > b$, sucht zuerst durch Probieren einen sehr einfachen Bruch $\frac{m_1}{m_2}$ (m_2 einziffrig) auf, der dem gegebenen Bruche $\frac{a}{b}$ näherungsweise gleich aber zu klein ist, und bildet dann den Ausdruck

$$\frac{m_1 - \frac{a m_2 - b m_1}{a - b}}{m_2 - \frac{a m_2 - b m_1}{a - b}}.$$

Wie man leicht finden kann, ist dieser Ausdruck genau $= \frac{a}{b}$, und wenn man statt $\frac{a m_2 - b m_1}{a - b}$ einen Näherungswert von der Form $\frac{1}{k}$ einsetzt, so ist der Ausdruck

$$\frac{m_1 - \frac{1}{k}}{m_2 - \frac{1}{k}} = \frac{m_1 k - 1}{m_2 k - 1}$$

ein genauer Wert von $\frac{a}{b}$. Selbstverständlich könnte man das Verfahren fortsetzen, um noch genauere Werte zu bekommen, aber hierüber sagt Cardano nichts, und er hat also keinen Anlaß gehabt zu untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Werte wirklich genauer werden. Er behandelt nicht einmal den Fall $a < b$, der offenbar auf ähnliche Weise gelöst werden kann; man braucht nämlich nur den Bruch $\frac{m_1}{m_2}$ ein wenig zu groß wählen und bekommt dann einen Näherungswert von der Form $\frac{m_1 k + 1}{m_2 k + 1}$. G. Eneström.

---

2 : 535, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 536,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2 : 537,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 539,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 293. — **2 : 541,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

---

2 : 547. Der von Herrn Cantor erwähnte Passus, wo Ramus seine Hoffnung, für die Geschichte der neueren Mathematik einen anderen Bearbeiter zu finden, ausspricht, verdient hier vollständig mitgeteilt zu werden, weil er zeigt, wie wenig man zuweilen die Verdienste seiner Zeitgenossen richtig zu würdigen versteht. Der Passus lautet: „Spero autem aliquem nostro exemplo excitatum recentiores mathematicos descriptnrum esse, ab eoque præcipue Franciscum Flussatem Candallam, genere quidem illustrem principem, sed mathematica gloria universae Galliae longe principem celebratum iri". Bekanntlich ist die mathematische Geschichtsschreibung der Ansicht des Ramus nicht beigetreten, denn in der Geschichte der Mathematik nimmt Fr. de Foix Candale einen sehr bescheidenen Platz ein, und zwar wesentlich als Herausgeber einer lateinischen Edition der *Elementa*, während die Verdienste vieler anderer Zeitgenossen des Ramus ausführlich behandelt werden. G. Eneström.

---

2 : 548, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2 : 561,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285.

2 : 566, Anm. 2) lies „circini" statt „circuli".

2 : 567, 568, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145.

2 : 580. Warum Z. 5 die Jahreszahl 1606 steht, verstehe ich nicht. Allerdings erwähnt Kästner an der von Herrn Cantor zitierten Seite 287 eine Ausgabe der *Geometrica practica* vom Jahre 1606, aber Kästner selbst hat die Originalausgabe (Rom 1604) benutzt, und der Kästnersche Bericht scheint die einzige Quelle des Herrn Cantor zu sein. Vielleicht ist Z. 5 die Jahreszahl 1606 nur ein Druck- oder Schreibfehler statt 1604.

In betreff der *Geometria practica* des Clavius möchte ich auf eine Stelle des 4. Buches (S. 178 der Auflage von 1606) hinweisen, die von besonderem Interesse ist, weil Clavius dort ein Verfahren lehrt, um ein Verhältnis in kleineren Zahlen auszudrücken, aus welchem Verfahren die Kettenbruchmethode leicht entwickelt werden kann. Wenn das gegebene Verhältnis $\frac{a}{b}$ $(a < b)$ ist, so setzt Clavius den Bruch unter die Form $\frac{1}{\frac{b}{a}}$, berechnet ferner durch Division die Zahl p_1 die der Gleichung $b = ap_1 + q_1$ $(q_1 < a)$ genügt, und gibt endlich als Näherungswert von $\frac{a}{b}$ den Bruch $\frac{1+1}{p_1 + p_1 + 1} = \frac{1}{p_1 + \frac{1}{2}}$ an. Er nimmt also $\frac{1}{2}$ als Näherungswert des Bruches $\frac{q_1}{a}$ an, aber offenbar liegt es sehr nahe, das Verfahren von Clavius anzuwenden, um einen besseren Näherungswert von $\frac{q_1}{a}$ zu berechnen, und dann gelangt man sofort zur Kettenbruchmethode. Freilich hat Clavius selbst diesen Schritt nicht gemacht, sondern um bessere Näherungswerte zu erzielen, nimmt er
$\frac{2+1}{2p_1 + 1 + p_1}$ oder $\frac{2+1}{2p_1 + 1 + p_1 + 1}$, je nachdem $\frac{1}{p_1 + \frac{1}{2}}$ zu klein oder zu groß ist.

Beiläufig bemerke ich daß das Kap. 9 der *Epitome arithmeticae practicae* (1583) des Clavius die Überschrift: „Reductio fractorum numerorum ad minimos numeros, sive terminos" hat, aber hier handelt es sich nicht um Näherungsmethoden.

G. Eneström.

2 : 580—581, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207.

2 : 581. In betreff des Simon Jacob bemerkt Herr Cantor: „Er verfaßte ein Rechenbuch nebst Geometrie als zweite Bearbeitung eines bloß der Rechenkunst gewidmeten Werkes und schrieb 1552 die Vorrede dazu. Der Druck begann 1557, wurde aber unterbrochen. Als der Verfasser dann 1564 starb,

besorgte sein Bruder Pancraz Jacob 1565 die neue Auflage, welche selbst wiederholt gedruckt wurde". Fragt man nun: wann erschien die erste Auflage der Arbeit, deren neue Auflage von Pancraz Jacob besorgt wurde? Oder ist diese erste Auflage überhaupt nicht erschienen?, so kann man aus den Angaben des Herrn Cantor keine bestimmten Antworten bekommen, und in der Tat ist die Auskunft, die Pancraz Jacob 1565 in seiner Vorrede gab, nicht ganz klar. Meines Erachtens sind die Angaben dieser Vorrede auf folgende Weise zu deuten: Simon Jacob verfaßte ein Rechenbuch nebst Geometrie und schrieb 1552 die Vorrede dazu. Dies Werk bestand aus drei Teilen, nämlich zwei arithmetischen und einem geometrischen. Der erste Teil (also Bl. 1—63 der Auflage von 1565) wurde in etwas umgearbeiteter Form („in Frag vnd Antwort gericht", „Frag vñ Antwort weiß") von Simon Jacob selbst 1557 veröffentlicht (vermutlich in einer sehr kleinen Auflage), aber das Übrige blieb damals ungedruckt. Nach seinem Tode fand der Bruder das ursprüngliche Mannskript („Arithmetic vnnd Geometri . . . fein rein abgeschrieben bey einander") wieder, und gab das vollständige Werk 1565 heraus. Von der ersten Auflage kenne ich kein Exemplar, und sie scheint allen Bibliographien unzugänglich gewesen zu sein. Von dem vollständigen Werke sind eigentlich nur zwei Auflagen erschienen, nämlich 1565 und 1600; von der zweiten Auflage gibt es Exemplare mit 1612 neu gedrucktem Titelblatt, und andere Exemplare scheinen das Druckjahr 1599 zu haben. Die von Murhard (*Litteratur der mathematischen Wissenschaften* I, Leipzig 1797, S. 172) zitierte Auflage von 1560, die auch die wälsche Praktik, also den zweiten Teil enthalten haben würde, existiert sicherlich nicht. G. Eneström.

2:582, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2**:583, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2**:585, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2**:592, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2**:593, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2**:594, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2**:597, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2**:599—600, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2**:602, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2**:603—604, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108.

2:605. Nach Fr. Ritter (*Fr. Viète*, 1895) hat Vieta allerdings das Problem, das ihm im Oktober 1594 vorgelegt wurde, sofort gelöst, aber das Responsum wurde erst um die Mitte 1595 veröffentlicht. A. Sturm.

2:610, siehe BM **7**$_3$, 1906/07, S. 388. — **2**:611, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2**:612, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2**:612—613, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2**:613, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306; **7**$_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2**:614, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**:617, 619, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2**:620, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**:621, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402; **7**$_3$, 1906/7, S. 214, 389.

2:621. Das wenige, das wir über Bombellis Persönlichkeit kennen, ist zusammengestellt teils von Libri an der von Herrn Cantor zitierten Stelle, teils von S. Gherardi (*Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna, übers. von M. Curtze*, Berlin 1871, S. 89). Dagegen scheint es bisher unbeachtet zu sein, daß Bombelli nach seiner eigenen Aussage nicht nur eine Algebra sondern auch eine Geometrie verfaßt hatte, die 1572 fast fertig war und die Bombelli beabsichtigte recht bald zu veröffent-

lichen (siehe *L'algebra*, Bologna 1572, S. 648—649). Warum die Veröffentlichung unterblieb, kann wohl nie ermittelt werden; darf man daraus vielleicht schließen, daß BOMBELLI kurze Zeit nach 1572 gestorben ist?

Jedenfalls ist es zu bedauern, daß die BOMBELLIsche Geometrie verloren ging, denn darin fand sich wohl der Nachweis, daß der irreduzible Fall der kubischen Gleichung mit der Dreiteilung des Winkels in direkter Beziehung steht (siehe *L'algebra*, S. 321). In den zuverlässigsten mathematisch-historischen Arbeiten wird noch angegeben, daß VIÈTE zuerst diese Beziehung erkannte (siehe z. B. A. v. BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* 1, Leipzig 1900, S. 171). G. ENESTRÖM.

2 : 622. Da Herr CANTOR Z. 1—2 bemerkt: „Eine wichtige Stelle des ersten Buches [der BOMBELLIschen Algebra] ist lange Zeit so gut wie unbeachtet geblieben", und dabei in der Fußnote 1) auf eine Abhandlung von G. WERTHEIM aus dem Jahre 1898 hinweist, so ist es angebracht, hier hervorzuheben, daß A. FAVARO diese Stelle schon 1874 (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 495—498) zum Abdruck gebracht und erläutert hat. WERTHEIM behauptet freilich, daß FAVARO die Stelle nicht nach Gebühr gewürdigt hat, aber diese Behauptung ist meines Erachtens unzutreffend; bei BOMBELLI findet sich nämlich keine Kettenbruch-*Entwickelung*, sondern nur eine Kettenbruch-*Methode*, d. h. ein Verfahren, das in Wirklichkeit mit der Kettenbruch-Entwickelung übereinstimmt, aber ohne daß Kettenbrüche benutzt werden. In der Tat hat sich BOMBELLI gerade des Verfahrens bedient, das Herr CANTOR Z. 13—19 angibt, und wobei ja keine Kettenbrüche ersichtlich werden. Die Behauptung von WERTHEIM, daß BOMBELLI „tatsächlich Kettenbrüche gebildet hat", ist also zum mindesten irreleitend. G. ENESTRÖM.

2 : 623, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147.

2 : 624. Es wäre nicht ohne Interesse hier zu erwähnen, auf welche Weise BOMBELLI (S. 180—181 seiner *Algebra*) das Auffinden einer Wurzel der Gleichung $4p^3 - 3cp = a$ erleichterte. BOMBELLI ging von den Gleichungen

$$p^2 + q = c, \quad p^3 - 3pq = a$$

aus, und da er voraussetzte, daß p und q beide positiv sind, konnte er sofort aus diesen Gleichungen folgern, daß

$$p < \sqrt{c}, \quad p > \sqrt[3]{a}.$$

Da er ferner nur rationale Werte von p in Betracht zog, und da p eine ganze Zahl sein muß, wenn c und a ganze Zahlen sind, so war es oft sehr leicht, den Wert von p zu finden, wenn ein solcher überhaupt existierte. In dem von Herrn CANTOR S. 625 erwähnten Zahlenbeispiele war $a = 2$, $c = 5$ also

$$\sqrt[3]{2} < p < \sqrt{5}$$

so daß hier nur der Wert $p = 2$ in Betracht kommen konnte.

G. ENESTRÖM.

2 : 625. Nachdem Herr CANTOR die Berechnung des reellen Wertes des Ausdruckes $\sqrt[3]{4 + \sqrt{-11}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{-11}}$ auf die Lösung der Gleichung

$(2p)^3 - 9(2p) = 8$ zurückgeführt hat, bemerkt er: „Kann man, was in diesem Beispiele nicht zutrifft, hieraus mit Leichtigkeit $2p$ ermitteln, so ist die Aufgabe gelöst". Es ist natürlich sehr schwierig zu entscheiden, was mit Leichtigkeit ermittelt werden kann, aber meines Erachtens ist es viel leichter sofort zu sehen, daß der Wert $2p = -1$ der fraglichen Gleichung genügt, als daß die von Herrn Cantor einige Zeilen weiter unten erwähnte Gleichung bei $2p = 4$ eine Identität wird. Auf Grund des Wertes $2p = -1$ bekommt man also

$$\sqrt[3]{4+\sqrt{-11}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{-11}} = \frac{-1-\sqrt{-11}}{2} + \frac{-1+\sqrt{-11}}{2} = -1.$$

Indessen konnte Bombelli diese Wurzel nicht benutzen, denn nach seinem Verfahren (siehe die vorangehende Bemerkung) mußte p eine positive Zahl sein, die zwischen $\sqrt[3]{4}$ und $\sqrt{3}$ lag. Dagegen hätte er mit Leichtigkeit durch das von ihm S. 292—293 angegebene Verfahren aus der Gleichung $(2p)^3 - 9(2p) = 8$ die Gleichnng $(2p)^2 - 2p + 1 = 9$ herleiten und dann sofort die positive Wurzel $2p = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$ finden können. Da indessen diese Wurzel nicht rational ist, hat er sicherlich *aus diesem Grunde* darauf verzichtet, einen reellen Wert des Ausdrucks zu berechnen. G. Eneström.

---

2 : 626, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2 : 632,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 644,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271.

---

2 : 666. Die Angabe, daß die *Geometria practica nova et aucta* von Schwenter erstmalig 1618 im Drucke erschien, ist nicht ganz genau. Zuerst ist der Titel der ersten Auflage nicht „Geometria practica nova et aucta" sondern nur *Geometria practica nova*. Ferner scheint es unmöglich, genau zu bestimmen, ob die erste Auflage der zwei ersten Traktate wirklich 1618 erschien, weil diese zwei Traktate kein Druckjahr haben. Als Erscheinungsjahr des ersten Traktates gibt Doppelmayer (siehe die von Herrn Cantor zitierte Stelle der Kästnerschen *Geschichte der Mathematik*) 1616 an, aber sicherlich mit Unrecht, denn die Dedikationsschrift der ersten Auflage des *zweiten* Traktates ist vom 1. Januar 1617 datiert, und in der Vorrede dieses Traktates wird ausdrücklich erwähnt, daß der erste Traktat „hette billich sollen für diesem [d. h. vor dem zweiten] gedrucket werden, wañ es allerhand vngelegenheit nicht verhindert, vnnd solcher [d. h. der erste Traktat] hette biss in die künfftige Messe nicht müssen verschoben werden". Der erste Traktat erschien also nach dem 1. Januar 1617 und in Wirklichkeit ist die Dedikationsschrift vom 16. März 1618 datiert. Als Erscheinungsjahr des dritten Traktates gibt Doppelmayer unrichtig 1619 an; am Ende der letzten Seite steht nämlich: „Gedruckt zu Nürnberg ... anno M.DC.XVIII" und die Dedikationsschrift ist vom 15. September 1618 datiert. Endlich erschien der vierte Traktat 1627; auf der letzten Seite steht: „Gedruckt und Verlegt zu Nürnberg durch Simon Halbmayern, im Jahr M.DC.XXVII". Herr Cantor sagt freilich S. 669, daß die erste Auflage von 1618 den vierten Traktat nicht enthält, aber die

Traktate wurden als besondere Schriften herausgegeben, so daß man mit besserem Rechte sagen kann, die Ausgabe der ersten Auflage sei erst 1627 mit dem Erscheinen des vierten Traktates beendet. Übrigens trägt dieser Traktat noch in der Auflage von 1641 den Titel: *Geometricae practicae* [nicht „novae et auctae"] *tractatus IV*. G. ENESTRÖM.

2:667. Die Gründe, warum SCHWENTER in betreff der Konstruktion des Neunecks absichtlich von der DÜRERschen Vorschrift abwich, hat er selbst an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle angegeben, nämlich: 1) daß DÜRER die Konstruktion „mechanice" aber nicht „geometrice demonstrirt"; 2) daß DÜRER nicht lehrt, wie man in einen *gegebenen* Kreis ein Neueck einschreiben soll. Der zweite Grund ist freilich, wie Herr HUNRATH (BM 6_3, 1905, S. 250—251) hervorgehoben hat, durchaus belanglos; was der erste Grund eigentlich bedeuten soll, dürfte schwer zu ermitteln sein. Möglich ist es allerdings, daß SCHWENTER durch „geometrice demonstriren" eine exakte, durch „mechanice demonstriren" eine annähernde Konstruktion bezeichnen wollte, aber auf der andern Seite wäre es seltsam, wenn er nicht selbst verstanden hätte, daß eine Näherungskonstruktion nicht durch eine so unwesentliche Änderung wie die seine in eine exakte Konstruktion verwandelt werden kann.

G. ENESTRÖM.

2:669, siehe BM 5_3, 1904, S. 203. — **2:670**, siehe BM 6_3, 1905, S. 403; 7_3, 1906/7, S. 391. — **2:674**, siehe BM 4_3, 1903, S. 88. — **2:683**, siehe BM 2_3, 1901, S. 148. — **2:687**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 294. — **2:689**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 391.

2:689. LIÉVIN HULSIUS est certainement mort avant la fin de 1606, conformément à l'indication de QUETELET rapportée par M. ENESTRÖM (BM 7_3, 1906/7, p. 391). JEAN REINHARD ZIGLER écrit, de Mayence, à KEPLER, à la date du 1er août 1606 (*Epistolae ad KEPPLERUM scriptae*, ed. HANSCHIUS, Leipzig 1718, p. 354):

> Quid postremis meis ad te litteris acciderit equidem ignoro, vereor simile quid passas, cum instrnmento quodam geometrico, quod eodem tempore ad LEVINUM HULSIUM (quem è vivis tum abiisse ignorabam) destinaveram. Nam jam tandem hoc mense Julio sine ullis litteris ad me Praga instrumentum remittitur. H. BOSMANS.

2:693, siehe BM 4_3, 1903, S. 287; 7_3, 1906/7, S. 394—395. — **2:700, 701, 703, 704, 705**, siehe BM 1_3, 1900, S. 271—273.

2:714. Die Bemerkung: „Seine [d. h. SARASA's] *Solutio problematis a R. P. MARINO MERSENNO propositi* von 1649 war . . . weniger eine Erläuterung des *Opus geometricum* des GREGORIUS — eine solche stellte SARASA für später in Aussicht, ohne alsdann sein Versprechen einzulösen — als ein Gegenangriff gegen MERSENNE", ist zum Teil nnrichtig. Vermutlich hat Herr CANTOR die Schrift von SARASA nicht selbst gesehen, sondern nnr das KÄSTNERsche Referat benutzt, wo S. 253 steht: „SARASA macht Hoffnung zu mehr Erläuterungen, die er aus des Verfassers Munde bekommen hat". Indessen beruht die KÄSTNERsche

Angabe sicherlich auf einem Mißverständnisse der Worte Sarasa's (a. a. O S. 24 Z. 1—2): „Prodromus erit itaque tractatus hic, & quasi prælusio venturi Operis". Aber das „venturum opus" ist selbstverständlich die Arbeit des Grégorie de St. Vincent, die Sarasa im vorangehenden Absatze (S. 23, Z. 5—3 v. u.) mit den Worten „licet Auctor ipse materias illas fusius elegantiusque alio quod molitur, ut dixi, volumine susceperit explicandas, non videbatur tamen diutius expectandum" in Aussicht stellte. Vermutlich ist es diese Arbeit, die 1668 unter dem Titel *Opus geometricum posthumum ad mesolabium* erschien. Dagegen habe ich nicht im ganzen Traktate des Sarasa die geringste Andeutung auffinden können, daß er selbst eine Erläuterung des *Opus geometricum* in Aussicht gestellt hat. G. Eneström.

2:715, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 412. — **2:716**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2:717, 718**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2:719**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:720**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2:721**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **6**$_3$, 1905, S. 404—405.

2:726. Zons veröffentlichte auch ein Rechenbuch (Köln 1613): *Ein neues wohlgegründetes Kunst- und Rechenbuch auff der Ziffer, von nützlichen Kauffmanns Regulen in allen handtierungen, Gewerben, Kauffschlagen. Sampt vnderricht, wie man ein jeden Eych auss bewehrt grundt ein Visirstab verfertigen vnd bezeichnen soll.* A. Sturm.

2:727, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 392. — **2:741**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S 395—396. — **2:742**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:747**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2:749**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88.

2:765. Herr Cantor hemerkt, daß Schwenter und Cataldi unabhängig voneinander zur *Erfindung* der Kettenbrüche gelangt waren, aber Schwenter selbst gibt sich gar nicht als *Erfinder* an, sondern verweist nach der von Herrn Cantor (S. 763) wörtlich angeführten Stelle der dritten Auflage des ersten Traktates der *Geometria practica nova* auf Regeln, die „beyde (!) den Logisticis und Rechenmeistern" zu finden sind. Ganz derselbe Verweis findet sich schon in der ersten Auflage (S. 58—59) des zweiten Traktates der *Geometria practica nova* und da diese Auflage sehr selten ist, bringe ich hier den ganzen Passus über Kettenbrüche volllständig zum Abdruck.

Wie man aber zwo grosse zahlen, so numeri primi vnd Arithmetice nicht können auffgehebt werden, dem gehrauch nach kleiner machen soll, seynd bey dem (!) Logisticis vnd Rechenmeistern viel feine Regeln zu finden. Die beste, geheimeste vnd künstlichste will ich bieher setzen. Ich soll die zwo zahlen 233. vnd 177. als welche für sich numeri primi. Oder aber die proportion $\frac{177}{233}$ in kleinern zahlen Mechanice außsprechen. So mache ich nun folgende disposition oder Ordnung.

			1
233		1	0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	29(!)	104
0	0	177	233

Wann nun ordentlich hierinnen verfahren, finde ich auß gemelter Tafel, dass ich für $\frac{177}{233}$ nemen kan $\frac{79}{104}$ oder $\frac{19}{25}$ oder aber endlich $\frac{3}{4}$ welchs dann ein (!) sehr nützliche Regel zu diesem vnserm messen.

Aus welchem Rechenbuche Schwenter die Regel entnahm, ist mir zurzeit unbekannt, aber ich mache darauf aufmerksam, daß die Regel leicht aus einem Satze der *Geometria practica* von Clavius hergeleitet werden kann (siehe oben die Bemerkung zu 2 : 580). G. Eneström.

---

2 : 766, siebe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393. — **2 : 791,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298.

---

3 : 23. Als Ergänzung einer früheren Bemerkung (BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298) kann erwähnt werden, daß Renaldini allerdings vor 1668 ein Buch veröffentlicht hatte, das nicht nur auf dem Titelblatte, sondern auch in Wirklichkeit etwas „de resolutione atque compositione mathematica" enthielt. Dies Buch hat den Titel: *Opus algebricum In quo praeter Communem, & antiquam Algebram Nova quoque pertractatur; atque firmissimis demonstrationibus ambae muniuntur. Ars analytica, Quam perobscurè Franciscus Vieta literis mandavit, satis, superque declarata Traditur. Methodus verò, tàm Nova, quàm antiqua, Resolutionis, atque Compositionis Mathematicae explicatur* .... (Anconae ... M.DC.XXXXIIII; die „Censura" ist freilich 1646 datiert). Aber dies Buch kann ebenso wenig wie die Arbeit vom Jahre 1655 als eine ältere Auflage der Schrift *De resolutione et compositione mathematica* bezeichnet werden; die Abteilung „Tractatus de methodo, tam nova, quam antiqua, resolutionis et compositionis mathematicae" umfaßt nämlich nur 46 Quartseiten, und enthält nur einige sehr einfache Konstruktionsaufgaben, jedenfalls *nichts* über angenäherte Kreisteilung. G. Eneström.

---

3 : 24, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394.

---

3 : 37. Scheffelts 1697 in Ulm erschienenes Werk *Unterricht von dem Proportional-Circul* ist größtenteils entnommen aus Nikolaus Goldmann *De*

circino proportionis tractatus, der in lateinischer und deutscher Sprache 1679 in Leyden erschien. A. Sturm.

3:37. Hier könnte vielleicht erwähnt werden, daß Jakob Bernoulli 1687 das später sogenannte Malfattische Problem für gleichschenklige Dreiecke löste. Die Lösung ist das 2. Lemma der Abhandlung *Solutio tergemini problematis, arithmetici, geometrici et astronomici* (Basel 1687) und ist in Jacobi Bernoulli *Opera* I (Genevae 1744, S. 303—305) wieder abgedruckt. Das Problem lautet bei Jakob Bernoulli: „In triangulo isoscele[1] ... inscribere tres circulos se mutuo et trianguli latera tangentes ...“ G. Eneström.

3:39, siehe BM 6_3, 1905, S. 407. — **3:40**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 394. — **3:45—48, 49, 50**, siehe BM 1_3, 1900, S. 512—513. — **3:57**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 298—299. — **3:63**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 93—94. — **3:68**, siehe BM 7_3, 1906/7, S 299. — **3:70**, siehe BM 2_3, 1901, S. 360.

3:78. Fabris Synopsis ist aus dem Jahre 1669, wie es S. 162 richtig heißt. A. Sturm.

3:82, siehe BM 5_3, 1904, S. 308. — **3:97**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 394. — **3:100**, siehe BM 2_3, 1901, S. 149; 7_3, 1906/7, S. 299—300. — **3:102**, siehe BM 6_3, 1905, S. 318; 7_3. 1906/7, S. 300. — **3:112**, siehe BM 4_3, 1903, S. 209—210; 6_3, 1905, S. 318. — **3:116**, siehe BM 1_3, 1900, S. 513. — **3:117**, siehe BM 1_3, 1900, S. 518.

3:118. Das Werk Bakers ist in lateinischer und englischer Sprache, die Texte gegenüberstehend, geschrieben. Daher hat es außer dem englischen auch den lateinischen Titel: *Clavis geometrica catholica sive janua aequationum reserata.* A. Sturm.

3:118. Was Herr Cantor mit der Behauptung, daß Tschirnhausens algebraische Untersuchungen einmal fast der Vergessenheit anheimgefallen waren, meint, ist mir nicht näher bekannt, aber jedenfalls ist die Behauptung meiner Ansicht nach kaum begründet. Bekanntlich hat Lagrange in seinen berühmten *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* ausführlich die Tschirnhaussche Methode auseinandergesetzt, und die Lagrangesche Arbeit wurde recht bald durch die Michelsensche Übersetzung (*Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen.* III, Berlin 1791, S. 271—530) allgemein zugänglich gemacht. Man könnte also höchstens sagen, daß die Tschirnhausschen Untersuchungen vor Lagrange fast der Vergessenheit anheimgefallen waren, aber auch diese Behauptung ist meines Erachtens unbegründet. Eigentlich hat ja Tschirnhaus nur einen mißlungenen Versuch gemacht, die allgemeine Gleichung n-ten Grades zu lösen, und es gab keinen eigentlichen Anlaß, diesen Versuch in den Lehrbüchern zu nennen. Nichtsdestoweniger findet man eine Erwähnung desselben in den folgenden Arbeiten, von denen die meisten sehr verbreitet waren:

1) Im Simonschen Berichte *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert* (Leipzig 1906, S. 149) wird angegeben „Jakob Bernoulli, Oeuvres complètes [!] (1747) [!] für den Fall des gleichseitigen [!] Dreiecks“.

J. PRESTET, *Nouveaux elemens des mathematiques* II, Paris 1689, S. 411—414. Kritik des TSCHIRNHAUSschen Verfahrens.

M. ROLLE, *Traité d'algebre*, Paris 1690, S. 222—226. Entgegnung der PRESTETschen Kritik.

CH. REYNEAU, *Analyse demontrée* I, Paris 1708, S. 251—256. Darstellung des Verfahrens ohne Kritik, ohne Nennung von TSCHIRNHAUS' Name.

CHR. WOLFF, *Elementa matheseos universae* V, Halle 1741, S. 313—314. Kritik des Verfahrens.

A. G. KÄSTNER, *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*. Göttingen 1760, § 290 (Aufl. 2, Göttingen 1767, S. 147; Aufl. 3, Göttingen 1794, S. 179—180). KÄSTNER erwähnt beiläufig die TSCHIRNHAUSsche Methode und macht gegen dieselbe eine, freilich unzutreffende und fast kindische Ausstellung.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 122, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM 1_3, 1900, S. 513; 4_3, 1903, S. 399; 7_3, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM 3_3; 1902, S. 407—408; 4_3, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM 4_3, 1903, S. 288.

---

3 : 129—130. Bei der Erwähnung von LA HIRES und RÖMERS Untersuchungen über die Epicycloide wäre es vielleicht angebracht, auch des gleichzeitigen Abbé DE VAUMESLE zu gedenken (vgl. G. LORIA, *Spezielle algebraische und transscendente Kurven*, Leipzig 1902, S. 498), von dem CHR. HUYGENS in einer Aufzeichnung bezeugt: „Primus autem, qui de Epicycloide ostenderit geometricas curvas esse et spatia earum mensurari posse, fuit Presbyter quidam Normannus, nomine DE VAUMESLE, cujus ea de re literas aliquot ad me datas adservo"; und ferner in einer anderen Annotation: „Mr. DE VAUMESLE, Religieux en Normandie, m'ayant mandé qu'il avoit trouvé la mesure de la ligne épicycloide, lorsque le cercle générateur et le cercle immobile sont égaux, cela m'a donné occasion de chercher cette démonstration générale" (siehe *CHRISTIANI HUGENII aliorumque saeculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philosophicæ. Ex manuscriptis ... ed. P. J. UYLENBROEK*, Hagæ Comitum 1833, Fasc. 2, p. 40, 46).

Die im obigen Zitate erwähnte „démonstration générale" wurde von HUYGENS der Pariser Akademie in den Sitzungen vom 3. Dez. 1678 und 7. Jan. 1679 mitgeteilt und findet sich nach dem Konzepte abgedruckt bei UYLENBROEK Fasc. 2, p. 42 ff.

Drei Briefe des Abbé DE VAUMESLE an HUYGENS aus den Jahren 1678 und 1679, welche diesen Gegenstand behandeln, sind a. a. O. p. 47—55 und dann *Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS* 8, La Haye 1899, p. 115, 125, 189 abgedruckt.

Abgesehen von einer kurzen Erwähnung in der Vorrede zu LA HIRES *Oeuvres diverses* (Mém. de l'Ac. des Sciences 1666—1699, T. **9**), scheint über den Abbé DE VAUMESLE weiter nichts bekannt zu sein (s. *Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS* 8, p. 115, Anm. 1).

Stockholm. C. GRÖNBLAD.

---

3 : 131, siehe BM 4_3, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM 3_3, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM 4_3, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM 2_3, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM 1_3, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM 3_3, 1902,

S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303.

---

3 : 232. Zu denen, die sich vor Huyghens mit der logarithmischen Kurve beschäftigten, gehört Pardies, der in seinen *Elementa geometriae* (1671) durch diese Kurve das Rechnen mit Logarithmen und ihre Auffindung erleichtern will. A. Sturm.

---

3 : 244—245, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 270,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 364,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 367,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319.

---

3 : 397. Es wäre vielleicht nützlich, wenn auch nicht nötig, hier auf Waessenaers Verfahren (S. 798 des zweiten Bandes der *Vorlesungen*) hinzuweisen und zu bemerken, daß Newtons Methode offenbar eine Verallgemeinerung jenes Verfahrens ist. Der Grundgedanke ist in beiden Fällen durchaus derselbe, aber nach Waessenaers Verfahren kann man nur Faktoren von der Form $y+k$, ermitteln, wo k eine positive ganze Zahl ist. Freilich kann man äußest leicht das Verfahren so modifizieren, daß auch Faktoren von der Form $y-k$ ermittelt werden können, aber für Faktoren von der Form $ny \pm k$ paßt es nicht.
G. Eneström.

---

3 : 398, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305—306.

---

3 : 398. In betreff der früher (BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305) erwähnten Leibnizschen Methode zur Aufsuchung rationaler Faktoren eines Polynoms, sollte vielleicht ausdrücklich bemerkt werden, daß Leibniz nur solche Polynome in Betracht zog, deren Nullstellen sämtlich reell sind, denn er sagt: „aequatio transformatur, ut omnes ejus radices fiant falsae“, und „radix falsa“ bedeutet eine reelle negative Wurzel. Aber die Methode ist auch ohne weiteres anwendbar, wenn die Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdot \cdot + a_n = 0$$

Wurzeln von der Form $x = -a + bi$ (a positiv) hat. Dagegen gilt sie nicht ohne weiteres, wenn diese Gleichung Wurzeln von der Form $a + bi$ (a positiv) hat, denn dann gibt es wenigstens einen Faktor von der Form $\alpha_0 x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2$ (α_1 positiv). In diesem Falle muß man eine obere Grenze A der reellen Teile der imaginären Wurzeln ermitteln, und $y + A$ statt x einsetzen. Für Polynome dritten Grades kann man indessen das Resultat leichter erzielen. Sei das gegebene Polynom

$$x^3 + x^2 + 4x + 30$$

so setzt man z. B. statt x die Zahl 40 ein, und erhält dadurch die Zahl $65790 = 2.3.3.5.17.43$. Jetzt versucht man mit den zwei Faktoren 43 und $2.3.3.5.17 = 1530$, von denen der erste dem mutmaßlichen Faktor $x + 3$ des Polynoms entspricht; da auf der anderen Seite $1530 = 38.40 + 10$, so würde nach der LEIBNIZschen Methode der andere Faktor des Polynoms $38x + 10$ sein, was unsinnig ist, da dieser Faktor zweiten Grades und zwar von der Form $x^2 \pm \alpha x + 10$ sein muß. Nun ist $1530 = (40)^2 - 2.40 + 10$, der entsprechende mutmaßliche Faktor des Polynoms ist $x^2 - 2x + 10$, und es ist leicht zu ermitteln, daß man wirklich die zwei reellen Faktoren des Polynoms $x^3 + x^2 + 4x + 30$ aufgefunden hat. G. ENESTRÖM.

3:408, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3**:412, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 306. — **3**:447, 455, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3**:473, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3**:477, 479, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152.

3:480. Die Bemerkung, daß der Briefwechsel zwischen NIKOLAUS II BERNOULLI und CHR. GOLDBACH erst 1843 in die Öffentlichkeit gelangte, ist, sofern sie sich auf die RICCATIsche Differentialgleichung bezieht, nur bis zu einem gewissen Grade richtig. CHR. GOLDBACH hat nämlich in der Einleitung zu seiner weiter unten S. 880 von Herrn CANTOR erwähnten Abhandlung *De casibus quibus integrari potest æquatio differentialis* $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ kurz über diesen Briefwechsel berichtet. Da GOLDBACH weder hier noch in der Abhandlung seiner von Herrn CANTOR auseinandergesetzten Reihenentwickelungsmethode gedenkt, so scheint es, als ob er selbst, und zwar sicherlich mit gutem Rechte, auf dieselbe kein Gewicht gelegt hätte. Auch in der folgenden Abhandlung von NIKOLAUS II BERNOULLI wird die Methode nur für einen speziellen Fall benutzt. G. ENESTRÖM.

3:497, 498, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3**:507, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72. — **3**:521, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3**:527, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 95. — **3**:535, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3**:536, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3**:560, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319—321. — **3**:565, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3**:571, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72. — **3**:578, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3**:582, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 307. — **3**:586, 609, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309—310. — **3**:612, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 307—308. — **3**:614—615, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90; **7**$_3$, 1906/7, S. 308. — **3**:616, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 214, 408. — **3**:636—637, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3**:646—647, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3**:652, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3**:660, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3**:667, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3**:682, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 408. — **3**:686, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3**:689, 695, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3**:736, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 111. — **3**:750, 758, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3**:759, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3**:760, 766, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3**:774, 798, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3**:819, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 321. — **3**:845, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3**:848, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

3:880. Die hier erwähnte Abhandlung von NIKOLAUS II BERNOULLI wurde nach seinem Tode von DANIEL BERNOULLI redigiert. In einem Briefe von diesem an CHR. GOLDBACH vom 28. Mai 1728 findet sich nämlich folgender Passus: „j'aurai l'honneur de vous dire ici que j'ai fait des extraits des manuscrits

de feu mon frère et que j'en ai formé un mémoire qui sera imprimé immédiatement après le vôtre" (siehe FUSS, *Correspondance mathématique* II, St. Pétersbourg 1843, S. 260). Wenn die Randangabe der Petersburger Commentarii, daß die *Analysis aequationum quarundam differentialium* am 1. Juli 1726 gelesen wurde, richtig ist, so war die Abhandlung jedenfalls im Juli 1726 noch nicht druckfertig. Nun starb ja NIKOLAUS II BERNOULLI schon am 26. Juli 1726, so daß er selbst kaum nach dem 1. Juli Entdeckungen auf dem betreffenden Gebiete gemacht haben kann, und es ist wohl nicht anzunehmen, daß DANIEL BERNOULLI etwas neues hinzugefügt hat, aber jedenfalls ist es nützlich, auf den fraglichen Umstand aufmerksam zu machen, weil er zeigt, mit welcher Vorsicht die Datierungen der Akademieschriften benutzt werden müssen. G. ENESTRÖM.

3:881, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3**:882, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3**:890, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3**:892, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3**:IV (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

131. Über drei bisher fast unbekannte italienische Mathematiker aus dem 15. Jahrhundert. Seit einigen Jahren habe ich Nachforschungen angestellt, um ausfindig zu machen, ob der von LIBRI im dritten Bande (S. 302—349) seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* veröffentlichte algebraische Traktat, der meiner Ansicht nach aus dem Ende des 15. Jahrhunderts herrührt (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, S. 106), irgend einem sonst bekannten Mathematiker zugewiesen werden könnte. Dabei stieß ich auf drei von FRANCESCO GHALIGAI in seiner *Pratica d'arithmetica* erwähnte florentinische Mathematiker, die wahrscheinlich alle drei in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts lebten, nämlich BENEDETTO DA FIRENZE, GIOVANNI DEL SODO und AGNOLO DEL CARMINE. Freilich habe ich bisher keinen bestimmten Grund anzunehmen, daß irgend einer von diesen der Verfasser des fraglichen Traktates ist, aber in jedem Falle wäre es von Interesse, etwas näheres über diese zu erfahren, und ich erwähne hier das wenige, das ich selbst gefunden habe.

BENEDETTO DA FIRENZE wird von LIBRI zweimal (a. a. O. II, S. 206; III, S. 146), aber nur im Vorübergehen genannt; GHALIGAI zitiert ihn öfter, einmal als „grand' huomo in Aritmetrica" (a. a. O., Bl. 46^a, 55^a, 65^a, 71^a, 75^b, 80^a, 80^b) und schreibt ihm u. a. gewisse Sätze über Zins- und Gesellschaftsrechnung sowie über Rechnung mit irrationalen Größen zu. BENEDETTO hat einen *Tractato dabbacho* verfaßt, von welchem BONCOMPAGNI fünf Handschriften kannte (Cod. Ottob. 3004; Cod. Magliab. A. IX, n. 76; Cod. Magliab. A. XI, n. 27; Cod. Magliab. Palch. 9, n° 63; Cod. Paris. Fonds français n. 8109; vgl. *Catalogo della biblioteca* BONCOMPAGNI I, Roma 1898, S. 108). Eine sechste Handschrift, die aus der Zeit 1460—1464 herrührt, wurde vor einigen Jahren in einem Antiquariatskataloge ausgeboten. Aus dem was GHALIGAI sagt, kann man schließen, daß er BENEDETTO nicht persönlich gekannt hat, und daß dieser also vermutlich vor 1500 gestorben ist.

GIOVANNI DEL SODO war GHALIGAIS Lehrers (siehe a. a. O., S. 2^b, 65^a, 71^b), und scheint eine Algebra verfaßt zu haben, wo für die Potenzen der Unbe-

kannten gewisse ungewöhnliche Bezeichnungen und zum Teil auch besondere Namen benutzt worden sind; jedenfalls gibt GHALIGAI selbst an, daß er den letzten Abschnittt seines Werkes seinem Lehrer entnommen hat. Vielleicht ist GIOVANNI DEL SODO mit dem GIOVANNI SODERINI identisch, von dem eine Geometrie in der Biblioteca Magliabecchiana in Florenz aufbewahrt ist (cf. *Catalogo della biblioteca Boncompagni* I, S. 138). Vermutlich war GIOVANNI DEL SODO etwa 1460 geboren.

AGNOLO DEL CARMINE scheint ein älterer Zeitgenosse des GHALIGAI gewesen zu sein, also vielleicht etwa 1470 geboren, und wird von diesem oft zitiert (siehe a. a. O., Bl. 21^a, 25^a, 26^a, 26^b, 27^a), einmal als „maestro eccessiuo geometro", häufig als Fragesteller, z. B.: „fünf Zahlen a, b, c, d, e sind so beschaffen, daß $a:b = b:c = c:d = d:e$; wenn nun $b = 10$ und überdies $\frac{c+d}{a+b} = 7\sqrt{e}$, so wird gefragt, welche die Zahlen a, c, d, e sind". Über AGNOLO DEL CARMINE gibt es vielleicht Aufschlüsse in einer Handschrift von G. GARGANI: „Ruolo nominale di geometri, astrologi, cosmografi, abbachisti e matematici toscani", die BONCOMPAGNI besaß (siehe NARDUCCI, *Catalogo di manoscritti ora posseduti da D. B. Boncompagni*, seconda edizione, Roma 1892, S. 169). G. ENESTRÖM.

---

132. Über den französischen Mathematiker Pujos. Es ist bekannt, daß DESARGUES in seinem *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres d'un cone avec un plan* (1639) ein paarmal einen Mathematiker PUJOZ oder PUJOS erwähnt (siehe *Oeuvers de Desargues réunies et analysées par Poudra* 1, Paris 1862, S. 193, 218). Über diesen Mathematiker, der Beweise zweier wichtiger Sätze von DESARGUES gegeben hat, finden sich meines Wissens in den mathematisch-historischen Arbeiten gar keine biographischen Aufschlüsse; nicht einmal die Rechtschreibung des Namens scheint festgestellt zu sein. Es wäre darum von Interesse, eine besondere Untersuchung über diesen Mathematiker vorzunehmen, und als Ausgangspunkt dabei könnten vielleicht die folgenden Notizen benutzt werden.

Im Jahre 1638 erschien in Paris eine Brochüre (20 Druckseiten 4°) mit dem Titel *Refvtation de la maniere de trouuer vn quarré egal au cercle, rapportée ès pages 130 & 131, du liure nouuellement imprimé sous le titre de propositions mathematiqves de Monsieur de la Leu, demonstrées par I. Pujos: Et du pretendu triangle equilateral, mentionné au placard dudit sieur, du premier Ianuier 1632.* Aus dem Vorworte ersieht man, daß J. PUJOS im Jahre 1633 einen Brief über denselben Gegenstand veröffentlicht hatte, sowie daß er damals in La Rochelle wohnhaft war und sich nur kurze Zeit mit mathematischen Studien beschäftigt hatte; ferner wird darin erwähnt, daß er aus Gascogne herstammte. Aus dem oben angeführten Titel ersieht man weiter, daß J. PUJOS in Paris 1638 eine andere Schrift mit dem Titel *Propositions mathematiques de Monsieur de la Leu demonstrées* publizierte, und daß diese Schrift wenigstens 131 Druckseiten umfaßte. Weitere Aufschlüsse über JACQUES PUJOS finden sich in der *Correspondance de Descartes* (éd. CH. ADAM et P. TANNERY) II, S. 429, 540; III, S. 216. G. ENESTRÖM.

Réponse à la question 110[1]) sur les frères Français. Dans le *Mémoire sur la balistique* (Mémoires présentés à l'académie des sciences [de Paris] par les savants étrangers **10**, 1848, p. 619—764) de J. DIDION, on trouve mention d'un ouvrage manuscrit „Recherches sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistant, par F. FRANÇOIS, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de La Fère, an XIII", appartenant à la bibliothèque de l'école d'application de l'artillerie et du génie à Metz, et dont copie a été adressée à l'Institut de France. Après y avoir fait allusion p. 637 et 714, DIDION le cite p. 715 et en donne plus loin (p. 735—762) de nombreux et importants extraits. Il resterait à s'enquérir du sort des deux exemplaires de Metz et de Paris. On voit qu'en 1805, F. FRANÇAIS était professeur à La Fère. Comparez Nouv. ann. de mathém. 1862, p. 157—158 (DUPAIN) et 242—243 (VINCENT).

F. FRANÇAIS est mentionné aussi par S. F. LACROIX dans ses *Elémens d'algèbre à l'usage de l'école centrale des quatre nations* (voir 15e édition, Paris 1830, p. 371—372), à propos d'un problème des courriers; LACROIX y a publié aussi des extraits d'une communication de FRANÇAIS.

H. BROCARD.

1) Je me sers de cette occasion pour faire observer que le prénom du mathématicien CHARPIT, auquel se rapporte aussi la question **110**, était PAUL (voir la note de LACROIX à la page 349 du 3e tome [Paris 1802] de la nouvelle édition de l'*Histoire des mathématiques* de MONTUCLA). (G. E.)

Rezensionen.

Max C. P. Schmidt. Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik. Kulturhistorische Beiträge zur Kenntnis des griechischen und römischen Altertums. 1. Leipzig 1906. 8⁰, 134 S. 2.40 Mk.

Mit den meisten Kapiteln dieser interessanten Schrift können wir uns im allgemeinen einverstanden erklären; besonders angesprochen haben uns die Kapitel V (Thales von Milet), VI (Lineal und Richtschnur, etc.), VII (Milet, Ephesos, Samos), VIII (Pythagoras von Samos), IX (Herkunft des Wortes „Hypotenuse"), XI (Euklid von Alexandria), XV (Herkunft des Wortes „Summe"). Da die Arbeit schon recht ausführlich von F. Rudio (Berliner philolog. Wochenschrift, 1907, Sp. 202—213) besprochen worden ist, treten wir auf den Inhalt, soweit wir mit demselben einverstanden sind, nicht mehr näher ein; wir müssen aber unsere Verwunderung darüber ausdrücken, daß Herr Rudio so ohne weiteres das erste Kapitel hat durchgehen lassen. Herr Schmidt sagt p. 3: „Eine Zusammenstellung sämtlicher technischer Ausdrücke der elementaren Mathematik bietet das auffallende Bild einer seltsamen Sprachenvermengung, die für den oberflächlichen Blick willkürlich erscheint. Und doch ist in dieser Verwirrung der Sprachen eine gewisse Ordnung nicht zu verkennen, die uns den Schluß auf ein theoretisches Prinzip oder eine historische Ursache nahe legt. Diese feste Ordnung in dem scheinbaren Wirrwarr läßt sich durch folgende Regeln veranschaulichen.

Regel A. Die Termini der Raumlehre sind griechisch: Geometrie, Stereometrie, Peripherie, parallel, Kathete, Hypotenuse, homolog, Basis, Trapez, Rhombus, Zylinder, Prisma sind ein paar aus der übergroßen Fülle herausgegriffener Beispiele." Und auf derselben Seite weiter unten: „A. Der ersten Regel widersprechen folgende Termini. I. Lateinische Ausdrücke: Radius, kongruent, Quadrat, Punkt, Linie, Grade, Minuten, Sekunden, Dimension, Transversale, Kurven, Perpendikel, Normale, vertikal, konkav, konvex, Supplement, Komplement, Sekante, Tangente, Sektor, Segment, Konstruktion, Determination, direkt, indirekt, Proportion, Projektion". Nehmen wir hierzu noch eine Stelle aus dem Schlußkapitel (p. 120): „So schlief die Geometrie mit dem Ausgang des Altertums ein. Erst die Renaissance weckte sie zu neuem Leben. Diese aber ging an die Quelle. Sie wandte sich an den Euklid. — — — — Natürlich las bald alle Welt die Elemente griechisch. So ward die griechische Geometrie wieder geboren und die griechischen Termini wurden von neuem lebendig".

Dem Leser dieser Sätze wird zuerst auffallen, daß die Wörter, die eine Ausnahme von der Regel A bilden, zahlreicher sind als diejenigen, die der Regel genügen, Herr SCHMIDT wird diesem entgegenhalten, daß er von den griechischen Wörtern nur eine Auswahl gegeben habe. Aber wir dürfen wohl behaupten, daß wenn er auch alle aufgezählt hätte, die Zahl der lateinischen Wörter (denn auch hier sind nicht alle genannt) dennoch die der griechischen übersteigen würde. Aber dies ist Nebensache. Wir wollen jetzt dartun, daß diesem „Wirrwarr" kein „theoretisches Prinzip" zugrunde liegt, wohl aber eine „historische Ursache". Aber nicht die, daß erst wieder „die Renaissance die griechische Geometrie zu neuem Leben erweckt hat". Wohl waren ursprünglich alle Termini der Geometrie griechisch. Durch wen, wann und in welcher Sprache kam aber zuerst die griechische Geometrie ins Abendland? Gewiß nicht zuerst durch die griechischen Ausgaben zur Zeit der Renaissance! Nein, sondern durch die lateinischen Schriften der römischen Feldmesser, durch die sogenannte Geometrie des BOETHIUS (die, wenn auch nicht echt, so doch gewiß älter als 1100 ist), durch GERBERT (gest. 1003), durch die Übersetzer aus dem Arabischen im 12. Jahrhundert (wenn auch durch diese nur mittelbar), durch LEONARDO VON PISA (c. 1200), WILHELM VON MOERBECKE (c. 1265) und andere. Und nun durchgehe man einmal die Schriften der genannten Vermittler, und man wird in denselben alle die angeführten griechischen Termini aus der Geometrie und noch viel mehr wiederfinden! Und warum? Weil die genannten Gelehrten für viele griechische Ausdrücke keine kurzen passenden lateinischen Wörter zur Verfügung hatten. Wir wagen sogar die Behauptung aufzustellen: Wären den genannten Männern für alle griechischen Termini treffende lateinische Ausdrücke zu Gebote gestanden, so hätte die mittelalterliche und damit auch die neuere Mathematik *gar keine griechischen Ausdrücke mehr aufzuweisen*. Als dann nach der Renaissance die mathematischen Lehrbücher in Deutschland immer häufiger in deutscher Sprache verfaßt wurden, suchte man natürlich auch nach deutschen Wörtern für die mathematischen Termini, fand aber für viele keine passenden, und behielt deshalb die griechischen und lateinischen Wörter bei, wie man sie in den mittelalterlichen Schriften fand. Was hätte man auch für Trapez, Rhombus, Parallelogramm schreiben sollen? Die deutsche Sprache war hierfür so arm wie die lateinische. (Nebenbei sei übrigens bemerkt, daß heutzutage für viele dieser griechischen und lateinischen Ausdrücke der Geometrie deutsche Bezeichnungen gebraucht werden, und zwar kommen diese im Unterricht [wenigstens bei uns in der Schweiz] häufiger vor als die fremdsprachlichen. So sagt man statt Diameter, Peripherie, Basis, Segment, Sektor, Perpendikel, Supplement etc.: Durchmesser, Umfang, Grundlinie, Kreisabschnitt, Kreisausschnitt, Senkrechte, Ergänzung etc.) Daß die Rechenbücher mehr deutsche Ausdrücke aufweisen als die geometrischen Lehrbücher, hat seinen Grund wohl auch darin, daß die ersteren im Volke verbreiteter, populärer waren als die letzteren. Man hätte gewiß noch viele Wörter verdeutschen können, aber man kennt ja die Vorliebe der deutschen Gelehrten früherer Zeit für Fremdwörter; in unserer Zeit bestrebt man sich, diese soviel als möglich auszumerzen; für die Mathematik aber möchten wir diese Versuche nicht unterstützen: die Wissenschaft soll international bleiben.

Was nun die Behauptung anbetrifft: „Natürlich las bald alle Welt die Elemente griechisch" etc., so ist dieselbe ebenfalls ein großer Irrtum. Wohl mag zur Zeit der Renaissance die Lektüre der griechischen Historiker, Redner

und Dichter ihre heute noch andauernde Herrschaft in den Gelehrtenschulen begonnen haben, wohl erschien 1533 zu Basel die erste griechische Ausgabe des Euklides, aber die mathematischen und astronomischen Lehrbücher blieben die gleichen, die sie vorher waren, in erster Linie der *Algorismus* des Sacrobosco und seine *Sphaera*, dann einige Bücher des lateinischen Euklides, eine Perspektive (Optik), ein *Algorismus proportionum* und einige wenige andere; auf keiner Hochschule aber, noch viel weniger auf einem Gymnasium, wurde jemals der Euklid griechisch gelesen, das taten nur einige wenige mit den mathematischen Wissenschaften vertraute oder ihnen geneigte Humanisten. Herr Schmidt führt kurz vor der genannten Stelle einige Euklidausgaben an, die zu jener Zeit erschienen, doch wohl um seiner Behauptung mehr Nachdruck zu geben, aber sonderbarerweise fehlt darunter gerade die griechische; er sagt (p. 120): „In Venedig wurde 1505 zum ersten Male aus dem Griechischen der gesamte Euklid ins Lateinische übersetzt (Zamberti). Diese Übersetzung wurde 1509 wieder gedruckt (Paciolo)". Und aus diesen lateinischen Übersetzungen soll alle Welt den Euklid griechisch gelesen haben!

Regel B. (p. 3): „Die Termini der Zahlenkunde sind lateinisch. Addition, Subtraktion, Produkt, Quotient, plus, minus, positiv, irrational, imaginär, Permutationen, Kombinationen, mögen als wenige Beispiele für viele dienen". Eine große Zahl dieser Ausdrücke stammt natürlich aus dem Mittelalter und der neuern Zeit, was auch Herr Schmidt im 16. Kapitel bemerkt. Diejenigen aber, die die Römer (Boethius) schon gekannt haben, dürften meiner Ansicht nach zum größern Teile ebenfalls Übersetzungen aus dem Griechischen sein. Hier waren die Römer weniger in Verlegenheit, eigene Ausdrücke an Stelle der griechischen zu setzen, da das Rechnen ihrem ganzen Wesen näher lag und mehr entsprach als die theoretische Geometrie.

Regel C. (p. 3): „Die Termini der Bruchlehre sind deutsch. Wir reden von Bruch, Stammbruch, Kettenbruch, Nenner, Zähler, Teiler, heben, erweitern". Woher stammt denn unsere Rechenkunst? Ich denke, von den Arabern; durch die lateinischen Übersetzungen des Mittelalters, durch die Algorithmus-Schriften, wurde sie uns überliefert, und die Wörter „Bruch", „Zähler", „Nenner" sind nur die *deutschen Übersetzungen* der mittelalterlichen lateinischen Wörter, die teilweise wieder wörtliche Übersetzungen aus dem Arabischen sind. So heißt der Bruch im Arabischen al-kasr (od. kesr, von kasara = zerbrechen); Leonardo von Pisa übersetzte dies durch ruptus (numerus), es kommt aber bei ihm auch fractio vor; Zähler und Nenner heißen bei ihm denominans und denominatus, aber die spätern Algorithmus-Schriften haben numerator und denominator. Diese Ausdrücke sind allerdings nicht direkte Übersetzungen aus dem Arabischen, aber daß die arabischen Schriften über Rechenkunst die Grundlage für dieselben enthalten, beweist die Tatsache, daß in den westarabischen Rechenbüchern die Division einer kleinern Zahl durch eine größere al-tasmija = die Benennung = denominatio genannt wird. Soviel aber ist gewiß, daß unsere deutschen Wörter Bruch, Zähler und Nenner die Übersetzungen der mittelalterlichen fractio, numerator und denominator sind. Es ist also der Passus (p. 102): „Da das auch den Römern nicht gelungen ist, so mußte der Deutsche für seine Bruchrechnung deutsche Vokabeln erfinden und eine eigene Schreibweise verwenden", ganz unrichtig und zwar in bezug auf beide Schlußfolgerungen; denn auch die Schreibweise der Brüche ist nicht deutsche Erfindung: die Westaraber und Leonardo schrieben die Brüche schon wie wir,

Wir haben noch an drei weiteren Stellen des Buches Anstoß genommen: p. 99 sagt Herr SCHMIDT: „Die Lehre von der Algebra ist den Alten unbekannt". Der Verfasser meint natürlich die Buchstabenrechnung, denn er weiß ja wohl, daß DIOPHANTUS ein hervorragender Algebraiker war, und daß NESSELMANN im Jahre 1842 ein sehr gelehrtes Buch über „die Algebra der Griechen" geschrieben hat. Er führt ja auch p. 3 an, Algebra sei ein arabisches Wort, dann wird er auch seine ursprüngliche Bedeutung (die Lehre von den Gleichungen) kennen, die heutzutage noch bei den Mathematikern die maßgebende ist; leider wurde der Name im Laufe der Zeit ganz unrichtigerweise auf die Buchstabenrechnung oder allgemeine Arithmetik übertragen. — p. 106 heißt es: „Auch sie (die Römer) rechnen kaum je im Kopf, kaum je nach Regeln. Sie bedienen sich beständig des Rechenbrettes, des sogenannten abacus". Wie stellt sich der Herr Verfasser vor, daß die Römer die Multiplikation 53 · 37 auf dem Abacus ausgeführt haben? Sie rechneten eben im Kopf: 50 · 30 = 1500, 50 · 7 = 350, 30 · 3 = 90, 3 · 7 = 21, auf dem Abacus wurden dann die Zahlen 1500, 350, 90 und 21 durch die Calculi dargestellt und die Addition derselben vollzogen. Die Multiplikationen fanden sie eben nicht auf dem Abacus, diese mußten sie im Kopfe ausführen; gewiß war die Kenntnis des Einmaleins noch nicht so verbreitet wie heute, aber es ist nicht unwahrscheinlich daß die Römer die sogenannte komplementäre Multiplikation kannten und anwandten, mit deren Hilfe die Multiplikation der Zahlen von 6—9 auf diejenige der Zahlen von 1—5 zurückgeführt wurde. Es gab freilich auch ein Fingerrechnen, wir glauben aber nicht, daß dieses bei den Römern häufig angewandt worden sei. — p. 134 heißt es: „Tatsächlich bezeichnen additio, subtractio, multiplicatio nicht Rechnungsarten, sondern die einzelnen Rechenexempel. Das beweisen die Plurale multiplicationes (§ 120C Vgl. *πολλαπλασιασμοί* § 118D). Ein Begriff wie unser ‚die Multiplikation' ist den Alten so gut wie fremd." Was bedeuten denn bei DIOPHANT (Edit. TANNERY, p. 14) die Wörter Synthesis, Aphairesis, Pollaplasiasmoi anders als die Rechnungsarten der Addition, Subtraktion und Multiplikation? Daß hier bei der Multiplikation der Plural gebraucht wird, ist belanglos, steht doch p. 4, wo alle vier Grundoperationen, wieder allgemein aufgefaßt, angeführt werden, der Singular (allerdings Polyplasiasmos statt Pollaplasiasmos, poly wechselt häufig, auch beim Verbum, mit polla). Auch bei EUKLID kommt der Singular Pollaplasiasmos öfters vor (Edit. HEIBERG, II, p. 2, 14, 16 etc.); ebenso bei THEON VON SMYRNA (Kap. 13), wo er sagt, daß die heteromeken Zahlen sowohl durch Addition aus der Reihe der geraden Zahlen, als durch Multiplikation aus der Reihe der natürlichen Zahlen entstehen. Sogar eine *Definition* von Multiplikation (pollaplasiasmos) und Division (merismos) als Rechnungsoperationen findet der Verfasser im zweiten Bande der DIOPHANTausgabe TANNERYS (p. 6 und 10), allerdings in einer pseudepigraphischen Schrift aus dem 5. oder 6. Jahrhundert. Hätten wir überhaupt noch Schriften über Logistik, so ist wohl mit Sicherheit zu behaupten, daß wir darin besondere Kapitel mit den Namen der vier Operationen überschrieben finden würden. Das gleiche gilt wohl auch von den Römern; daß multiplicatio und divisio als allgemeine Bezeichnungen für diese Operationen bei BOETHIUS vorkommen, wird der Verfasser kaum in Abrede stellen können.

Zürich. H. SUTER.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8⁰. [1
20 : 2 (1907). — 22 (1907). — 23 (1907).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2
7_3 (1906) : 4. — [Rezension des Bandes 6:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest scient. 11_3, 1907, 633—635. (H. Bosmans.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [3
1907 : 1.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, D. J. Korteweg, W. Kapteyn, J. C. Kluyver, P. H. Schoute. Amsterdam. 8⁰. [4
15 : 1 (avril — octobre 1906).

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematikerkongresses, herausgegeben von A. Krazer (1905). [Rezension:] Revue génér. d. sc. 17, 1906, 712. [5

Congrès international d'histoire des sciences. IIIme section. Tenue à Genève 1904. Rapports et comptes rendus publiés par Ed. Claparède (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 635—638. (H. Bosmans.) [6

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^3 (1907). [Selbstbericht:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 253—254. — [Rezension:] Biblioth. Mathem. 7_3,

1907, 398—406. (G. Eneström). — Deutsche Literaturz. 28, 1907, 1084. — Mathesis 7_3, 1907, 153 — [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 378—379. (F. Rudio, G. Eneström.) — 2^2 (1900) [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 380—393. (G. Eneström, A. Favaro.) — 3^3 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 393—396. (G. Eneström.) [7

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik herausgegeben von M. Cantor. Vierter Band. Von 1759 bis 1799. Zweite Lieferung. Kombinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Reihen. Imaginäres. Von E. Netto. Elementare Geometrie. Von V. Bobynin. Leipzig, Teubner 1907. [8
8°, S. 201—402. — [5.60 Mk.] — [Bericht über das Heft 1:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 254. (M. Cantor.)

Ball, W. W. R., Histoire des mathématiques. Traduite par L. Freund. 1 (1906). [Rezension:] Mathesis 7_3, 1907, 153—154. — Revue génér. d. sc. 17, 1906, 338. [9

Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Neudruck. Leipzig, Göschen 1906. [10
16°, 152 S. — [0.80 Mk.] — Unveränderter Abdruck der ursprünglichen Stereotypplatten.

***Arrighi, G. L.,** La storia della matematica in relazione con lo sviluppo del pensiero. Torino, Paravia 1905. [11
8°, XIII+15+133 S. — [1.50 lire.] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 80—81. (G. L.)

***Fazzari, G.,** Breve storia della matematica dai tempi antichi al Medio evo. Palermo, Sandron 1907. [12
16°, 268 S. — [4 lire.]

Darboux, G., Etude sur le développement des méthodes géométriques (1904). [Englische Übersetzung:] The mathem. gazette 3, 1904—1905, 100—106, 121—128, 157—161, 169—173. [13

***Schidlowski, W.,** [Kurze Übersicht der Geschichte der sphärischen Trigonometrie]. [14
Vjestnik elem. matem. 32, 1905, 106—113. — Russisch.

Loria, G., Pour une histoire de la géométrie analytique (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 647—648. (H. Bosmans.) [15

Duhem, P., Les origines de la statique. 11 (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 41—46. (J. T.) — Mathesis 7_3, 1907, 154. [16

Duhem, P., Sulle origini della statica. [17
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti (sc matem.) 15_5 : 2, 1906, 697—699.

La Cour, P. und Appel, J., Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung dargestellt. Übersetzung von G. Siebert (1906). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 99—101. (R. Walckling.) [18

Oppenheim, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Leipzig, Teubner 1906. [19
8°, 164 S. — [1 Mk.] — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 293. (A. Berberich.)

b) Geschichte des Altertums.

Hilprecht, H. V., Mathematical, metrological and chronological tablets (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 392—398. (D. E. Smith.) [20

Alibrandi, P., Di un preteso errore geometrico contenuto nella Sacra scrittura. [21
Roma, Accad. pontif. d. Nuovi Lincei, Memorie 23, 1905, 1—10. — Über den Wert $\pi = 3$.

Saussure, L. de, L'astronomie chinoise dans l'antiquité. [22
Revue génér. d. sc. 18, 1907.

Haas, A. E., Antike Lichttheorien. [23
Archiv für Geschichte der Philosophie 20, 1907, 345—386.

Heiberg, J. L., [Griechische] Mathematik, Mechanik und Astronomie (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 638—639. (H. Bosmans.) [24

Schmidt, M. C. P., Die Herkunft des Wortes Hypotenusa. [25
Naturwiss. Wochenschr. 4, 1905. — Zeitschr. für physik. Unterr. 18, 1905, 236—237.

Junge, G., Wann haben die Griechen das irrationale entdeckt? [26
Novae symbolae Joachimicae (Halle 1907), 221—264.

***Ruelle, C. E.,** Sur l'authenticité probable de la division du canon musical attribuée à Euclide. [27
Revue des études grecques 20, 1907.

Heiberg, J. L., Eine neue Archimedeshandschrift. [28
Hermes 42, 1907, 235—303 + Taf. — [Auszug:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 402—404.

Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes. [29
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 321—363.

c) Geschichte des Mittelalters.

Nau, F., Le traité sur l'astrolabe plan de Sevère Sabokt (1899). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 640—642. (H. Bosmans.) [30

Suter, H., Zur Frage des von Nairizi zitierten Mathematikers Diachasimus. [31
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 396.

Omont, H., Opuscules mathématiques de Gerbert et de Hériger de Lobbes. [32
Paris, Biblioth. nat., Notices et extraits des manuscrits 39, 1907. 12 S.

***Thompson, S. P.,** Petrus Peregrinus de Maricourt and his Epistola de magnete. [33
London, Brit. Acad., Proceedings 1907. 32 S.

Duhem, P., Etudes sur Léonard de Vinci. 1 (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém 31_2, 1907, 52—57. (J. T.) — Mathesis 7_3, 1907, 155. [34

Duhem, P., Leonardo da Vinci. [35
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti (sc. matem.) 16_5 : 1, 1907, 34.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Jackson, L. L., The educational significance of the sixteenth century arithmetic (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 92—93. (J. T.) [36

Bosmans, H., Le commentaire de Gemma Frisius sur l'Arithmetica integra de Stifel. [37
Bruxelles, Soc. scient., Annales 30 : 1, 1905, 165—168.

Bosmans, H., Note historique sur le triangle arithmétique dit de Pascal. [38
Bruxelles, Soc. scient., Annales 31, 1906. 8 S.

Guimarães, R., Un manuscrit intéressant (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 644—646. (H. Bosmans). [39

Brocard, H., Description et usage d'un nouvel anneau astronomique (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 644—646. (H. Bosmans.) [40

Gravelaar, N. L. W. A., De leerwijze van Ferrari voor de oplossingen der vergelijkingen van den vierden graad (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 644. (H. Bosmans.) [41

***Havlíček, T.**, [Geschichte der Gleichungen. III. Die Auflösung der Gleichungen vierten Grades]. Místek 1905. [42
8°, 20 S. — Gymnasialprogramm. — Böhmisch.

Favaro, A., Galileo Galilei e Don Giovanni de' Medici. [43
Archivio storico italiano 39_5, 1907. 16 S.

Favaro, A., Pensieri, sentenze e motti di Galileo Galilei. [44
Rivista di fisica (Pavia) 8, 1907, 5—17.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XX. Fulgenzio Micanzio. [45
Nuovo archivio veneto 13_2, 1907. 36 S.

Favaro, A., Antichi e moderni detrattori di Galileo. Firenze 1907. [46
8°, 26 S. — Aus der „Rassegna nazionale" 1907.

Eneström, G., Über den Pantometer von Michel Coignet. [47
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 397.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. [48
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 20 : 2, 1907, 87—314 + (3) S. — [10 Mk.] — [Selbstbericht:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 255.

***Milhaud, G.**, Descartes et la loi des sinus. [49
Revue génér. d. sc. 18, 1907.

Slaby, A., Otto von Guericke. Festvortrag aus Anlaß der Grundsteinlegung des Deutschen Museums zu München. Berlin, Springer 1907. [50
8°, 28 S. — [0.60 Mk.]

Mikami, Y., Zur Frage abendländischer Einflüsse auf die japanische Mathematik am Ende des siebzehnten Jahrhunderts. [51
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 364—366.

Hayashi, T., Seki's Kaihō-Honpen, Hōjin-Ensan, and Sandatsu-Kempu. [52
Tōkyō, Sūgaku-Buturigakkwai, Kizi-Gaiyō 3, 1906, 183—201.

Endō, R., [Über einige Arbeiten der Sekischen Schule]. [53
Tōkyō, Sūgaku-Buturigakkwai, Kizi-Gaiyō 3, 1906, 205—209. — Japanisch.

Korteweg, D. J., Christiaan Huygens, traité „De iis quae liquido supernatant". La Haye 1907. [54
4°, S. 81—210. — Sonderabdruck aus dem noch nicht erschienenen 11. Bande der „Oeuvres complètes de Chr. Huygens".

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. II. [55
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 7_2, 1907, 438—454.

Geer, P. van, Christiaan Huygens' verblijf te Paris (1666—1681). [56
De Tijdspiegel 1907. 29 S.

Mascart, J., La découverte de l'anneau de Saturne par Huygens (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient 11_3, 1907, 646—647. (H. Bosmans.) [57

Hathaway, A. S., Newtonian idea of the calculus. [58
Indianopolis, Indiana acad. of sc., Proceedings 1908, 237—240.

Gerland, E., Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen Inhalts (1906). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 1335—1336. (O. Berg.) — Mathesis 7_3, 1907, 154. [59

Geck, E., Die Entwicklung des Funktionenbegriffs. [60
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein., Mitteil. 8_2, 1906, 33—45.

***Ilnicki, E.**, Über die Prinzipien der Infinitesimalrechnung und über die Wandlungen, welche die Darstellung dieses Zweiges der Mathematik im Laufe seiner Entwicklung erfahren hat. Czernowitz 1906. [61
8°, 43 S. — Programm.

Muir, Th., The theory of determinants in the historical order of development (1906). [Rezension:] Mathem. gazette 3, 1906, 39. — Nature 74, 1906, 462—463. — Philos. magazine 12_6, 1906, 431. [62

Hering, K., Das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch wirtschaftliche Betrachtung. [63
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 23, 1907. (4) + 57 + (1) S. — [1.60 Mk.] — [Rezension:] Mathesis 7_3, 1907, 155.

Bateman, H., The correspondence of Brook Taylor. [64
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 367—371.

Graf, J., H., Zur Geschiehte der mathematischen Wissenschaften an der ehemaligen Akademie und der Hochschule Bern. [65
Bern, Naturf. Ges., Mitteil. 1906. 19 S.

Schulz-Enler, S., Leonhard Euler. Ein Lebensbild zu seinem 200. Geburtstage nach Quellen und (!) Familienpapieren bearbeitet. Frankfurt am Main, Schulz 1907. [66
8°, (4) + 39 S. + 2 Bildnisse. — [1.50 Mk.]

Lorey, W., Leonhard Enler. Vortrag, gehalten am 8. März 1907 in der Naturforschenden Gesellschaft in Görlitz. [67
Görlitz, Naturf. Ges., Abhandl. 25, 1907. 20 S. — [Rezension:] Dentische Literaturz. 28, 1907, 1597—1598. (W. Ahrens.)

Müller, Felix, Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Enler. [68
Dentsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 185—195 + Porträt.

Eneström, G., Über Bildnisse von Leonhard Euler. [69
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 372—374. Mit Titelbild.

***Nelson, L.,** Kant und die nicht-enklidische Geometrie. Berlin 1906. [70
8°, 28 S.

L[aisant], C. A., Le lien de naissance de Legendre. [71
L'enseignement mathém. 9, 1907, 218—219. — Legendre ist in Paris (nicht Toulouse) geboren.

Simon, M., Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 406—418. (F. Müller.) — Bullet. d. sc. mathém 31_2, 1907, 33—35. (J. T.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 201—202. (H. Wieleitner.) [72

Gauss, C. F., Werke. Band VII (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 68—69. (J. G.) — Dentsche Literaturz. 28, 1907, 1139—1140. (H. Weber.) [73

Mansion, P., Sur la méthode des moindres carrés dans le „Nachlass" de Gauss. [74
Bruxelles, Soc. scient., Annales 30 : 1, 1906, 169—174.

Varlćak, V., Bemerkung zu einem Punkte in der Festrede L. Schlesingers über Johann Bolyai. [75
Dentsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 320—321.

Wangerin, A., Franz Nenmann und sein Wirken als Forscher und Lehrer. Braunschweig, Vieweg 1907. [76
8°, X + 185 S. + Porträt. — [5.50 Mk.] — Die Wissenschaft Bd. 19.

Lucas de Pesloüan, Ch., N. H. Abel (1906). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 608—609. (M. O.) — *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 305—306. (F. Cajori.) [77

Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker. Ein Beitrag zu seiner Biographie. Leipzig, Teubner 1907. [78
8°, 45 S. — [1.20 Mk.] — Erweiterter Abdruck aus der „Bibliotheca Mathematica" 7_2 (1906). — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathem. 31_2, 1907, 116—118. (J. T.) — Mathesis 7_3, 1907, 155.

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. [79
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 22, 1907. — XX + 282 S. + 2 Porträts. — [6.90 Mk.] — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 118—119. (J. T.) — Dentsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 334—335. (P. Stäckel.) — Mathesis 7_3, 1907, 155.

Ahrens, W., Skizzen ans dem Leben Weierstrass'. [80
Mathem.-naturwiss. Blätter 1907. 7 S.

***Reiner, J.,** Hermann von Helmholtz. Leipzig, Thomas 1905. [81
8°, 204 S. + Porträt. — Klassiker der Naturwissenschaften Band 6. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 950—951. (G. Mie.) — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 91. (H. v. H.)

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par B. Baillaud et H. Bourget (1905). [Rezension:] Nature 74, 1906, 265. [82

***Streit, H.,** Die Fortschritte auf dem Gebiete der Thermoelektrizität. IV. Von der Mitte des vorigen Jahrhunderts bis zur Neuzeit. Beiträge zur Geschiehte der Physik. Wittenberge 1906. [83
8°, 78 S — Realschulprogramm — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 125. (Stegmann.)

Hartogs, F., Über neuere Untersuebungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variabeln. [84
Dentsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 223—240.

Brocard, H., La bibliographie de la géométrie dn triangle de 1895 à 1905. [85
Association française pour l'avancement des sciences, Comptes rendus 1906 (Lyon). 14. S.

***Macpherson, H.,** Astronomers of to-day and their works. London, Gall & Inglis 1905. [86
8°, 272 S.

Gutzmer, A., Geschiehte der Dentschen Mathematiker-Vereinigung (1904). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 38—39. (J. T.) [87

Bosmans, H., Paul Tannery et ses derniers travaux. [88
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 648—649.

***Archibald, R. C.,** Bibliography of the life and works of Simon Newcomb. [89
Toronto, Royal soc. of Canada, Proceedings 11, 1905, 79—110.

Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung nach dem Stande vom 1. Januar 1907. [90
Dentsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, XIII—LIV. — Mit biographischen Notizen.

e) Nekrologe.

Ernst **Abbe** (1840—1905). [91
Berlin, Deutsche Physik. Ges., Verhandl. 7, 1905, 89—121. (S. Czapski.) — *Göttingen*, Ges. d. Wiss., Nachr. (Geschäftl. Mitteil.) 1905, 33—44. (W. Voigt.)
Winckelmann, A., *Ernst Abbe. Rede.* Jena 1905. 8, 23 S.
Gedenkreden und Ansprachen, gehalten bei der Trauerfeier für Ernst Abbe am 17. Januar 1905. Jena 1905. 8°, IV + 23 S.

Marcus **Baker** (1849—1903). [92
Washington, Philos. soc., Bulletin 14, 1905, 277—285. (W. H. Dall.)

Wilhelm **von Bezold** (1837—1907). [93
Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 153—155, 352. (R. Süring.)

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906). [94
Görlitz, Naturf. Ges., Abhandl. 25 : 2, 1907. (W. Lorey.)

Karl **Bopp** (1856—1905). [95
Mathem. naturwiss. Blätter 2, 1905, 194—195. (W. Lorey.)

Ernesto **Cesàro** (1859—1906). [96
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 16_2 : 1, 1907, 76—82. (V. Cerruti.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 23, 1907, 221—226. (Abdruck des Nachrufes von V. Cerruti.)

Alexandre **de Colnet d'Huart** (1821—1905?). [97
Luxembourg, Institut, Archives trimestrielles 1906, 1—57 + Porträt. (M. Gaechen.)

Ralph **Copeland** (1837—1905). [98
Astron. Nachr. 170, 1905, 29—32. (J. Hahn.) — Leopoldina 41, 1905, 101—102.

Joseph **Delboeuf** (1831—1896). [99
Bruxelles, Acad. de Belgique, Annuaire 1905, 47—147. (A. Gilkinet.)

Paul **Drude** (1863—1906). [100
Görlitz, Naturf. Ges., Abhandl. 25 : 2. (W. Lorey.)

Johannes **Edler** (1860—1905). [101
Berlin, Deutsche Physik Ges., Verhandl. 7, 1905, 398—402. (Ad. Schmidt.)

Edmund **Gerlach** (1849—1904). [102
Programm der Luisenstädtschen Oberrealschule (Berlin) 1904, 36—40. (A. Krause.)

William **Harkness** (1837—1903). [103
Washington, Philos. soc., Bulletin 14, 1905, 292—296.

Guido **Hauck** (1845—1905). [104
Leopoldina 41, 1905, 88 — Zentralbl. d. Bauverw. 25, 1905, 72—73. (G. Hessenberg.)

Charles Jasper **Joly** (1864—1906). [105
London, Mathem. soc., Proceedings 4_2, 1906, XIII—XIV.

Charles **Joubert** (1825—1906). [106
Roma, Accad. pontif. d. Nuovi Lincei, Atti 60, 1907. 16 S. (B. Carrara.)

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [107
L'enseignement mathém. 9, 1907, 169—179 + Porträt. (C. A. Laisant.)

Teofilo **Pepin** (1826—1904?). [108
Roma, Accad. pontif. d. Nuovi Lincei, Atti 58, 1905, 210—216.

Robert **Rawson** (1814—1906). [109
London, Mathem. soc., Proceedings 4_2, 1906, XV—XVII.

John Krom **Rees** (1851—1907). [110
Science 25_2, 1907, 475—477. (H. Jacoby.)

Francesco **Regnani** (1818—1904). [111
Roma, Accad. pontif. d. Nuovi Lincei, Memorie 23, 1905. 18 S. + Porträt. (G. Lapponi.)

Wilhelm **Ritter** (1847—1906). [112
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber 16, 1907, 244—248 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (H. E. Timerding.)

Edward John **Routh** (1831—1907). [113
Science 25_2, 1907, 982.

George **Salmon** (1819—1904). [114
Fiedler, W., *Zum Gedächtnis George Salmons.* Leipzig 1907. 8°.

Charles Antony **Schott** (1826—1901). [115
Washington, Philos. soc., Bulletin 14, 1905, 312—314. (O. H. Tittmann.)

Oskar **Schreiber** (1829—1905). [116
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 40, 1905, 303—310. (H. Helmert.)

Otto Wilhelm **von Struve** (1819—1905). [117
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 40, 1905, 286—303. (M. Nyrén.)

Pietro **Tacchini** (1838—1905) [118
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 40, 1905, 213—214. (E. Millosevich.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 7_8, 1905, 64, 88—95. (E. Lorenzoni.) — Leopoldina 41, 1905, 48.

August **Wellenmann** (1843—1906). [119
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 51, 1906, 520—521. (U. Seiler.)

Walter Friedrich **Wislicenus** (1859—1905). [120
Leopoldina 41, 1905, 96.

f) Aktuelle Fragen.

Tannery, P., Programme d'un cours d'histoire des sciences. [121
La revue du mois 3, 1907, 385—391. — [Wieder abgedruckt:] L'enseignement mathém. 9, 1907, 226—230.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. VI, VII. [122
L'enseignement mathém. 9, 1907, 123—141. (H. Fehr, Th. Flournoy, V. Bobynin); 204—217 (Th. Flournoy.)

Smith, D. E., A mathematical exhibit of interest to teachers. [123
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 375—377.

Osgood, W. F., The calculus in our colleges and technical schools. [124
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 449—467.

Klein, F., Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. 1. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig, Teubner 1907. [125
8°, IX + 236 S. — [5 Mk.]

[Euler-Feier.] [126

Basel. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 328—332. (F. Rudio.) — L'enseignement mathém. 9, 1907, 221—223. (R. Gauthier.)

Berlin. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 332—333. — L'enseignement mathém. 9, 1907, 221. (E. Jahnke.)

Breslau. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 332—333.

Dresden. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 333.

Görlitz. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 332.

Worchester. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 333. — Science 25_2, 1907, 678.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— H. Bateman in Liverpool zum Dozenten der mathematischen Physik an der Universität in Manchester.

— J. A. Brown in Hanover zum Professor der Physik am „Dartmonth college" daselbst.

— W. M. Carruth in Ithaca zum Professor der Mathematik am „Hamilton college" in Clinton, N. J.

— Professor A. D. Cole in Columbus (Ohio) zum Professor der Physik am „Vassar college" in Ponghkeepsie.

— Professor Fr. Dolezalek in Göttingen zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Berlin.

— J. Drach in Poitiers zum Professor der Differential- und Integralrechnung an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Privatdozent R. Emden in München zum Professor der Physik und Meteorologie an der Universität daselbst.

— Dr. P. Field in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. W. B. Ford in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor Ph. Furtwängler in Poppelsdorf zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Aachen.

— O. A. Gage in Ithaca zum Professor der Physik an der Universität von Wisconsin in Madison.

— H. G. Gale in Chicago zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent M. Grossmann in Basel zum Professor der darstellenden Geometrie am Polytechnikum in Zürich.

— Dr. C. C. Grove in Clinton N. Y. zum Professor der Mathematik am „Roanoke college".

— Professor G. Hessenberg in Berlin zum Professor der Mathematik an der Landwirtschaftlichen Akademie in Poppelsdorf.

— Professor H. Hohenner in Stuttgart zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Assistent S. S. Hough in Capetown zum Direktor der Sternwarte daselbst.

— W. H. Jackson in Manchester zum Professor der Mathematik am „Haverford college", Pa.

— Landesschulinspektor V. Jarolimek zum Professor der darstellenden Geometrie an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag.

— Professor J. P. Kuenen in Dundee zum Professor der Physik an der Universität in Leiden.

— Privadozent W. M. Kutta in München zum Professor der angewandten Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent Larquier in Lausanne zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— E. E. Lawton in New Haven zum Professor der Physik an der „Yale university" daselbst.

— Professor Ph. Lenard in Kiel zum Professor der Physik an der Universität in Heidelberg.

— Privatdozent W. Ludwig in Karlsruhe zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Dr. R. K. Mc Clung an der „Mc Gill university" in Montreal zum Professor der Physik an der „Mount Allison university" in Sackville, Canada.

— Privatdozent W. Meigen in Freiburg i/B. zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— J. St. Murat zum Direktor des meteorologischen Instituts in Bukarest.

— L. M. Passano in Boston zum Professor der Mathematik am „Massachusetts institute of technology" daselbst.

— W. Peddie in Edinburgh zum Professor der Physik am „University college" in Dundee.

— Dr. G. W. Pierce in Cambridge, Mass. zum Professor der Physik an der „Harvard university" daselbst.

— Ch. A. Proctor in Hanover zum Professor der Mathematik am „Dartmouth college" daselbst.

— Privatdozent R. Reiger in Erlangen zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. Th. R. Running in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor R. von Sterneck in Czernowitz zum Professor der Mathematik an der Universität in Graz.

— Dr. S. D. Townley in Ukiah, Californien, zum Professor der angewandten Mathematik an der „Leland Stanford junior university".

— Privatdozent E. von Weber in München zum Professor der Mathematik an der Universität in Würzburg.

— Professor R. H. Weber in Heidelberg zum Professor der Physik an der Universität in Rostock.

— Professor G. V. Wendell in Boston zum Professor der Physik am „Stevens institute of technology".

— Professor K. Wieghardt in Braunschweig zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Hannover.

— Dr. F. W. Williams am „Union college" zum Professor der Mathematik am „Clark college".

— Professor E. B. Wilson in New Haven zum Professor der Mathematik am „Massachusetts institute of technology" in Boston.

Todesfälle.

— Ferdinando Aschieri, Professor der Geometrie an der Universität in Pavia, geboren in Modena den 3. Dezember 1844, gestorben in Pavia den 14. April 1907.

— Karl Braun, früher Direktor des Observatoriums in Kalocsa (Ungarn), geboren in Neustadt (Hessen) den 27. April 1831, gestorben in Mariaschein (Böhmen) den 3 Juni 1907.

— Alexander Buchan, Sekretär der meteorologischen Gesellschaft in Edinburgh, geboren in Kinnesswood (Kinrossshire) den 11. April 1829, gestorben in Edinburgh den 13. Mai 1907.

— André Crova, Professor der Physik an der „Faculté des sciences" in Montpellier, geboren in Perpignan den 3. Dezember 1833, gestorben im Juni 1907.

— Guy William Eastman, Assistent für Physik am „Massachusetts institute of technology" in Boston, gestorben in Boston den 17. Mai 1907, 26 Jahre alt.

— Giacomo Foglini, früher Professor der höheren Mathematik an der gregorianischen Universität in Rom, geboren in Rom den 1. Mai 1822, gestorben daselbst den 16. April 1907.

— Arwed Fuhrmann, früher Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Dresden, geboren in Dresden den 6 Dezember 1840, gestorben daselbst den 23. April 1907.

— Alexander Stewart Herschel, Honorarprofessor der Physik am „Durham college" im Newcastle-on-Tyne, geboren in Capetown den 5. Februar 1836, gestorben zu Slough (Buckinghamshire) den 18. Juni 1907.

— Charles H. Hinton, Verfasser von Arbeiten über die vierte Dimension, geboren in London, gestorben in Washington den 30. April 1907, 63 Jahre alt.

— Ernst Kayser, Astronom der Danziger naturforschenden Gesellschaft, geboren in Danzig den 27. März 1830, gestorben daselbst im Juli 1907.

— Heinrich Kreutz, Professor der Astronomie an der Universität in Kiel, geboren in Siegen den 28. September 1854, gestorben in Kiel den 13. Juli 1907.

— Aimé Laussedat, früher Direktor des „Conservatoire des arts et métiers" in Paris, geboren in Moulins den 19. April 1819, gestorben in Paris den 18. März 1907.

— Egon von Oppolzer, Professor der Astronomie an der Universität in Innsbruck, geboren in Wien den 13. Oktober 1869, gestorben in Innsbruck den 15. Juni 1907.

— Jakob Rebstein, Professor des Vermessungswesens am Polytechnikum in Zürich, geboren in Töß bei Winterthur den 4. Mai 1840, gestorben in Zürich den 14. März 1907.

— Wilhelm Ritter, Professor der Ingenieurwissenschaft am Polytechnikum in Zürich, geboren in Liestal den 14. April 1847, gestorben in Zürich den 28. Oktober 1906.

— Edward John Routh, früher „fellow of Peters college" in Cambridge, geboren in Quebec (Canada) den 20. Januar 1831, gestorben in Cambridge den 7. Juni 1907.

— Francesco Siacci, Professor der theoretischen Mechanik an der Universität in Neapel, geboren in Rom den 20. April 1839, gestorben in Neapel den 30. Mai 1907.

— Charles Trépied, Direktor der Sternwarte in Algier, gestorben im Juni 1907.

— C. B. Warring, früher Lehrer der Mathematik und Physik am „Poughkeepsie military institute", gestorben den 5. Juli 1907, 82 Jahre alt.

— Georg Zachariae, früher Direktor der dänischen Gradmessung, geboren in Kopenhagen den 5. November 1835, gestorben daselbst den 18. Mai 1907.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Foerster für das Wintersemester 1907—1908 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der alten Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. Amodeo für das Wintersemester 1907—1908 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik der drei letzten Jahrhunderte angekündigt.

— An der Universität in Padua hat Professor A. Favaro für das Wintersemester 1907—1908 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik in Italien im 16. und 17. Jahrhundert angekündigt.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1908. On demande une contribution importante à l'étude de l'équation différentielle $Xdx + Ydy = 0$, où X et Y désignent des fonctions données du second ordre des variables x et y. — Exposer et compléter les recherches faites sur le calcul des variations depuis 1850.

— *Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig.* Preisaufgabe für das Jahr 1910. Es soll eine Arbeit über die Potentialtheorie geliefert werden, durch welche die Theorie der „Grundbelegung" in bezug auf Klarheit und Strenge oder in bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert wird.

— *Real academia de ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid.* Concurso del año 1908. Sucinta exposición de los principios fundamentales de la Nomografía, estrictamente necesarios para la composición y fácil inteligencia de un sistema de ábacos ó nomogramas, desconocidos hasta ahora y aplicables, con manifiesta ventaja sobre cualquier otro procedimiento, á la resolución de una serie de cuestiones, interesantes en teoría y de utilidad en la prática, referentes á las ciencias físicomatemáticas.

— *Accademia di scienze di Napoli.* Concorso dell' anno 1907. Esposizione sistematica delle nozioni sinora acquisite sulle configurazioni geometriche del piano e degli spazi mettendole in relazione con la teoria delle sostituzioni e portandovi, possibilmente, qualche nuovo contributo.

Vermischtes.

— Unter den Leitsätzen für Universitätslehrer der Mathematik, die bei der Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Dresden 1907 zur Diskussion kamen, war auch der folgende: „In den Vorlesungen ist das geschichtliche und bibliographische Moment in gehöriger Weise zu berücksichtigen".

— Die schweizerische naturforschende Gesellschaft beschloß in ihrer Jahresversammlung in Freiburg am 29. Juli 1907, auf Antrag des Herrn F. Rudio, eine Kommission einzusetzen, um die Frage einer Gesamtausgabe von Leonhard Eulers Werken zu prüfen und die erforderlichen vorbereitenden Schritte für diesen Zweck zu tun. Es ist also zu hoffen, daß diese Frage jetzt zu einem guten Abschluß geführt wird.

Das Weltbild bei Heron.

Von K. Tittel in Leipzig

Die reichhaltige Sammlung der Pneumatika, die unter Herons Namen überliefert ist, enthält im 7. Kapitel des II. Buches eine kurze Beschreibung einer Vorrichtung, mit deren Hilfe das Weltall figürlich dargestellt werden kann.[1]) Es ist jedoch dem letzten Herausgeber W. Schmidt nicht gelungen, diesem Abschnitt einen befriedigenden Sinn abzugewinnen. Wenigstens erklärt er in der Einleitung S. XLV, diese Darstellung sei Herons wenig würdig. Schmidt hat sich nämlich die Ansicht eines französischen Bearbeiters Heronischer Schriften de Rochas[2]) zu eigen gemacht, der S. 157 seiner Übersetzung behauptet hat, dieser Wiedergabe des Kosmos liege die durch Aristoteles, *De caelo* II 13 dem Thales von Milet zugeschriebene Anschauung zugrunde, daß die Erde wie ein Stück Holz auf dem Meere schwimme. Ein solches Weltbild paßt natürlich weder in die hellenistische Zeit noch in eine spätere Periode, in welches Jahrhundert man Heron auch setzen mag.[3]) Es soll darum von neuem der Versuch gemacht werden, den überlieferten Text zu interpretieren.

Nach der Anweisung S. 222, 14 soll die Weltkugel durch zwei aufeinander passende Halbkugeln aus Glas dargestellt werden. Der Kosmos ist also begrenzt, die Anschauung in den Pneumatika stimmt somit zu der Lehre, die sich beispielsweise bei Kleomedes I 1 S. 2, 12 Z. findet: (*ὁ κόσμος*) *οὐ μὴν ἄπειρός γε, ἀλλὰ πεπερασμένος ἐστίν.* Im Zentrum der Weltkugel soll sich beim Heronischen Apparate eine kleine Kugel befinden. Das ist der Erdball, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Kosmos zusammenfallen soll. Wir haben es demnach unzweifelhaft

1) *εἰς ὑπόδειγμα τοῦ κόσμου*; Heronis *Opera* I, S. 222, 13 ed. Schmidt (Leipzig 1899).

2) A. de Rochas, *La science des philosophes et l'art des thaumaturges dans l'antiquité.* Paris 1882.

3) Über die Heronische Frage vgl. Bursians Jahresber. **129** (1906 I), S. 163—168.

mit dem geozentrischen Weltsystem zu tun. Daß Heron nicht den längst überwundenen Standpunkt der ionischen Naturphilosophen vertritt, zeigt er deutlich in der Schrift über die Dioptra Kap. 35, wo er sich an die Erdmessung des Eratosthenes anschließt, um den Abstand zwischen Alexandreia und Rom als Teil eines der größten Kreise der Erde durch Beobachtung von Mondfinsternissen zu bestimmen. Auch die Erklärung (Pneum. S. 12, 7), wie Tau und Nebel entstehen, setzt das geozentrische System voraus. Dazu stimmt vor allen Dingen der Lehrsatz, der in den Pneumatika I 2 S. 32, 20 angeführt wird: Jede zusammenhängende Flüssigkeit, die in die Ruhelage gekommen ist, nimmt eine kugelförmige Oberfläche an, die mit der Erde denselben Mittelpunkt hat. Hier hat sich Heron an Archimedes angeschlossen, der in der Schrift *περὶ τῶν ὀχουμένων* denselben Lehrsatz aufgestellt und bewiesen hat (vgl. *Archimedis Opera* II 357, 5 ed. Heiberg).

Nun entsteht aber die Frage, wie es bewerkstelligt werden soll, daß die Erdkugel frei im Weltenraume zu schweben scheint. Nach der Anleitung des Textes nehme man einen leichten Ball (*σφαιρίον κοῦφον*), fülle die untere gläserne Halbkugel mit Wasser und werfe den Erdball in das Wasser. Das Wasser ist jedoch hier lediglich Mittel zum Zweck; es ersetzt gewissermaßen die Stützen, um zu verhindern, daß der Erdball herunterfällt. Zum Weltbild gehört das Wasser ebensowenig, als etwa bei einer modernen Darstellung der Kant-Laplaceschen Theorie des Sonnensystems die Flüssigkeit, in der die rotierende Ölkugel schwebt, als Teil des Weltalls betrachtet werden darf.[1]) Des Thales primitive Vorstellung von der schwimmenden Erdkugel ist also erst von den Erklärern in die Stelle der Pneumatika hineingetragen worden; sie ist von der Interpretation dieses Textes, der frühestens um das Jahr 150 vor Chr. entstanden sein kann, fernzuhalten. Ferner muß der schwimmende Ball in der Mitte der beiden Halbkugeln festgehalten werden. Zu diesem Zwecke ist die Bronzeplatte, mit der die obere Halbkugel verschlossen ist, in der Mitte mit einem kreisrunden Loche versehen, das der Größe der Erdkugel entspricht. Wenn dann die obere Halbkugel auf die untere aufgesetzt wird, so kann der Ball weder nach der Seite wegschwimmen, weil die Bronzeplatte ihn daran hindert, noch kann er nach unten fallen, weil das Wasser ihn trägt. Was heißt aber nun *ποσοῦ ὑγροῦ ἐξαιρεθέντος*? Schmidt übersetzt: „Und auch wenn man eine beliebige Quantität Wasser herausnimmt, so bleibt die Kugel doch in der

1) Vgl. Newcomb-Engelmann, *Populäre Astronomie*² (Leipzig 1882), S. 596. Der Plateausche Versuch ist beschrieben und abgebildet bei Wüllner, *Lehrbuch der Experimentalphysik* I⁵ (Leipzig 1895), S. 420, Fig. 133—135.

Mitte sitzen“. Zunächst ist die Übersetzung schon sprachlich nicht einwandfrei; denn das Indefinitum *ποσός* hat nicht den Sinn „eine beliebige Quantität“, sondern heißt vielmehr „eine gewisse, eine bestimmte Quantität“, über die zwar nichts Näheres ausgesagt wird, die aber durch die Umstände bestimmt wird.[1]) Vor allen Dingen sind aber in Hinsicht auf die Sache dem Herausgeber selbst Bedenken aufgestiegen, wenn er Einl. S. XLV fragt: „Was hat die Entnahme von Wasser mit der figürlichen Darstellung des Weltalls zu tun?“. Mit dem Weltsystem selbst natürlich nichts, wohl aber mit der praktischen Herstellung des Apparates. Der Grund, warum etwas Wasser herausgenommen wird, wird durch die folgenden Worte angedeutet: *καθέξει τὸ σφαιρίον ὁ ἐν μέσῳ τόπος*, d. h. wenn eine gewisse Quantität der Flüssigkeit aus der unteren Halbkugel herausgenommen worden ist, so wird der in der Mitte ausgesparte Raum die Erdkugel festhalten.[2]) Es kann sich nämlich leicht der Fehler einstellen, daß zuviel Flüssigkeit in der unteren Halbkugel ist. Dann würde der Mittelpunkt der Erde über dem Mittelpunkt des Kosmos liegen. Um dies zu vermeiden, muß man etwas Wasser herausnehmen und so lange probieren, bis das Zentrum des Erdballs mit dem Zentrum des Weltalls genau zusammenfällt. Natürlich muß man dazu die obere Halbkugel wieder abnehmen, um sie nach Regulierung des Wasserstandes von neuem aufzusetzen. Das scheint auch durch den Text angedeutet zu werden, wenn am Schlusse zum zweiten Male versichert wird, daß die obere Halbkugel aufgesetzt werden muß, um das Weltbild zu vollenden. Damit erledigen sich die Vorschläge Schmidts, der oberen Halbkugel vor dem Einsetzen der kleinen Kugel „etwas Luft zu entziehen, so daß die atmosphärische Luft außerhalb der oberen geschlossenen Halbkugel die Kugel in dieselbe hineindrückt“. Diese Hilfsannahmen sind bei der soeben begründeten Interpretation überflüssig. Auch die Abbildung in der Schmidtschen Ausgabe ist darnach zu berichtigen: Die Erdkugel in Fig. 51 ist zu tief unten; sie muß so weit emporgehoben werden, daß ihr größter Kreis (der Äquator) gerade in der Ebene der Bronzeplatte liegt. Eigentlich müßte also bei Schmidt eine bestimmte Menge Wasser hinzugegossen werden, damit die Erde genau im Zentrum des Alls ruht.

Schließlich bedürfen noch die Worte der Einleitung *σφαῖρα διαφανὴς ἔχουσα ἐντὸς ἑαυτῆς ἀέρα καὶ ὑγρόν* einer Erläuterung. Dadurch wird angedeutet, daß das Wasser doch nicht bloß Mittel zum Zweck ist, um

1) Richtig erklärt der Lexikograph Stephanus im *Thesaurus*: *ποσός* = aliquantus, certae cuiusdam quantitatis. Vgl. Heron, Pneum. 10, 22; 12, 13; 14, 24. Zahlreiche Belege für diese Bedeutung finden sich z. B. in der Koine des Polybios.

2) Man könnte auch mit einer leichten Änderung *τον ἐν μέσῳ τόπον* schreiben und erklären: „Dann wird der Erdball den Raum in der Mitte inne haben“.

den Erdball in der Mitte der Weltkugel zu erhalten. Es spielt freilich nicht die Rolle, die ihm Thales zuschreibt, aber die Flüssigkeit vertritt bei diesem Weltbild die Sphäre des Feuchten (ὑγρόν), gleichwie die in den beiden Hemispbären enthaltene Luft die „Atmosphäre" bezeichnen soll. Der figürlichen Darstellung liegt also eine ähnliche Anschauung zugrunde, wie sie im Anschluß an Aristoteles in dem Proömium der Pneumatika S. 10, 17 ff. auseinandergesetzt wird. Auch in der Aristotelisch-stoischen Schrift περὶ κόσμου Kap. 3 wird ausgeführt, wie die fünf Sphären der Erde, des Wassers, der Luft, des Feuers und des Äthers als konzentrische Kugeln um den Mittelpunkt des Weltalls gelagert sind. Natürlich lassen sich durch ein Modell diese freischwebenden Sphären der Elemente nicht darstellen. Man muß sich mit Andeutungen begnügen, wie sie in der Beschreibung bei Heron gegeben werden. Vermutlich konnte man auch innerhalb der oberen Glaskugel beobachten, wie das verdunstete Wasser bei Temperaturschwankungen sich an der Glaswand niederschlug und zu Tropfen verdichtete, ähnlich den Vorgängen in der Atmosphäre. Somit ergibt sich, daß in der Pneumatika nicht etwa, wie Schmidt meint, das Weltbild des Thales dargestellt wird, sondern das geozentrische Weltsystem des Aristoteles und Poseidonios, das nach Unterdrückung des heliozentrischen Systems auf viele Jahrhunderte hinaus kanonische Geltung erlangt hat. Man brauchte nun bloß auf der Himmelskugel die verschiedenen Kreise, die in der Astronomie eine Rolle spielen (Parallelkreise, Kolurkreise), anzudeuten oder einige Sterne einzutragen, und man erhielt eine schematische Darstellung des Weltalls, an der sich manche Grundlehren der Astronomie anschaulich machen ließen. Freilich mit dem erstaunlichen, durch Wasser bewegten Kunstwerk des Archimedes, dessen Sphaira nach der Eroberung von Syrakus die Bewunderung des Marcellus erregte, so daß sie im Tempel der Virtus in Rom aufgestellt wurde, läßt sich die in den Pneumatika beschriebene Vorrichtung nicht vergleichen.[1]) Immerhin lernen wir durch dieses bisher fast unbeachtet gebliebene Weltbild ein Hilfsmittel kennen, das im Altertum beim Unterricht in der Astronomie verwendet worden sein dürfte

Ob freilich die Erfindung oder die Beschreibung des Apparates von Heron selbst herrührt, ist eine andere Frage. Diese figürliche Darstellnng des Weltalls hat mit den pneumatischen Apparaten, bei denen der Luft-

1) Zu den Stellen über antike Planetarien, die Hultsch in Pauly-Wissowas *Realenzyklopädie* II 1 unter Archimedes S. 537 und Astronomie S. 1853 gesammelt hat, fügt H Schöne bei E. Wiedemann, Sitz.-Ber. der phys.-med. Soz. in Erlangen 37 (1905), S. 409 die ausführliche Beschreibung eines astronomischen Uhrwerks aus der nur syrisch erhaltenen *Theophania* des Eusebios hinzu; vgl. *Griech. christl. Schriftst.* III 2 (Leipzig 1904), S. 68 ed. Gressmann.

druck eine Rolle spielt, wenig gemein. Nnr mit dem vorhergehenden Kapitel II 6 hängt sie insofern zusammen, als darin em ähnlicher Apparat beschrieben wird, bei dem man mit Hilfe ausströmender Dämpfe ebenfalls eine kleine Kugel in der Mitte einer größeren Halbkugel schweben lassen kann, und das 6. Kap. seinerseits erinnert an die Ausführnngen im Proöminm S. 10, 26ff., wo die Dünste, die aus der Erde aufsteigen, hinsichtlich ihrer Entstehung mit den Dämpfen verglichen werden, die aus geheizten Kesseln aufsteigen. Ob sich HERON überhaupt mit astronomischen Fragen eingehend befaßt hat, mnß so lange zweifelhaft bleiben, als das rätselhafte Zitat bei Is. VOSSIUS, *Observat. in CATULLUM* p. 302: „HERO in Astronomicis" nicht aufgeklärt ist.[1]) Es ist immerhin möglich, daß das 7. Kap. des II. Buches der Pneumatika, wie SCHMIDT vermutet, ein späterer Zusatz ist, zumal da auch die überlieferten Worte in mancher Beziehnng Bedenken erwecken. Doch kann die Frage, aus welchen Bestandteilen die HERONische Sammlung sich zusammensetzt, nur in größerem Zusammenhange behandelt werden. Übrigens setzt die Aufgabe, zwei genau aufeinander passende Halbkugeln größeren Umfangs aus durchsichtigem Glas herzustellen, eine verhältnismäßig hochentwickelte Technik der Glasfabrikation voraus. Das würde wieder zur Heimat des HERON von Alexandreia stimmen; denn Ägypten hat seinen hohen Ruf hinsichtlich seiner vortrefflichen Glasarbeiten bis in die Kaiserzeit hinein bewahrt.[2])

1) Den Spuren dieses Buchtitels ist F. BOLL in der 5. Beilage zu seinem Buche *Sphaera* (Leipzig 1903), S. 480 nachgegangen, wobei er den Buchtitel HERONS *περὶ ὀνομάτων ἀστρονομικῶν* endgültig beseitigt.

2) Bestätigt durch STRABON XVI 758. Vgl. H. BLÜMNER, *Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste bei Griechen und Römern* (Leipzig 1886), IV 381, 392

Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik.

Von J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen in Köbenhavn.

In der von R. Schöne gefundenen Handschrift der Serailbibliothek, wonach H. Schöne die echten *Μετρικά* Herons herausgegeben hat, finden sich einige neue Beispiele unbestimmter Gleichungen, die in mehreren Beziehungen Beachtung verdienen und geschichtlich höchst wertvoll werden können, wenn es gelingen sollte sie zeitlich festzulegen.

Zum Verständnis der Sachlage sind einige Vorbemerkungen über die Handschrift notwendig (vgl. die Inhaltsangabe bei H. Schöne, Heronis *Opera* III, S. IX).

Der Cod. Constantinopolitanus Palatii veteris Nr. 1, den ich übrigens eher ins XII. als ins XI. Jahrhundert datieren möchte, enthält außer den selbständigen Werken *Διδύμου Ἀλεξανδρέως περὶ παντοίων ξύλων τῆς μετρήσεως* (f. 64—66) und *Ἥρωνος Μετρικά* (f. 67—110) ein byzantinisches Rechenbuch[1]), aus verschiedenen Quellen zusammengestellt. Einige davon sind mit Namen angeführt, aber diesen Überschriften gegenüber ist aus verschiedenen Gründen die größte Vorsicht geboten. Fol. 3ʳ steht über zwei Stücken, die von dem Wesen und der Aufgabe der Geometrie handeln: *Εὐκλείδου γεωμετρία*, aber auf Rasur mit jüngerer Hand; also stand Euklids Name ursprünglich nicht da, und in der Tat haben die Stücke nicht das geringste mit Euklid zu tun. Jedenfalls gilt die Überschrift nur für diese beiden Stücke; denn auf sie folgt fol. 3ᵛ ein Stück über die in mathematischen Handschriften gebräuchlichen Abkürzungen mit der Überschrift *σημεῖα γεωμετρίας*, das mit den vorhergehenden nichts zu tun hat. Darauf folgt fol. 4ʳ—17ᵛ eine Sammlung planimetrischer und (von fol. 10ᵛ an) stereometrischer Aufgaben, im wesentlichen gleich dem *Liber geeponicus* und *Stereometrica* I bei Hultsch; sie hat weder Überschrift (der Anfangsbuchstabe ist ausgerückt aber nicht illuminiert) noch Spezialtitel. Fol. 17ᵛ—26ʳ folgt mit der Überschrift *Διοφάν(τ)ου[ς]* die

1) Wesentlich gleichartig sind die beiden anderen Haupthss. der von Hultsch herausgegebenen „Heroniana", Paris. 1670 u. Suppl. 387.

Sammlung, die Tannery, Diophanti *Opera* II, S. 15—31 herausgegeben hat; fol. 19^r Spezialtitel *μέθοδοι τῶν πολυγώνων* = Tannery, p. 18, 7, fol. 24^v nach S. 27, 20 (abweichend) Schlußornament, darauf fol. 24^v—25^r einige stereometrische Definitionen, die bei Tannery fehlen, fol. 25^r *περὶ κυλίνδρου* = Tannery S. 27, 21. Fol. 26^r ohne Titel zwei Aufgaben die Kugel betreffend. Fol. 27^r mit der Überschrift *Ἥρωνος εἰσαγωγαὶ Geometria* 106, 1—2 Hultsch, darauf mit Überschrift *περὶ εὐθυμετρικῶν* (wie bei Hultsch S. 139, 18) *Geom.* 106, 3—25, fortgesetzt fol. 27^v—28^v mit anderen metrologischen Stücken. Fol. 28^v—29^r nach einem Schlnßornament *Geepon.* 78—79, fortgesetzt ohne Unterbrechung oder Überschrift mit neuen planimetrischen Aufgaben in systematischer Ordnung (Rechtecke, rechtwinklige Dreiecke, ein- und umgeschriebene Figuren[1]), Kreis) bis fol. 38^v und mit neuen stereometrischen bis fol. 42^r. Dann folgt fol. 42^r—48^r *Stereometrica* II, 1—33 Hultsch mit der Überschrift: *μέτρησις τετραστόου ἤτοι τετρακαμάρου ἐπὶ τετραγώνου βάσεως* (ohne Herons Namen), fortgesetzt fol. 48^r—51^r mit neuen stereometrischen Aufgaben über Gewölbe. Darauf fol. 51^r—53^v nach einem Schlnßornament *Geepon.* 68 und andere stereometrische Anfgaben (z. B. Vermessung von Schiffen), meist neu, aber anch *Geepon.* 87; fol. 54, nach Ornament und mit Überschrift: *μέτρησις ὄντος σίτου ἐξ ἀποθέσεως*, *Geepon.* 203; nach einem leeren Raum von $^1/_2$ Seite fol. 55^r—61^r Anfgaben über Pyramiden, Überschrift: *μέτρησις πυραμίδων*; dann, nach einem Ornament, mit Überschrift: *Εὐκλείδου εὐθυμετρικά*, *Geepon.* 165—90.

Die hier behandelten Aufgaben stehen fol. 28^v—31^v im Anfang einer namenslosen Sammlnng, äußere Kriterien für ihr Alter gibt es also nicht; natürlich sind sie nicht byzantinischen Ursprungs.

Ich gebe den Text nach Constantinopolit., wovon die von Hultsch benntzte Handschrift abhängig ist Die nutzlosen Figuren der Handschrift lasse ich fort.

1—2 sind hier der Vollständigkeit wegen wiederholt; nach dem etwas geringeren Text der *Geepon.* sind sie behandelt von Cantor, *Agrimens.* S. 62.

1. *Εὑρεῖν δύο χωρία τετράγωνα, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου ἐμβαδὸν τοῦ ⟨τοῦ⟩ δευτέρου ἐμβαδοῦ ἔσται τριπλάσιον. ποιῶ οὕτως· τὰ γ κύβισον· γίνονται κζ· ταῦτα δίς· γίνονται νδ. νῦν ἆρον μονάδα α· λοιπὸν γίνονται νγ.*

Zn finden zwei viereckige Flächenräume der Art, daß der Rauminhalt des ersteren dreimal so groß ist als der des zweiten. Ich mache so: $3^3 = 27$, $27 \times 2 = 54$, $54 \div 1 = 53$. Es sei also die eine Seite = 53 Fuß, die andere = 54 Fuß. Und den

1) Darunter fol. 34^v—35^v *Geepon.* 53—58, die auch fol. 7^v—8^r stehen.

ἔστω οὖν ἡ μὲν μία πλευρὰ ποδῶν νγ̅, ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ ποδῶν νδ̅. καὶ τοῦ ἄλλου χωρίου οὕτως· θὲς ὁμοῦ τὰ νγ̅ καὶ τὰ νδ̅· γίνονται πόδες ρζ̅· ταῦτα ποίει ἐπὶ τὰ γ̅· ⟨γίνονται πόδες τκα. ἆρον τὰ γ⟩· λοιπὸν γίνονται πόδες τιη̅. ἔστω οὖν ἡ τοῦ προτέρου πλευρὰ ποδῶν τιη̅, ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ ποδῶν γ̅· τὰ δὲ ἐμβαδὰ τοῦ ἑνὸς γίνεται ποδῶν ϡνδ̅ καὶ τοῦ ἄλλου ποδῶν ,βωξβ.

Inhalt des anderen Flächenraumes so: $53 + 54 = 107$ Fuß, $107 \times 3 = 321$, $321 \dot{-} 3 = 318$ Fuß. Es sei also die eine[1]) Seite $= 318$ Fuß, die andere $= 3$ Fuß, und der Rauminhalt des einen $= 954$ Fuß, der des anderen $= 2862$ Fuß.

2. Εὑρεῖν χωρίον χωρίου τῇ περιμέτρῳ ἴσον, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τετραπλάσιον. ποιῶ οὕτως· τὰ δ̅ κύβισον ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες ξδ̅· ἆρον μονάδα α̅· λοιπὸν γίνονται πόδες ξγ̅· τοσούτου ἑκάστη τῶν περιμέτρων τῶν β̅ παραλλήλων πλευρῶν. διαστεῖλαι οὖν τὰς πλευράς. ποιῶ οὕτως· θὲς τὰ δ̅· ἆρον μονάδα α̅· λοιπὸν γ̅. ἡ μία οὖν πλευρὰ ποδῶν γ̅. ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ οὕτως· τῶν ξγ̅ ἆρον τὰ γ̅· λοιπὸν μένουσι πόδες ξ̅. τοῦ δὲ ἑτέρου χωρίου ποίει οὕτως· τὰ δ̅ ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες ιϛ̅· ἀπὸ τούτων ἆρον μονάδα α̅· λοιπὸν γίνονται πόδες ιε̅. τοσούτων ἔστω ἡ πρώτη πλευρά, ποδῶν ιε̅. ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ οὕτως· ἆρον τὰ ιε̅ τῶν ξγ̅· λοιπὸν γίνονται πόδες μη̅. ἔστω ἡ ἄλλη πλευρὰ ποδῶν μη̅. τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ποδῶν ψκ καὶ τοῦ ἄλλου ποδῶν ρπ.

Zu finden einen Flächenraum, dessen Umkreis dem eines anderen gleich ist, der Rauminhalt aber 4 mal so groß. Ich mache so: $4^3 = 64$ Fuß, $64 \dot{-} 1 = 63$ Fuß; so viel ist jeder Umkreis aus 2 der parallelen Seiten zusammengesetzt. Man hat dann die Seiten zu sondern. Ich mache so: $4 \dot{-} 1 = 3$; die eine Seite ist also $= 3$ Fuß. Die andere Seite so: $63 \dot{-} 3 = 60$ Fuß. Bei dem anderen Flächenraum mache so: $4 \times 4 = 16$ Fuß, $16 \dot{-} 1 = 15$ Fuß; so viel sei die erste Seite, also $= 15$ Fuß. Die andere Seite so: $63 \dot{-} 15 = 48$ Fuß; es sei die andere Seite $= 48$ Fuß. Der Rauminhalt aber des einen ist $= 720$ Fuß, der des anderen $= 180$ Fuß.

1) Statt τοῦ προτέρου ist προτέρα zu schreiben.

3. Χωρίον τετράγωνον ἔχον τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν ωϟϛ̅· διαχωρίσαι τὸ ἐμβαδὸν ἀπὸ τῆς περιμέτρου. ποιῶ οὕτως· ἔκθου καθολικῶς μονάδας δ· ὧν ∠'· γίνονται πόδες β. ταῦτα ποίησον ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες δ̅. σύνθες ἄρτι μετὰ τῶν ωϟϛ̅· ὁμοῦ γίνονται πόδες ͳ· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν λ̅· καὶ ἀπὸ τῶν δ ὕφειλον τὸ ∠'· γίνονται πόδες β̅· λοιπὸν γίνονται πόδες κη̅· τὸ οὖν ἐμβαδόν ἐστιν ποδῶν ψπδ̅, καὶ ἡ περίμετρος ἔστω ποδῶν ριβ̅. ὁμοῦ σύνθες ἄρτι τὰ πάντα· γίνονται πόδες ωϟϛ· τοσούτων ἔστω τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου, ποδῶν ωϟϛ̅.

Ein Quadrat, dessen Rauminhalt + Umkreis = 896 Fuß; den Rauminhalt vom Umkreis zu sondern. Ich mache so: allgemein $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ Fuß, $2 \times 2 = 4$ Fuß. $4 + 896 = 900$ Fuß, $\sqrt{900} = 30$ Fuß; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ Fuß, $4 \div 2 = 2$ Fuß, $\langle 30 \div 2\rangle = 28$ Fuß; ⟨so viel die Seite⟩. Der Rauminhalt ist also = 784 Fuß, und der Umkreis [sei] 112 Fuß. $784 + 112 = 896$ Fuß. So viel sei also der Rauminhalt + der Umkreis, nämlich 896 Fuß.[1])

4. Τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔστω ἡ περίμετρος ποδῶν ν· διαχωρίσαι τὰς πλευρὰς ἀπ' ἀλλήλων. ποιῶ οὕτως κατὰ τὴν Πυθαγορικὴν μέθοδον· ἐπεί ἐστι τὸ παρὰ Πυθαγόρου πρῶτον τρίγωνον ὀρθογώνιον ηὑρημένον τὸ γ' δ' ε', ποίει[2]) κοινωνοὺς ⟨τοὺς⟩ γ̅· ὁ πρῶτος ποδῶν γ, ὁ δεύτερος ποδῶν δ, ὁ γ' ποδῶν ε· κοινὰ δὲ αὐτοῖς τὰ πάντα ἔστω ποδῶν ν. ἔστω[3]) οὖν τῷ μὲν πρώτῳ ποδῶν ιβ ∠', τῷ ⟨δὲ⟩ δευτέρῳ ποδῶν ιϛ B, τῷ δὲ τρίτῳ ποδῶν κ∠'γ'. ὁμοῦ ἔστω τὰ πάντα ποδῶν ν, ὅ ἐστι περίμετρος τοῦ τριγώνου.

Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Umkreis = 50 Fuß; die Seiten voneinander zu sondern. Ich mache so nach der Pythagoreischen Methode: da das von Pythagoras zuerst gefundene rechtwinklige Dreieck das mit den Seiten 3, 4, 5 ist, mache diese drei Zahlen zu Faktoren; der erste sei 3 Fuß, der zweite 4 Fuß, der dritte 5 Fuß; die Summe des Ganzen aber sei = 50 Fuß. Es sei also die erste Seite = $12\frac{1}{2}$ Fuß, die zweite = $16\frac{2}{3}$ Fuß, die dritte = $20\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ Fuß. Zusammen = 50 Fuß, was Umkreis des Dreiecks ist.[4])

1 3 enthält die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung $x^2 + 4x \div 896 = 0$, und ist nur mitgenommen, weil sie in der Hs. hier steht. Der mißverständlich formulierte Schluß muß ursprünglich als Probe gemeint sein.

2) ε', ποίει] ἐποίει Hs.

3) Entweder muß ἔστωσαν und πόδες (3 mal) gelesen werden oder τὸ ... πρῶτον, τὸ ... δεύτερον, τὸ ... τρίτον.

4) $3x + 4x + 5x = 12x = 50 \quad x = 4\frac{1}{6}$.

5. *Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ποδῶν ε̅· εὑρεῖν τὰς πλευράς. ποιῶ οὕτως· σκέψαι τὰ ε̅ ἐπί τινα ἀριθμὸν τετράγωνον ἔχοντα ς̅, ἵνα πολυπλασιασθέν⟨τα⟩ τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν*[1] *ποιήσῃ. πολυπλασιασθέντα δὲ ἐπὶ τὸν λ̅ς̅ γίνονται πόδες ρ̅π̅, καὶ ἔσται τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδόν, οὗ ἐστιν ἡ κάθετος ποδῶν θ̅, ἡ δὲ βάσις ποδῶν μ̅, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ποδῶν μ̅α̅. καὶ τὰ ρ̅π̅ μερίζω παρὰ τὸν*[2] *ε̅, καὶ λ̅ς̅ ἐστιν, μήκει δὲ ἕ̅ξ̅.*[3] *λαβὲ τὸ ς' τῶν πλευρῶν, τουτέστι τῶν θ̅· γίνονται πόδες α̅∟'· καὶ τῶν μ̅ τὸ ς'· γίνονται πόδες ς̅Β ἡ βάσις· καὶ τῶν μ̅α̅ τὸ ς'· γίνονται πόδες ς∟'γ' ἡ ὑποτείνουσα. τὸ οὖν ἐμβαδὸν ποδῶν ε̅.*

Der Rauminhalt eines rechtwinkligen Dreiecks = 5 Fuß; zu finden die Seiten. Ich mache so: suche das Produkt von 5 und einer Quadratzahl, die 6 enthält, derart, daß es den Rauminhalt eines rechtwinkligen Dreiecks bilden kann. Es ist $5 \times 36 = 180$ Fuß, was der Rauminhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Kathete = 9 Fuß, die Grundlinie = 40 Fuß, die Hypotenuse = 41 Fuß. $180 : 5 = 36$, $\sqrt{36} = 6$. Nimm $^1/_6$ der Seiten, $^1/_6 \times 9 = 1^1/_2$ Fuß, $^1/_6 \times 40 = 6^2/_3$ Fuß, die Grundlinie, $^1/_6 \times 41 = 6^1/_2{}^1/_3$, die Hypotenuse. Der Rauminhalt folglich = 5 Fuß.

6. *Τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἡ κάθετος ποδῶν ι̅β̅, ἡ δὲ βάσις ποδῶν ι̅ς̅, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ποδῶν κ̅· γίνεται τὸ ἐμβαδὸν ποδῶν ϙ̅ς̅· ταῦτα μερίσαι εἰς ἄνδρας ι̅ς̅ ἑκάστῳ πόδας ς̅ ἐν ὀρθογωνίοις τριγώνοις. ποιῶ οὕτως· μέρισον τὸν*[4] *ϙ̅ς̅ εἰς ς̅· γίνονται πόδες ι̅ς̅· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν δ̅. ἄρτι λαμβάνω τῆς καθέτου τὸ δ'· γίνονται πόδες γ̅· καὶ τῆς βάσεως τὸ δ'· γίνονται πόδες δ̅· καὶ τῆς ὑποτεινούσης τὸ δ'· γίνονται πόδες ε̅· καὶ ἔσται ι̅ς̅ τρίγωνα ἔχοντα τὴν μὲν κάθετον ποδῶν γ̅, τὴν δὲ βάσιν ποδῶν δ̅, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν ποδῶν ε̅, τὸ δὲ ἐμβαδὸν ποδῶν ς̅.*

Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete = 12 Fuß, die Grundlinie = 16 Fuß, die Hypotenuse = 20 Fuß; der Rauminhalt = 96 Fuß; dies an 16 Männer zu verteilen; jedem 6 Fuß in der Gestalt rechtwinkliger Dreiecke. Ich mache so: $96 : 6 = 16$ Fuß, $\sqrt{16} = 4$ Fuß. $^1/_4$ der Kathete = 3 Fuß, $^1/_4$ der Grundlinie = 4 Fuß, $^1/_4$ der Hypotenuse = 5 Fuß; und es entstehen 16 Dreiecke, deren Kathete = 3 Fuß, die Grundlinie = 4 Fuß, die Hypotenuse = 5 Fuß, und der Rauminhalt = 6 Fuß.

1) τοῦ ἐμβαδοῦ Hs 2) τῶν Hs. 3) ἑξαπλασίονα Hs.
4) τῶν Hs.

7. Τρίγωνον ὀρθογώνιον[1]), οὗ ἡ κάθετος ποδῶν ιβ [τὸ ἐμβαδὸν ϙϛ]· εὑρεῖν αὐτοῦ τὴν βάσιν καὶ τὴν ὑποτείνουσαν. ποιῶ οὕτως· προστιθῶ τοῖς ιβ τῆς καθέτου τὸ γ'· γίνονται πόδες δ· ὁμοῦ γίνονται πόδες ιϛ· τοσούτων ἔστω ἡ βάσις, ποδῶν ιϛ. πάλιν προστιθῶ τῆς βάσεως τὸ δ'· γίνονται πόδες δ· ὁμοῦ γίνονται πόδες κ· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν κ. τὸ ἐμβαδὸν ἔστω ποδῶν ϙϛ.

Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete = 12 Fuß [der Rauminhalt = 96]; zu finden dessen Grundlinie und Hypotenuse. Ich mache so: $^1/_3 \times 12$ der Kathete = 4 Fuß, 12 + 4 = 16 Fuß; so viel sei die Grundlinie, nämlich = 16 Fuß. $^1/_4$ der Grundlinie = 4 Fuß, 16 + 4 = 20 Fuß; es sei die Hypotenuse = 20 Fuß. Der Rauminhalt sei = 96 Fuß.

8. Ἐὰν δὲ τριγώνου ὀρθογωνίου δοθείσης τῆς βάσεως ποδῶν κδ ζητοῦμεν τὴν κάθετον καὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ποιῶ οὕτως· ὕφειλον τῆς βάσεως τὸ δ'· γίνονται πόδες ϛ· λοιπὸν μένουσι πόδες ιη· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν ιη. πάλιν πρόσθες τῆς βάσεως τὸ δ'· γίνονται πόδες ϛ· ὁμοῦ πρόσθες τῇ βάσει· γίνονται πόδες λ· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν λ. τὸ ἐμβαδὸν ποδῶν σιϛ.

Wenn wir aber in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Grundlinie gegeben ist = 24 Fuß, die Kathete und die Hypotenuse suchen, mache ich so: $^1/_4$ der Grundlinie = 6 Fuß, 24 ÷ 6 = 18 Fuß; es sei die Kathete = 18 Fuß. Wiederum $^1/_4$ der Grundlinie = 6 Fuß, 24 der Grundlinie + 6 = 30 Fuß; es sei die Hypotenuse = 30 Fuß. Der Rauminhalt = 216 Fuß.

9. Ἐὰν δὲ θέλῃς ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης εὑρεῖν τὴν βάσιν καὶ τὴν κάθετον, ποίει οὕτως· ἐάν ἐστιν ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν λ, ὕφειλον τὸ ε' μέρος τῶν λ· γίνεται ϛ· λοιπὸν μένουσι πόδες κδ· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν κδ. πάλιν ἀπὸ τῶν κδ ποδῶν τῆς βάσεως ὕφειλον τὸ δ'· γίνονται πόδες ϛ· λοιπὸν μένουσι πόδες ιη· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν ιη. τὸ δέ ἐμβαδὸν ποδῶν σιϛ.

Wenn du aber aus der Hypotenuse die Grundlinie und die Kathete finden willst, mache so: wenn die Hypotenuse = 30 Fuß, nimm $^1/_5 \times 30 = 6$, 30 ÷ 6 = 24 Fuß; es sei die Grundlinie = 24 Fuß. Wiederum $^1/_4$ der Grundlinie = 6 Fuß, 24 ÷ 6 = 18 Fuß; es sei die Kathete = 18 Fuß. Der Rauminhalt aber ist = 216 Fuß.

1) τριγώνου ὀρθογωνίου Hs

10. Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν σπ· ἀποδιαστεῖλαι τὰς πλευρὰς καὶ εὑρεῖν τὸ ἐμβαδόν. ποιῶ οὕτως· ἀεὶ ζήτει τοὺς ἀπαρτίζοντας ἀριθμούς, ἀπαρτίζει δὲ τὸν σπ ὁ δὶς[1]) τὸν ρμ, ὁ δ' τὸν ο, ὁ ε' τὸν νϛ, ὁ ζ' τὸν μ, ὁ η' τὸν λε, ὁ ι' τὸν κη, ὁ ιδ' τὸν κ. ἐσκεψάμην, ὅτι ὁ η καὶ λε ποιήσουσι[2]) τὸ δοθὲν ἐπίταγμα. τῶν σπ τὸ η' γίνεται πόδες λε. διὰ παντὸς λάμβανε δυάδα τῶν η· λοιπὸν μένουσιν ϛ πόδες. τὰ οὖν λε καὶ τὰ ϛ ὁμοῦ γίνονται πόδες μα· ταῦτα ποίει ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες ,αχπα. τὰ λε ἐπὶ τὰ ϛ· γίνονται πόδες σι· ταῦτα ποίει ἀεὶ τὰ η· γίνονται πόδες ,αχπ· ταῦτα ἆρον ἀπὸ τῶν ,αχπα· λοιπὸν μένει α· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται α. ἄρτι θὲς τὰ μα καὶ ἆρον μονάδα α· λοιπὸν μ· ὧν ∟' γίνεται κ· τοῦτό ἐστιν ἡ κάθετος, ποδῶν κ. καὶ θὲς πάλιν τὰ μα καὶ πρόσθες α· γίνονται πόδες μβ· ὧν ∟' γίνονται πόδες κα· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν κα. καὶ θὲς τὰ λε καὶ ἆρον τὰ ϛ· λοιπὸν μένουσι πόδες κθ. ἄρτι θὲς τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν· ὧν ∟' γίνονται πόδες σι. καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ περιμετρούμεναι ἔχουσι πόδας ο· ὁμοῦ σύνθες μετὰ τοῦ ἐμβαδοῦ· γίνονται πόδες σπ.

Der Rauminhalt eines rechtwinkligen Dreiecks + der Umkreis = 280 Fuß; die Seiten auszusondern und den Rauminhalt zu finden. Ich mache so: suche immer die Faktoren, und es ist $280 = 2 \times 140 = 4 \times 70 = 5 \times 56 = 7 \times 40 = 8 \times 35 = 10 \times 28 = 14 \times 20$. Ich finde, daß 8 und 35 die Forderung erfüllen werden. $\frac{1}{8} \times 280 = 35$ Fuß. Nimm immer $8 \div 2 = 6$ Fuß. $35 + 6 = 41$ Fuß, $41 \times 41 = 1681$ Fuß. $35 \times 6 = 210$ Fuß, immer $210 \times 8 = 1680$ Fuß, $1681 \div 1680 = 1$, $\sqrt{1} = 1$. Darauf $41 \div 1 = 40$, $\frac{1}{2} \times 40 = 20$; dies ist die Kathete, $= 20$ Fuß. Hinwiederum $41 + 1 = 42$ Fuß, $\frac{1}{2} \times 42 = 21$ Fuß; es sei die Grundlinie $= 21$ Fuß. $35 \div 6 = 29$ Fuß. Nimm dann Kathete $\times$ Grundlinie, davon $\frac{1}{2} = 210$ Fuß. Und die drei Seiten herumgemessen betragen 70 Fuß; $70 +$ Rauminhalt $= 280$ Fuß.

11. Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν

In einem rechtwinkligen Dreieck Rauminhalt + Umkreis = 270 Fuß;

1) σπ tilgt Hs., ὁ δίς] διακοσιοστοόγδοηκοστοδυας Hs.
2) ποιήσωσι Hs

σο· ἀποδιαστεῖλαι τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν. ποιῶ οὕτως· ἀεὶ ζήτει τοὺς ἀπαρτίζοντας ἀριθμούς, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου· ἀπαρτίζει [μονάδας] τὸν σο ὁ δὶς τὸν[1]) ρλε, ὁ γ' τὸν[2]) ϙ, ὁ ε' τὸν[2]) νδ, ὁ ϛ' τὸν[2]) με, ὁ θ' τὸν[2]) λ, ὁ ι' τὸν[2]) κζ. ἐσκεψάμην, ὅτι ϛ καὶ με ποιήσει τὸ ἐπιταχθέν. τὸ ϛ' τῶν σο· γίνονται με πόδες. διὰ παντὸς λάμβανε δυάδα τῶν ϛ· λοιπὸν δ· τὰ με καὶ τὰ δ ὁμοῦ σύνθες· γίνονται μθ. ταῦτα ποιήσομεν ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες ,βυα· καὶ τὰ με ποίησον ἐπὶ τὰ δ· γίνονται πόδες ρπ. ταῦτα διὰ παντὸς ποίει ἐπὶ τὰ η· γίνονται πόδες ,αυμ· ἆρον αὐτὰ ἀπὸ τῶν ,βυα· λοιπὸν μένουσιν ϡξα· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν λα. ἄρτι θὲς τὰ μθ καὶ ἆρον τὰ λα· γίνονται πόδες ιη· ὧν ∠' γίνονται πόδες θ· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν θ. καὶ θὲς τὰ μθ καὶ τὰ λα· ὁμοῦ π γίνονται πόδες· ὧν ∠' γίνεται μ· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν μ. καὶ θὲς τὰ με καὶ ἆρον τὰ δ· λοιπὸν μένουσι πόδες μα· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν μα. τὸ δὲ ἐμβαδὸν ποδῶν ρπ. ἄρτι σύνθες ὁμοῦ τὰς γ πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν· γίνονται πόδες σο.

die Seiten und den Rauminhalt auszusondern. Ich mache so: suche immer die Faktoren, wie auch in dem ersten Beispiel; es ist 270 $= 2 \times 135 = 3 \times 90 = 5 \times 54 = 6 \times 45 = 9 \times 30 = 10 \times 27$. Ich finde, daß 6 und 45 die Forderung erfüllen werden. $\frac{1}{6} \times 270 = 45$ Fuß. Nimm immer $6 - 2 = 4$; $45 + 4 = 49$, $49 \times 49 = 2401$ Fuß; $45 \times 4 = 180$ Fuß; immer $8 \times 180 = 1440$ Fuß; $2401 - 1440 = 961$, $\sqrt{961} = 31$ Fuß. Darauf $49 - 31 = 18$ Fuß, $\frac{1}{2} \times 18 = 9$ Fuß; es sei die Kathete = 9 Fuß. Ferner $49 + 31 = 80$ Fuß, $\frac{1}{2} \times 80 = 40$; es sei die Grundlinie = 40 Fuß. Ferner $45 - 4 = 41$ Fuß; es sei die Hypotenuse = 41 Fuß. Und der Rauminhalt = 180 Fuß. Addiere dann die 3 Seiten und den Rauminhalt; gibt 270 Fuß.

12. Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν ρ· ἀποδιαστεῖλαι τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν. ποίει οὕτως· σκέπτου τὸν ἀπαρτίζοντα ἀριθ-

In einem rechtwinkligen Dreieck der Rauminhalt + der Umkreis = 100 Fuß; die Seiten und den Rauminhalt auszusondern. Mache so: untersuche die Faktoren; ich

1) τῶν σο δυὰς τῶν Hs.

2) ἃ Hs

μόν· ἐσκεψάμην, ὅτι ὁ ε καὶ ὁ κ τὸ ἐπιταχθὲν ποιήσουσιν. τὸ ε' τῶν ρ γίνονται πόδες κ. διὰ παντὸς λάμβανε δυάδα τῶν ε· λοιπὸν μένουσι γ. τὰ οὖν γ καὶ τὰ κ σύνθες· γίνονται πόδες κγ· ταῦτα ἐφ' ἑαυτά· γίνονται φκθ· καὶ τὰ κ ποίησον ἐπὶ τὰ γ· γίνονται πόδες ξ· ταῦτα διὰ παντὸς ἐπὶ τὰ η· γίνονται πόδες υπ· ἆρον ἀπὸ τῶν φκθ· λοιπὸν μένουσι[1]) πόδες μθ· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν ζ· λοιπὸν μένουσι ις· ὧν ∠' γίνεται η· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν η. θὲς πάλιν τὰ κγ καὶ πρόσθες τὰ ζ· ὁμοῦ γίνονται πόδες λ· ὧν ∠' γίνεται ιε· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν ιε. καὶ θὲς[2]) τὰ κ καὶ ἆρον τὰ γ· λοιπὸν μένουσι πόδες ιζ· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν ιζ. τὸ δὲ ἐμβαδὸν ποδῶν ξ. ὁμοῦ σύνθες τὰς γ πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν· γίνονται πόδες ρ.

finde, daß 5 und 20 die Forderung erfüllen werden. $^1/_5 \times 100 = 20$ Fuß. Nimm immer $5 \div 2 = 3$. $3 + 20 = 23$ Fuß, $23 \times 23 = 529$. Ferner $20 \times 3 = 60$ Fuß; immer $60 \times 8 = 480$ Fuß; $529 \div 480 = 49$ Fuß; $\sqrt{49} = 7$ Fuß, $\langle 23 \div 7 \rangle = 16$, $^1/_2 \times 16 = 8$; es sei die Kathete = 8 Fuß. Wiederum $23 + 7 = 30$ Fuß, $^1/_2 \times 30 = 15$; es sei die Grundlinie = 15 Fuß. Ferner $20 \div 3 = 17$ Fuß; es sei die Hypotenuse = 17 Fuß. Der Rauminhalt aber = 60 Fuß. Addiere die 3 Seiten und den Rauminhalt; gibt 100 Fuß.

13. *Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν ϙ· ἀποδιαστεῖλαι τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν. ποιῶ οὕτως· ἐσκεψάμην, ὅτι ὁ ε καὶ ὁ ιη[2]) ποιήσει τὸ ἐπιταχθέν, οὕτως· τὸ ε' τῶν ϙ γίνονται πόδες ιη· διὰ παντὸς λάμβανε δυάδα τῶν ε· μένουσι γ. σύνθες τὰ ιη καὶ τὰ γ· γίνονται πόδες κα. ταῦτα ἐπὶ τὰ γ· γίνονται πόδες νδ.[3]) ταῦτα πάντοτε ποίει ἐπὶ τὰ η· γίνονται πόδες υλβ. ταῦτα ἆρον ἀπὸ τῶν υμα· λοι-*

In einem rechtwinkligen Dreieck der Rauminhalt + der Umkreis = 90 Fuß; die Seiten und den Rauminhalt auszusondern. Ich mache so: ich finde, daß 5 und 18 die Forderung erfüllen werden, folgendermaßen: $^1/_5 \times 90 = 18$ Fuß. Nimm immer $5 \div 2 = 3$. $18 + 3 = 21$, $\langle 21 \times 21 = 441 \rangle$. $18 \times 3 = 54$ Fuß. Nimm immer $8 \times 54 = 432$ Fuß. $441 \div 432 = 9$, $\sqrt{9} = 3$ Fuß. Ferner $21 \div 3 = 18$, $^1/_2 \times 18 = 9$ Fuß; es sei die Kathete = 9 Fuß. Wiederum $21 + 3 = 24$ Fuß, $^1/_2 \times 24 = 12$; es sei die

1) μένει Hs. 2) ἡ Hs. 3) ξδ Hs.

πὸν θ· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν γ. θὲς τὰ κα καὶ ἆρον τὰ γ· λοιπὸν ιη· ὧν L' γίνονται πόδες θ· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν θ. καὶ θὲς πάλιν τὰ κα καὶ πρόσθες τὰ γ· ὁμοῦ γίνονται πόδες κδ· ὧν L' γίνεται ιβ· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν ιβ. καὶ θὲς πάλιν τὰ ιη καὶ ἆρον τὰ γ· λοιπὸν ιε· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν ιε. τὸ δὲ ἐμβαδὸν ποδῶν νδ. ὁμοῦ σύνθες τὰς γ πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν· γίνονται πόδες ϙ.

Grundlinie = 12 Fuß. Wiederum 18 ∸ 3 = 15; es sei die Hypotenuse = 15 Fuß. Und der Rauminhalt ist = 54 Fuß. Addiere die 3 Seiten und den Rauminhalt; gibt 90 Fuß.

J. L. Heiberg.

Kommentar.

Ich fange den Kommentar mit Bemerkungen über die einzelnen Aufgaben und ihre Lösungen an.

1 und **2** sind, wie es in einer die Übersetzung begleitenden Note schon bemerkt ist, früher publiziert und von Cantor berücksichtigt. Später sind sie auch von P. Tannery behandelt.[1]) Diese Herren nehmen beide eine Lücke in **1** an, die P. Tannery mit den unten gesperrten Wörtern ausfüllt:

Zu finden zwei viereckige Flächenräume der Art, daß der Umkreis des zweiten dreimal so groß ist als der des ersten, und daß der Rauminhalt des ersteren usw.

Auch Cantor faßt die Aufgabe so auf, was ganz mit der Auflösung stimmt. Im vorliegenden neuen Text fehlen zwar die Andeutungen einer solchen Lücke. Dadurch ist aber die Aufgabe so unbestimmt geworden, daß man gar nicht begreifen würde, warum sie eine so ausführliche Lösung fordert. Cantors und Tannerys Ausfüllung ist daher sicher richtig. Weiter ist die Zahl 3 — wie 4 in der Aufgabe **2** — für eine willkürliche Zahl gesetzt, was man daran sieht, daß die Rechnungen mit den so gewählten Zahlen so beschrieben werden, daß sie unmittelbar durch beliebige Zahlen ersetzt werden können. Die Aufgabe ist also dieselbe, die wir durch die in x, y, u, v unbestimmten Gleichungen:

1) Mémoires de la soc. des sc. de Bordeaux 4_2 (1882).

$$(1)\qquad \begin{cases} u + v = n(x + y), \\ xy = n \cdot uv \end{cases}$$

ausdrücken würden.

Die im Text gegebene Lösung ist die folgende.

$$(2)\qquad \begin{cases} x = 2n^3 - 1, \quad y = 2n^3, \\ u = n(4n^3 - 2), \quad v = n. \end{cases}$$

Wie sich ebendiese Auflösung darbieten konnte, wird durch die folgenden Betrachtungen verständlich.

Da die Aufgabe unbestimmt ist, kann man mit einem Versuch anfangen. Nahe liegt es dann, den Wert $v = n$ zu probieren, der wegen der ersten Gleichung (1) mit sich führt, daß u ein Multiplum von n sein muß, also $u = nz$. Dann hat man

$$x + y = 1 + z,$$
$$xy = n^3 z,$$

woraus

$$xy = n^3(x + y) - n^3$$

oder

$$(x - n^3)(y - n^3) = n^3(n^3 - 1).$$

Eine in die Augen springende Lösung dieser Aufgabe ist

$$x - n^3 = n^3 - 1, \quad y - n^3 = n^3,$$

die eben die oben mitgeteilte ist. Die der Kürze halber hier durch Formeln ausgedrückten Operationen ließen sich leicht in Worten ausdrücken.

2. Hier sind die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} x + y = u + v \\ xy = n \cdot uv \end{cases}$$

zu lösen. Die gegebene Lösung ist die folgende:

$$(2)\qquad x + y = u + v = n^3 - 1,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} u = n - 1, \quad v = n(n^2 - 1), \\ x = n^2 - 1, \quad y = n^2(n - 1). \end{cases}$$

Hier mag man etwa die folgende Lösung der zweiten Gleichung (1) probiert haben:

$$v = nx, \quad y = n^2 u.$$

Die erste Gleichung gibt dann

$$(n - 1)x = (n^2 - 1)u,$$

die durch $x = n^2 - 1$, $u = n - 1$ lösbar ist.

Eine solche Herleitung macht es verständlich, daß eine Lösung aufgestellt ist, wo die Größen x, y, u, v einen ganz bestimmten gemeinschaftlichen Faktor, nämlich $(n - 1)$, enthalten, die sich durch einen will-

kürlichen Faktor a ersetzen ließe, wodurch man die allgemeinere Lösung finden würde[1]):

$$u = a, \quad v = n(n+1)a, \quad x = (n+1)a, \quad y = n^2 a.$$

Diese Auflösung ist doch nicht die allgemeine, die man dagegen erhalten würde, wenn man statt $v = nx$ zu setzen, dem Verhältnis $v : x$ einen beliebigen Wert m beilegt. Dann gibt die zweite Gleichung (1)

$$v = mx, \; y = mnu$$

und demnächst die erste

$$(m-1)x = (mn-1)u.$$

Die allgemeine Auflösung ist also

$$\frac{x}{mn-1} = \frac{y}{mn(m-1)} = \frac{u}{m-1} = \frac{v}{m(mn-1)},$$

wo doch das Verhältnis m nicht nur ganze, sondern auch gebrochene Werte annehmen kann.

3 enthält nur die Lösung einer gemischten quadratischen Gleichung und **4** eine einfache Benutzung der Verhältnisse 3 : 4 : 5 der Seiten eines „pythagoreischen" rechtwinkligen Dreiecks.

5. Es werden hier rationale Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Fläche A gesucht. Dies wird dadurch erzielt, daß man es versucht durch Multiplikation von A mit einem Quadrat m^2, die einer Multiplikation der Seiten mit m entspricht, die Seiten durch ganze Zahlen auszudrücken. Es wird außerdem vorgeschrieben, daß m^2 den Faktor 6 enthalten muß (was nicht schon mit dem aufgegebenen Wert von A der Fall ist). Diese Vorschrift zeigt, daß der Urheber der Aufgabe gewußt hat, daß die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten durch ganze Zahlen ausgedrückt sind, durch 6 teilbar ist. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus der allgemeinen Euklidischen Bestimmung der Seiten eines solchen Dreiecks[2]), nämlich

$$x = a \cdot mn, \quad y = a\frac{m^2-n^2}{2}, \quad z = a\frac{m^2+n^2}{2},$$

wo a eine beliebige Zahl ist, m und n Zahlen, die beide gerade oder beide ungerade sind. Die Fläche dieses Dreiecks wird durch

$$a^2\frac{mn(m-n)(m+n)}{4}$$

1) Vgl. Cantor, *Agrimensoren* p. 194—195 (Note 116), wo auch auf die spätere Behandlung derselben Aufgabe in dem Rechenbuch des Maximus Planudes (ed. C. J. Gerhardt, 1865) hingewiesen wird.

2) Euklid X, 28 Lemma 1.

ausgedrückt, wo der Zähler durch 24 teilbar ist.[1]) Daß er durch 8 teilbar ist, ist nämlich offenbar, wenn m und n gerade sind. Dasselbe ist der Fall, wenn m und n ungerade sind; denn die Zahlen $m - n$ und $m + n$ sind dann durch 2 teilbar, und weil ihr Unterschied $2n$ nicht durch 4 teilbar ist, muß die eine Zahl es sein[2]); und wenn weder m noch n durch 3 teilbar ist, sieht man durch Betrachtung der verschiedenen Fälle $m = 3r \pm 1$, $n = 3s \pm 1$, daß entweder $m - n$ oder $m + n$ durch 3 teilbar ist.

Es wäre vielleicht denkbar, daß der Urheber der Aufgabe die Richtigkeit des hier genannten Satzes nur für eine einzelne Klasse rationaler, rechtwinkliger Dreiecke kannte, und zwar für diejenigen, die nach der dem Pythagoras beigelegten Regel (das heißt für $n = 1$) gebildet sind. Dieser Klasse gehört nämlich das in dem hier vorliegenden numerischen Beispiel gefundene Dreieck. Von dieser Möglichkeit dürfen wir doch absehen, da dieselbe Regel in **10—13** auch zur Entdeckung rationaler, rechtwinkliger Dreiecke, die nicht alle dieser Klasse gehören, Anwendung gefunden zu haben scheint.

6. Einfache Anwendung des Satzes über das Verhältnis der Flächen ähnlicher Dreiecke.

7—9. Einfache Anwendungen der Verhältnisse $3:4:5$ der Seiten gewisser rechtwinkliger Dreiecke. Die eingeklammerten Worte in **7** werden bei der Lösung nicht benutzt, und Entsprechendes fehlt in **8** und **9**.

10—13 enthalten 4 verschiedene numerische Beispiele derselben geometrischen Aufgabe. Diese Aufgabe und ihre Auflösung beruhen auf folgenden Formeln, wo a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, c seine Hypotenuse, T seine Fläche, r den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises bedeuten, und wo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$:

$$T = rs = \frac{1}{2}ab, \quad r + s = a + b, \quad c = s - r.$$

Die Beweise dieser Formeln knüpfen sich leicht an dieselbe Figur, wodurch die „Heronische" Dreiecksformel bewiesen wird.[3])

Die in **10—13** gelöste Aufgabe ist jedoch dadurch komplizierter gemacht, daß nicht eine der hier bezeichneten Größen, sondern die

1) Dasselbe hat später Leonardo Pisano bewiesen, um einen anderen Gebrauch davon zu machen [*Scritti*, ed. B. Boncompagni II (1862), p. 264].

2) Bei dieser Untersuchung hat man solche Distinktionen wie diejenige unter „*nur* gerad-ungeraden" Zahlen, das heißt von der Form $4r + 2$ (Euklid IX, 33), und „sowohl gerad-geraden als gerad-ungeraden" Zahlen, das heißt von der Form $8r + 4$ (Euklid IX, 34), brauchen können. Vielleicht in Anschluß an Pythagoreische Definitionen drückt Nikomachos diesen Unterschied durch andere Benennungen aus (siehe Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, p. 198—199).

3) Herons *Vermessungslehre* (herausg. v. Schöne), p. 20—21.

Summe der Fläche und des Perimeters gegeben ist. Nennen wir diese Summe, der nur in den verschiedenen Aufgaben verschiedene numerische, ganzzahlige Werte beigelegt werden, A, hat man

$$T + 2s = s(r + 2) = A.$$

Da man nur rationale rechtwinklige Dreiecke, und hier besonders solche mit ganzzahligen Seiten, sucht, gilt es jetzt, A so in zwei Faktoren s und $r + 2$ zu zerlegen, daß rs die Fläche eines solchen Dreiecks werde. Man zerlegt dann A auf alle mögliche Weisen in zwei ganzzahlige Faktoren und probiert nachher die so erhaltenen Zahlenpaare. Das erste Probemittel, das man wahrscheinlich auch hier benutzt hat, haben wir schon in **5** kennen gelernt, nämlich die Teilbarkeit der Fläche durch 6. Das weitere Probieren hat im Aufsuchen der Werte von a und b bestanden, deren Summe $r + s$ und Produkt $2rs$ jetzt bekannt sind. Die Auflösung der dazu dienenden Gleichung 2. Grades wird für die Fälle durchgeführt, wo sie wirklich ganzzahlige Auflösungen gibt Die Ausrechnung ist in allen vier Beispielen nach der folgenden Formel ausgeführt:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \frac{r + s \mp \sqrt{(r+s)^2 - 8rs}}{2}.$$

Man fängt also nicht, wie in der Lösung von **3**, damit an, den Koeffizient der Unbekannten zu halbieren. Demnächst wird c durch die dritte Gleichung bestimmt.

Es ist übrigens wahrscheinlich, daß derjenige, der die Aufgaben aufgestellt hat, die Werte von A im voraus so gewählt hat, daß sie auf ihm bekannte, rationale, rechtwinklige Dreiecke passen. Diese haben die Seiten

20, 21, 29;
9, 40, 41;
8, 15, 17;
9, 12, 15, (3, 4, 5),

unter welchen namentlich das erste weder nach der sogenannten Pythagoreischen Regel noch nach der sogenannten Platonischen gebildet ist.

Die vorliegenden Formeln deuten übrigens an, wozu man solche Aufgaben wie die in **2** behandelte benutzt haben kann. Die rationalen Auflösungen der Gleichungen

$$ab = 2rs, \quad a + b = r + s,$$

die für $n = 2$ in den Gleichungen **2** (1) einbefaßt sind, geben, wie wir jetzt sehen, ein neues Mittel zur Bildung rationaler, rechtwinkliger Dreiecke. Die in **2** mitgeteilte Lösung führt doch nur auf das Dreieck 3, 4, 5. Um die drei übrigen zu haben, müßte man in die von uns aufgestellte

allgemeine Auflösung von 2 für m beziehungsweise $\frac{7}{4}$ $\left(\text{oder } \frac{3}{10}\right)$, $5\left(\text{oder } \frac{4}{9}\right)$, $\frac{5}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{3}{8}\right)$ einsetzen. Ich wage doch nicht die Hypothese aufzustellen, daß man wirklich diesen Zusammenhang der Aufgaben benutzt habe. Um die Art der durch die Aufstellung solcher Aufgaben verfolgten Zwecke nachzuspüren, muß man jedenfalls solche faktisch existierende Zusammenhänge beachten.

Wie man bemerkt haben wird, erweitern die in **5** und in **10—13** behandelten Aufgaben wirklich unsere Kenntnisse der alten griechischen Geometrie. Leider läßt sich, wie man aus den Bemerkungen Heibergs ersehen haben wird, der Zeitpunkt der Abfassung des Stückes aus der Art der Überlieferung nicht bestimmen. Der positive Wert der in den genannten Aufgaben benutzten Sätze legt es jedoch nahe, die Entdeckung dieser Sätze selbst nicht allzuspät zu setzen. Jedenfalls muß sowohl diese Entdeckung als die Erfindung der hier gegebenen Beispiele älter als die vorliegende Mitteilung sein. Wenn diese nicht eine rein mechanische, kaum verstandene Wiedergabe von etwas viel Älterem ist, setzt sie jedenfalls die Kenntnis der benutzten Sätze voraus, und enthält nur eine detaillierte Angabe über die daraus folgenden Rechnungen, die in jeder numerischen Anwendung anszuführen sind.

Die Zusammenstellung so trivialer Aufgaben wie **4** und **7—9** mit denjenigen, die wir hier hervorgehoben haben, kann auch kaum dem Entdecker der letzteren zugrunde liegenden Sätze gehören. Dagegen ist es sehr wahrscheinlich, daß eben der Entdecker der in **10—13** benutzten einfachen Relationen gleich alle ihre 4 hier zusammengestellten numerischen Anwendungen ersonnen hat.

Kann man nun zwar nicht zeitlich weder dem erhaltenen Bruchstück, noch der Entdeckung der darin benutzten Sätze ihren Platz anweisen, so ist es leichter den Platz anzugeben, den die erhaltenen Sätze und die Tendenz ihrer Anwendungen unter den bekannten Beiträgen zur Kenntnis der altgriechischen Mathematik sachlich einnehmen. Neben der neugefundenen Vermessungslehre von Heron zeugen auch die hier vorliegenden Aufgaben davon, daß die Griechen sich auch um die rein numerischen Anwendungen der Sätze bemüht haben, denen die großen Schriftsteller eine so abstrakte geometrische Form gaben. Diese war — ganz wie die jetzige algebraische Formelsprache — notwendig, um die Sätze — darunter auch diejenigen über die Lösung der Gleichungen 2. Grades — so ganz allgemein darzustellen und zu beweisen, daß sie auch auf inkommensurable Größen anwendbar wurden. Sie schließt aber keineswegs die numerischen Anwendungen aus, und hat es — was man

indirekt aus Euklids X. Buch schließen kann — ebensowenig zur Zeit der großen Geometer getan als zur Zeit des Heron und der Erfinder der vorliegenden Aufgaben.

Wenn auch Heron in der Vermessungslehre solche numerische Beispiele nicht scheut, die auf irrationale Quadratwurzeln führen, so zieht er doch solche vor, die rationale Lösungen haben. Diese lassen sich oft erhalten durch Benutzung der damals schon längst bekannten rationalen rechtwinkligen Dreiecke, woraus man durch Zusammensetzung auch rationale schiefwinklige Dreiecke bilden kann.[1]) Die vorliegenden Aufgaben zeigen nun eine Bestrebung danach, weitere Mittel zur Bildung solcher Beispiele zu erfinden. Diese schließen sich wesentlich an die Regeln für Bildung rationaler, rechtwinkliger Dreiecke an, was namentlich von dem in **5** benutzten, interessanten Satz gilt. Von einer anderen Seite greifen die Aufgaben **1** und **2** dieselbe Sache an. Da die Bestimmung zweier Zahlen durch ihre Summe und Produkt auch für die Griechen mit der Lösung einer Gleichung 2. Grades identisch war[2]), führen diese Aufgaben auf die Bildung zweier rational lösbaren Gleichungen, deren Koeffizienten unter sich gegebene Beziehungen haben. Diese Aufgaben sind unbestimmt. Dasselbe wird gewöhnlich bei solchen Aufgaben der Fall sein, die einen ähnlichen Zweck verfolgen. Um eine rational lösbare Gleichung 2. Grades zu haben, deren Koeffizienten von gewissen Größen abhängen, kommt es nämlich darauf an, diese Größen so zu bestimmen, daß ein gewisser Ausdruck einer Quadratzahl gleich werde.

Es begegnet uns also hier eine Art von Aufgaben, die man sonst vorzugsweise bei Diophant suchen würde, und die weitere Verfolgung ähnlicher Zwecke würde auf die Bildung mehrerer solcher Aufgaben führen. Zur selben Zeit bietet die Behandlung einige Übereinstimmungen mit der Diophantischen dar. **1** und **2** zielen z. B. offenbar auf die Lösung der allgemeinen Aufgaben ab, die wir durch die Gleichungen **1** (1) und **2** (1) dargestellt haben; um die Lösung dieser Aufgaben zu zeigen, führt der Verfasser aber die dazu dienenden Rechnungen für den Spezialwert $n = 3$, beziehungsweise $n = 4$ aus, ganz wie Diophant es tun würde.

Mit Diophant stimmt es auch, daß man in der Aufgabe **5** nicht ganzzahlige Auflösungen sucht, sondern sich mit rationalen Auflösungen begnügt.

Ein Diophantischer Zug ist es weiter, daß der Verfasser sich nicht um die geometrische Homogenität kümmert, sondern sowohl in **3** als in **10—13** Fläche und Umkreis addiert. Dies ist natürlich berechtigt, wenn man sich die Linie in einem ganz bestimmten Maß, die Flächen im entsprechenden Flächenmaß ausgedrückt denkt. Der Verfasser weicht

1) Solche Beispiele haben bekanntlich auch die alten indischen Geometer angewandt. 2) Euklid, *Data* 85.

aber von Diophant und Heron darin ab, daß er ausdrücklich das Längenmaß als Fuß bezeichnet. Glücklich ist er doch dabei nicht, indem er unverändert dieselbe Benennung auf das Flächenmaß anwendet, und noch weniger, wenn er in **6** auch Verhältnisse, die reine Zahlen sein müssen, als Fuß bezeichnet. Diese ungünstigen Eigentümlichkeiten gehören doch sicher nicht dem ursprünglichen Verfasser.

Trotz der genannten Übereinstimmungen findet man bei Diophant keine der hier behandelten Aufgaben. Sie könnten zu den verlorenen Teilen seiner Arithmetik gehört haben, was ich doch als wenig wahrscheinlich betrachte; denn ihr natürlicher Platz würde im 2. oder 6. Buche sein.

Das erhaltene Stück dürfte, was P. Tannery schon von den ihm aus einer anderen Handschrift bekannten Aufgaben **1—2** bemerkt hat, sich den von Tannery so sorgfältig aufgesuchten, leider so sparsam vorliegenden Übergangsgliedern zwischen der zu Pythagoras' Zeiten anfangenden, in Euklids Elementen vollendeten Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ und der Diophantischen Arithmetik anschließen. Durch die interessante Anwendung der Euklidischen Lösung in **5** und durch die Anwendung in **10—13** von geometrischen Sätzen, die ebensowohl bei der geometrischen Lösung entsprechender, geometrisch gestellter Aufgaben benutzt werden könnten, steht es den älteren Untersuchungen näher als der Diophantischen Arithmetik, die mit der Geometrie nur eine rein äußerliche Verbindung hat. Man kann sich wohl vorstellen, daß die in diesem Stück hervortretenden Bestrebungen sich später von den geometrischen Zwecken nach und nach losgemacht haben, so daß man mehr und mehr wie Diophant unbestimmte Gleichungen um ihrer selbst willen studierte.

Weist man sachlich dem erhaltenen Stück diesen Platz zu, muß man wenigstens die erste Aufstellung der wichtigsten darin enthaltenen Aufgaben in die Zeit zwischen Euklid und Diophant verlegen. Selbst für die vorliegende Abfassung deutet der Umstand, daß nichts der großen Sammlung Diophants entnommen ist, darauf hin, daß auch sie älter als Diophant ist. Auf der anderen Seite ist es auffällig, daß man selbst in Diophants von rechtwinkligen Dreiecken handelnden 6. Buche keine Spur davon findet, daß er den in der vorliegenden Aufgabe **5** benutzten Satz kennt. Es läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß Diophant sich gar nicht darum kümmert, ob die Lösungen ganzzahlig sind, wenn sie nur rational sind. Und doch zeigt das in **5** behandelte Beispiel, daß eben dieser von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten geltende Satz auch zur Auffindung rationaler Dreiecke mit gebrochenen Seiten nützlich sein kann.

H. G. Zeuthen.

Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift.

Von G. Eneström in Stockholm.

Ich habe schon früher[1]) Gelegenheit gehabt darauf hinzuweisen, daß es eine kurze Algorismusschrift gibt, die mit den Worten „Communis et consnetus“ beginnt, und die in gewissen Handschriften dem Jordanus Nemorarius zugewiesen wird; ich habe auch erwähnt, daß der Inhalt dieser Schrift, abgesehen von der Einleitung, znm größten Teil wörtlich mit dem der „Demonstratio Jordani de algorismo“ übereinstimmt. Überdies habe ich auf die Möglichkeit hingewiesen, daß die Schrift älter als die „Demonstratio Jordani“ sei, so daß diese eine spätere Bearbeitung (sei es von Jordanus selbst oder von einem anderen Mathematiker des 13. Jahrhunderts) des ursprünglichen Jordanischen Traktates sein könnte. In diesem Artikel werde ich ausführliche Ausknnft über die fragliche kurze Algorismusschrift geben.

Ohne Zweifel ist die Schrift schon von Chasles beachtet worden, denn nach seiner eigenen Aussage hatte er einen handschriftlich in Paris aufbewahrten „Algorismus Jordani“ eingehend studiert[2]), und da sich der Text „Commnnis et consuetus“ im Cod. Mazarin. 3642 (früher 1258) findet, welche Handschrift Chasles nachweislich gekannt hat, so liegt es nahe zu vermuten, daß der von Chasles erwähnte „Algorismus Jordani“ gerade der Text „Communis et consuetus“ ist. Fast zur Gewißheit wird diese Vermutnng durch Chasles' Angabe[3]), daß Jordanus in seiner Algorismusschrift weder von den Arabern noch von den Indern spricht, sondern nur sagt, er werde in die Fußtapfen der Alten treten, denn im Texte „Communis et consuetus“ kommt gerade der Ausdruck „vestigiis

---

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 25, 207—208.

2) Vgl. G. Eneström, *Ist Jordanus Nemorarius Verfasser der Schrift „Algorithmus demonstratus“?;* Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 13.

3) M. Chasles, *Sur quelques points de l'histoire de l'algèbre;* Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] 13, 1841, S. 522.

antiquorum insistere“ vor. Jedenfalls hat meines Wissens weder Chasles noch irgendein anderer Historiker der Mathematik nähere Auskunft über die Schrift gegeben. Boncompagni hat einmal im Vorübergehen die verschiedenen Traktate des Cod. Vatic. Ottob. 309 erwähnt[1]), und vor einigen Jahren stieß A. A. Björnbo zufälligerweise auf eine andere, unvollständige und anonyme Handschrift (Cod. Vatic. Reg. Su. 1268) des Textes „Communis et consuetus“, bezeichnete aber dieselbe als Scholien zu Euklids Elementen.[2])

Für diesen Artikel habe ich in erster Linie den obengenannten Cod. Vatic. Ottob. 309 benutzt, von dem mir eine photographische Kopie vorgelegen hat. In dieser Handschrift, die dem 14. Jahrhundert zu entstammen scheint, beginnt der Text „Communis et consuetus“ ohne Überschrift Bl. 114ᵃ Sp. 2; voran steht eine andere anonyme Algorismusschrift, in der man sofort den *Algorismus* des Sacrobosco erkennt. Unser Text endet Bl. 117ᵃ Sp. 1 ohne Unterschrift mit den Worten: „hoc igitur est tocius operis causa“, und dann beginnt Bl. 117ᵃ Sp. 2 mit den Worten: „Minuciarum tractatum inchoantes dicimus nihil aliud esse minucias quam partes“ eine Bruchrechnung, die Bl. 119ᵇ Sp. 2 endet mit der Unterschrift: „Explicit demonstratio Jordanis(!) in algorismi(!). Dfp grbchbs bmfn“ [= Deo gracias amen]. Diese Bruchrechnung stimmt inhaltlich mit der anonymen[3]) „Demonstratio de minuciis“ des Cod. lat. Berol. 4⁰ 510 überein.

Außerdem habe ich für diesen Artikel zur Verfügung gehabt: 1. Eine photographische Kopie des Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 Bl. 69ᵃ—71ᵃ, wo sich die oben erwähnte unvollständige Handschrift des Textes „Communis et consuetus“ findet (außer der Einleitung nur die 15 ersten Sätze); 2. Eine photographische Kopie des Cod. S. Marco Florent. 216 Bl. 37ᵃ—39ᵃ, wo sich eine vollständige Abschrift des Textes findet[4]); 3. Eine photographische Kopie des Cod Mazarin. 3642 Bl. 96ᵃ, der den größten Teil der Einleitung unseres Textes enthält; 4. Eine photographische Kopie des Cod. Mazarin. 3642 Bl. 105ᵃ, wo die zweite Hälfte dieser Einleitung mit der Randbemerkung: „istud pertinet ad proemium algorismi“ abgeschrieben ist.

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 25.

2) A. A. Björnbo, *Studien über Menelaos' Sphärik;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **14**, 1902, S. 138—139.

3) Siehe G. Eneström, *Über die Demonstratio Jordani de algorismo;* Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 25.

4) Auf diese Handschrift hat mich Herr A. A. Björnbo aufmerksam gemacht. Hier beginnt der Traktat mit dem Absatze „Numerorum alius simplex, alius compositus“, der übrigens teilweise umgearbeitet worden ist, und erst gegen das Ende des Bl. 37ᵃ Sp. 1 findet sich der richtige Anfang „Communis et consuetus“.

Da die Einleitung des Textes „Communis et consuetus" von besonderem Interesse ist, so bringe ich sie hier vollständig zum Abdruck. Die von mir benutzten Handschriften stimmen fast überall wörtlich überein, und die Abweichungen sind so belanglos, daß es unnötig ist, dieselben anzuzeigen; ebensowenig halte ich für nötig, die unbedeutenden Verbesserungen des Textes, die von mir herrühren, hervorzuheben. Die kursiv gedruckten Stellen am Ende der Einleitung entsprechen den Definitionen der „Demonstratio Jordani de algorismo" und ich habe in eckigen Klammern die zugehörigen Nummern dieser Definitionen angegeben.

Communis et consuetus rerum cursus virtusque ordinis naturalis raro perpenditur nisi cum eo ministrante vigor ingenii improvisa operatur. Stupet quidem inusitata quoniam ignarus non attendit originem, illudque magis miratur proveuire posse quod amplius vir intelligens miraretur non esse huius contrarietatis, eciam licet dissonus considerandi modus insinuet. Habet tamen ipsa rei qualitas si ratione consulatur circa hoc secretum quod proferat Sunt enim iu ea quibusdam figuris signata misteria ut et forma exterior obtutus sensuales detineat et virtus interior exerceat intellectum Iu hoc igitur circa singularem materiam intentionis finem statuentes, probabilem satis finis utilitatem estimavimus ut quo efficacius allicit operis species admirationi habita, eo specialius admiranda sit via operandi intellecta.

Opus itaque numeri, quod summa illa et adoranda antiquorum diligentia de secretioribus speculative partis ad usum publice facultatis et subtiliter elicuit et prudenter ordinavit, ad exercitium intelligentie vestre ita manifestande proposui ut et aperta sit singularis partium distinctio et ita constet earundem ad sua principia reductio. Nec in hac quoque parte arrogantie arguar, quoniam debitor ex professione non alienus accedo, maxime cum benivolentia vestra gratiaque consorcii et veniam spondeat facilem et vires subministret. Et ne proloquendi occasio prolongetur ab ipsis artis principiis operis exordium statuamus.

Quantitates igitur sunt que disponunt subjectum. Earum vero alie sunt continue et alie discrete. Que vero in ipsis subjectis magis discernuntur discretarum est numerus et continuarum est corpus, quod quidem interioribus constat dimensionibus. Quare ex aggregatione adinvicem tantum procedit diversitas; per se enim queque considerata longitudo est et ex linea provenit, duarum vero prima longitudo et altera latitudo comitantes superficiem. Coniuncte sunt altitudo, latitudo, longitudo, corpus ut dictum est consummantes. Restat corpori connumerari lineam et superficiem, hiis quidem accidit secundum dictas dimensiones

finitum et infinitum. Finitum quidem non ex se secundum actum sed secundum potentiam. Infinitum autem non posito actu. Adveniens ergo actus et potentiam eliciens, finitum reddit. Actus dico vel natura ut in subjecto vel positione vel solo intellectu. Finitum vero ex termino, termino siquidem disaggregante vel continuante, licet continuatio non abnuat infinitatem. Uniuntur enim continuata ut non videatur esse terminus nisi potentia, qui in utrumque separatorum actu non potest dissolvi. Disaggregatio igitur terminorum discretionem operatur subjectorum que in se continuata et abinvicem discreta suas igitur imponunt unitates ex quibus efficiat numerum eorundem collatio; erit itaque unitas non quantitas sed inter eas media, vicem termini tenens, consummatio existens continuorum et principium discretorum, utrarumque proprietates quantitatum et in se deponens et in alterutrum mutuo transmittens. Hec ad sequentium evidentiam dicta interim sufficiant. Restat ut de numerorum dispositione breviter subdamus que quanto est notior, tanto presenti intentioni commodior, cum sit demonstrative discipline familiaris de notis ad ignota progressus.

Numerorum ergo alius simplex, alius compositus. Simplices numeri sicut et notatione inconiuncta ita et singulari positione ab aliis discernuntur. Positio numeri comitatur differentiam. Constat autem differentia ex habitudine et loco. Habitudinem dico numerandi rationem, locum in visibili forma descriptionem. Ratione itaque numerandi distinguntur simplices numeri per suas differentias ita ut [10] *quelibet differentia IX contineat numeros secundum quantitatem primi ipsorum se transgredientes* [8] *Prima igitur est differentia unitatum, cuius numeri ab unitate secundum ipsius additionem naturali ordine procedunt usque ad denarium* qui primus est in secunda differentia in qua simili appositione vel multiplicatione reliquos usque ad centum producat. Et hic tertie differentie primus. Eadem ratione ceteros sue differentie formet usque ad mille, ad hoc ergo quod et ipse antecedit in quarta differentia. Fit et [11] *in eadem generatio similis reliquorum et per additionem sue denominationis progressio ad ceteras differentias.* Descriptio in forma visibili fit per [1[1]] *figuras IX, que sunt huiusmodi:*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

et ipse secundum se considerate primos numeros IX [9] *qui sunt in differentia unitatum habent denotare singule singulos secundum suum ordinem.* [1[2]] *Dispositis vero differentiis in locis sibi propositis secundum quod se sequuntur ut a dextra in sinistram fiat processus.* [12] *Eedem figure in quolibet loco de tota differentia numerum sibi similem designabunt.* [6] *Suppletio autem locorum habenda est vel positis propositis*

numeris in singulis differentiis, vel ad denotanda loca licet vacua in omnibus versus dextram ponemus circulos. [2] *Simplicis itaque numeri descriptio hec est, ut ordinatis totidem circulis ad dextram quot ante ipsum fuerint differentie ipse ad ultimum in sinistra adiiciatur tota cum figura representante quoties fuerit numerorum sue differentie.* [5] *Compositus autem numerus ex numeris simplicibus diversarum differentiarum constat,* qui omnes secundum distantiam eorundem abinvicem et ad primam locis suis ordinantur ut si que inter eos vacue fuerint differentie, loca earum circulis suppleantur. Hiis precognitis sequitur de opere numeri.

Opus numerorum in septem dividitur: in additionem, detractionem, duplationem, dimidiationem, multiplicationem, et divisionem et radicis extractionem tam in integris quam in minuciis. Et quoniam opus minuciarum diffusum est et involutum, secundum ei singulariter volumen constituimus, in hac prima particula secundum simplicem et abstractam numerorum naturam procedentes, cum etiam huiusmodi dicatur operatio integrorum, nullam tamen illorum vel minutiarum mentionem facientes, quoniam natura simul sese habent quemadmodum totum et partes. Est ergo predictorum [15] *intentio additionis quidem ut propositis duobus numeris eorundem coniunctorum summam reperiamus.* [16] *Detractionis ut superfluum maioris ad minorem.* [17] *Duplationis ut sumamus duplum dati numeri.* [18] *Dimidiationis ut dimidium si habuerit sin autem residui detracta unitate.* [19] *Multiplicationis vero ut producamus numerum qui contineat alterum datorum totiens quotiens in reliquo est unitas.* [20] *Divisionis ut eliciatur maximus qui totiens est in dividendo quotiens in divisore est unitas.* [21] *Extractionis opus est ut illum substituamus numerum qui per se multiplicatus propositi numeri summam vicinius consumet.* Cumque hec ita manifestata sint et ad instituendum in singulis operationibus modum vestigiis antiquorum sit insistendum. Quare cum rationem operis viamque quadam demonstrationis specie secundum arismetice disciplinam aperire intendimus, universales quasdam propositiones et huic tractatui familiares premittendas censuimus ut de earum utilitate certitudine habita, ordine competenti propositorum probatio directior consequatur.

Die soeben zum Abdruck gebrachten Absätze scheinen darauf hinzuweisen, daß der Text „Communis et consuetus“ nicht als eine spätere Bearbeitung der „Demonstratio Jordani de algorismo“ betrachtet werden kann, denn in diesem Falle wäre es wohl sinnlos gewesen, eine so ausführliche Einleitung zu redigieren. Noch sinnloser wären meines Erachtens die Worte: „nec in hac quoque parte arrogantie arguar quoniam debitor ex professione non alienus accedo, maxime cum benivolentia vestra

gratiaque consorcii et veniam spondeat facilem et vires subministret", wenn es sich wesentlich um wörtliche Auszüge aus einem älteren Traktate handelte. Auch die Worte: „quoniam opus minuciarum diffusum est et involutum ... ei singulariter volumen constituimus, in hac prima particula ..." deuten darauf hin, daß es sich nicht lediglich um einen Auszug aus einer schon fertigen Schrift handelt.

Unter solchen Umständen bekommt natürlich der Text „Communis et consuetus" ein großes Interesse, und eine eingehende Vergleichung desselben mit der „Demonstratio Jordani" wird besonders angebracht. Im folgenden bringe ich darum zum Abdruck die Sätze unseres Textes nebst Erläuterungen dazu; a, b, c, d bezeichnen dabei ganze Zahlen kleiner als 10, m und n beliebige ganze Zahlen. Ich gebe auch an, inwieweit die Beweise der Sätze mit denen der „Demonstratio Jordani" übereinstimmen. Da unser Text in der Einleitung unter dem Namen „Opus numerorum" erwähnt wird, so benutze ich im folgenden diesen Namen, wenn ich vom Texte „Communis et consuetus" spreche.

1. *Sumptis similibus numeris per singulas differencias a prima, eos sibi continue secundum denarii denominationem multiplices esse conveniet.*

„Demonstratio Jordani" Satz **1**. Wenn $a_1 = a \cdot 10$, $a_2 = a \cdot 100$, $a_3 = a \cdot 1000, \ldots$, so ist $a_1 = 10a$, $a_2 = 10a_1$, $a_3 = 10a_2, \ldots$

Die Beweise der beiden Traktate sind zum Teil verschieden, und um eine Vergleichung zu ermöglichen, drucke ich dieselben hier nebeneinander ab.

Demonstratio Jordani.	Opus numerorum.
Habemus enim necessario quod quilibet primus alicuius differencie in primo continue sequentis differencie decies continetur cum ille sit decimus ab illo, et quoniam numeri similes in omnibus differenciis equidistant a primis eisque sunt eque multiplices, erit permutatim ut est primorum quorumlibet et ea sit quorumlibet similium proportio. Unde manifestum est cuiuslibet differencie numerum primum sic se habere ad omnem alium sicut unitas ad suum digitum. Sit enim a primus tercie differencie, b quintus illius. Ita quoque quinarius digitus dicatur c, unitas vero d; per primam ergo sicuti	Habemus enim ex prius dicta dispositione quod cuiuslibet differencie numerus primus tociens sibi coacervatur ut ex singulis coacervationibus singuli reliquorum eiusdem differencie numeri usque ad primum sequentis differencie proveniant qui quoniam decimus est ab eadem ex novenaria addicione ipsius super se, constat quod quilibet primus alicuius differencie in primo differencie alterius decies continetur et quoniam numeri similes in omnibus differenciis equaliter distant a primis eisque eque sunt multiplices, erit permutatim ut que primorum quorumlibet ea sit et quorumlibet similium proportio cum

est a ad d, ita b ad c; ergo permutatim sicut est a ad b sic est d ad c. sint ergo primi multiplices sibi secundum denarium, erunt et quilibet aliter sumpti continue per singulas differencias. Et hoc est quod dicitur.

Die unvollständige Abschrift des „Opus numerorum" im Cod. Reg. Su. 1268 hat einen anderen Beweis, den ich ebenfalls hier zum Abdruck bringe.

> Similes numeros appellant qui eadem figura representantur. Sumantur itaque numeri similes et sint hi .555., sumantur etiam primi in horum differentiis et erunt hi .111. Habemus autem ex prius producta descriptione quod primus primorum sibi novies superadditus efficit secundum, secundus novies tercium, ergo primus primorum est decima pars secundi eorundem, secundus decima pars tercii, ergo tercius est decuplus ad secundum et secundus decuplus ad primum, sed ex descriptionibus etiam habemus quod quantum distat primum .1. a primo .5. tantum distat secundum .1. a secundo .5., ergo quociens sibi quoadunatur(!) primum .1. ad efficiendum primum .5. tociens sibi choadunatur(!) secundum .1. ad secundi .5. constitucionem, ergo quociens primum .1. est in primo .5. tociens secundum .1. est in secundo .5. ergo proporcio primi .1. ad primum .5. est tamquam secundi .1. ad secundum .5. ergo permutatim proporcio secundi .1. ad primum .1. tamquam proporcio secundi .5. ad primum .5. et igitur patet secundum .5. esse decuplum ad primum .5. et eadem ratione tercium ad secundum.

In betreff des Beweises der „Demonstratio Jordani" ist zuerst zu bemerken, daß die Worte: „Unde manifestum . . . sic est d ad c" eigentlich ein Corollarium enthalten, das besagt, daß $10^n : a \cdot 10^n = 1 : a$. Sieht man von diesem Corollarium ab, so ist der Beweis viel kürzer als die zwei übrigen; wesentlich stimmen freilich die drei Beweise überein. Der interessanteste ist ohne Zweifel der dritte, weil man daraus ersieht, wie ein Mathematiker des 13. Jahrhunderts den Satz: „Wir nehmen beispielsweise die drei Zahlen 5, 50, 500 in Betracht" ausdrückte; statt 5, 50, 500 schrieb er ganz einfach 555 und ebenso 111 statt 1, 10, 100, wodurch er vermied, das damals nicht besonders geläufige Zeichen für Null anzuwenden.

2. *Numeri similes et eque abinvicem distantes sunt proportionales.*

„Demonstratio Jordani" Satz 2. Ich habe früher[1]) diesen Satz auf folgende Weise wiedergegeben: „Wenn $a_1 = a \cdot 10$, $a_2 = a \cdot 100$, $a_3 = a \cdot 1000, \ldots$, so ist $a : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = \ldots$ Dies ist aber

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 28.

nicht ganz richtig; der Sinn ist vielmehr: $a : a \cdot 10^m = b \cdot 10^n : b \cdot 10^{m+n}$, und dieser Satz wird wirklich bei dem Beweise eines späteren Satzes als Satz **2** zitiert.

3. *Si fuerit primus ad secundum sicut tercius ad quartum, si primo et tercio equales numero differencie addantur vel detrahantur, et tunc quoque eisdem eosdem proportionales esse necesse est.*

„Demonstratio Jordani" Satz **3**. Wenn $a : b = c : d$, so ist $a \cdot 10^n : b = c \cdot 10^n : d$.

4. *Proportionales numeri et si abinvicem eque distiterint proportionales erunt.*

Dieser Satz stimmt durchaus überein mit dem Wortlaut des Satzes **4** der von mir benutzten Handschrift der „Demonstratio Jordani de algorismo": „Proportionales numeri et si abinvicem equedistiterint proportionales erunt". aber der Satz ist offenbar dem Wortlaut nach sinnlos, und ich habe darum in meinem Abdruck der Sätze der „Demonstratio Jordani de algorismo" das Wort „similes" statt des zweiten „proportionales" gesetzt.[1]) Eigentlich wäre es richtiger gewesen „similes esse poternnt" statt „proportionales erunt" zu setzen, denn in gewissen Fällen können proportionale und äquidistante Zahlen ungleichartig sein, z. B. 1, 20, 400, 8000. Jetzt, nachdem ich den Satz **2** auf andere Weise als früher gedeutet habe, scheint mir der Satz **4** zu enthalten, daß, wenn $a : b = c : d$, so ist auch $a \cdot 10^n : b \cdot 10^n = c \cdot 10^n : d \cdot 10^n$.

Um meine neue Auffassung zu begründen, drucke ich hier teils den Beweis der „Demonstratio Jordani", teils die voneinander verschiedenen Beweise der von mir benutzten Handschriften des „Opus numerorum" ab.

Demonstratio Jordani.	Opus numerorum. Cod. Vatic. Ottob. 309. Cod. S. Marco Florent. 216.	Opus numerorum. Cod. Vatic. Reg. Su. 1268.
Proportionalitas prius prima in differencia prima perpenditur. Sumantur ergo in differenciis mediis extremorum similes et age ex secunda atque per eversam proportionalitatem medio numero bis sumpto propter evidenciam probacionis.	Proportionalitas prima in differencia prima perpenditur. Sumantur igitur in differenciis extremorum minoribus similes atque per secundam facile argutum elicias.	Primis enim superpositis similibus ultimis per secundam hujus argue ut in premissa.

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 28.

Keiner dieser Beweise ist besonders klar; möglicherweise könnte man auch den Satz so deuten, daß wenn die zwei ersten Zahlen a und $b \cdot 10^m$ sind, so gibt es immer zwei gleichartige Zahlen, nämlich $a \cdot 10^n$ und $b \cdot 10^{m+n}$, die so beschaffen sind, daß a und $a \cdot 10^n$ sowie $b \cdot 10^m$ und $b \cdot 10^{m+n}$ äquidistant sind und außerdem $a : b \cdot 10^m = a \cdot 10^n : b \cdot 10^{m+n}$. Indessen wird der Satz, daß $a \cdot 10^n : b \cdot 10^n = c \cdot 10^n : d \cdot 10^n$, wenn $a : b = c : d$ im Satz **28** der „Demonstratio JORDANI" benutzt mit der Vorbemerkung „per 4 argues quod . . ."

5. *Omnis numerus simplex extra primam differenciam par est.*

„Demonstratio JORDANI" Satz 5. $a \cdot 10^n$ $(n \geqq 1)$ ist eine gerade Zahl.

Die sehr kurzen Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich identisch.

6. *Numero composito per differentias suas disposito, si prima differencia vacua fuerit, totus numerus par erit.*

„Demonstratio JORDANI" Satz 6. $a \cdot 10 + b \cdot 100 + c \cdot 1000 + \ldots$ ist eine gerade Zahl.

Die sehr kurzen Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich dieselben.

7. *Disposito quolibet numero per differencias suas, si in prima differencia fuerit numerus impar, totus erit impar, quod si par, est par.*

„Demonstratio JORDANI" Satz 7. $a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \ldots$ ist ungerade, wenn a ungerade ist, und gerade, wenn a gerade ist.

Die Handschrift Cod. Vatic. Ottob. 309 des „Opus numerorum" enthält, wahrscheinlich durch ein Versehen des Abschreibers, nur die erste Hälfte des Satzes der „Demonstratio JORDANI", aber die Beweise der beiden Traktate, die wesentlich identisch sind, beziehen sich auf den ganzen Satz. Im Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 lautet der Schluß des Satzes: „. . . totus erit impar, sed si impar(!) est par."

8. *Si fuerit numerus in prima differencia quadratus similis ei tantum in impari differencia quadratus est.*

„Demonstratio JORDANI" Satz 8. Wenn a^2 eine Quadratzahl < 10 ist, so ist $a^2 \cdot 10^{2n}$ eine Quadratzahl.

Die Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich dieselben.

9. *In pari differencia non est aliquis numerus quadratus.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **10**. $a \cdot 10^{2n+1}$ ist nie eine Quadratzahl.

Die Beweise der zwei Traktate sind zum größten Teil voneinander verschieden. In der „Demonstratio JORDANI" wird teils auf Satz **8** („modo antepremisse"), teils auf Satz **9** („per premissum") verwiesen; im „Opus

numerorum“ steht ganz richtig an der ersten Stelle „modo premisse“ und die zweite Stelle fehlt. Im Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 ist der Beweis etwas abweichend und dort wird als Beispiel die Zahl 90 gewählt.

10. *Omnis simplicis numeri radix est numerus simplex.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **11**. Wenn $a \cdot 10^n$ eine Quadratzahl ist, so ist die Quadratwurzel dieser Zahl von der Form $b \cdot 10^m$.

Die Beweise der zwei Traktate sind vollständig verschieden. Die „Demonstratio Jordani“ wendet die Bezeichnungen a, b, c usw. an und benutzt den Satz 2; im „Opus numerorum“ kommen keine Zeichen vor, und wird auf die Sätze **4** und **8** („per antepremissas“) verwiesen.

11. *Si duo numeri unius differencie sibi apponantur, compositus ad secundum numerum sequentis differencie non perveniet.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **20**. $a \cdot 10^n + b \cdot 10^n$ ist kleiner als $2 \cdot 10^{n+1}$.

Die sehr kurzen Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich identisch. In der „Demonstratio Jordani“ wird durch die Worte „per duodecimam huius“ auf Satz **12** verwiesen, im „Opus numerorum“, wo der fragliche Satz nicht vorkommt, fehlen diese Worte.

12. *Duobus numeris propositis alterum alteri addere.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **21**. Das gewöhnliche Additionsverfahren.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe und auch die Darstellung fast dieselbe. In der „Demonstratio Jordani“ kommt eine Stelle vor, die im „Opus numerorum“ fehlt, und wo auf einen früheren Satz verwiesen werden sollte, obgleich im Cod. lat. Berol. qu. 510 der Platz der Nummer freigelassen ist. Indessen war diese Stelle („ratio sumatur per . . .“) ohne Zweifel ursprünglich eine Randnote, so daß ihr Fehlen im „Opus numerorum“ belanglos ist.

13. *A numero maiore numerum quemlibet minorem detrahere.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **22**. Das gewöhnliche Subtraktionsverfahren.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe und die Darstellungen fast wörtlich identisch. Im Cod. Vatic. Ottob. 309 steht „extrahere“, im Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 und im Cod. S. Marco Florent. 216 dagegen „detrahere“, wie in der „Demonstratio Jordani“.

14. *Numeri dati duplum assignare.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **23**. Verdoppelung.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe, im „Opus numerorum“ ein wenig kürzer redigiert.

15. *Propositum numerum restat dimidiare.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **24**. Halbierung.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe, aber im „Opus numerorum" viel kürzer ausgedrückt.

16. *Si proponantur duo numeri ut alter per alterum multiplicetur primique alterius circuli ad reliqui principium transferantur, ex ita sumptorum multiplicacione eundem provenire necesse est.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **25**. Wenn A und B zwei beliebige ganze Zahlen sind, so ist $(A \cdot 10^n) \cdot B = A \cdot (B \cdot 10^n)$.

Die Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich dieselben.

17. *De medio unius numeri ad alterius principium ut producti equalitas servetur non est transferre circulos.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **26**. Im allgemeinen ist $(a \cdot 100 + b)(c \cdot 10 + d)$ nicht gleich $(a \cdot 10 + b)(c \cdot 100 + d \cdot 10)$.

Die Beweise der zwei Traktate sind fast überall wörtlich identisch. Der Beweis der „Demonstratio JORDANI" beruft sich auf Satz **9**, aber diese Berufung scheint mir durchaus unnötig. Im „Opus numerorum", wo der fragliche Satz fehlt, kommt kein Verweis vor.

18. *Ad medium vero alterius translatis in proportionalibus tantum numeris, eveniet equalitas productorum.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **27**. Wenn $a : b = c : d$, so ist $(a \cdot 100 + b)(c \cdot 10 + d) = (a \cdot 10 + b)(c \cdot 100 + d)$.

Die Beweise der zwei Traktate stimmen fast überall wörtlich überein.

19. *Datum numerum per se vel per alium quemlibet multiplicare.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **28**. Multiplikationsverfahren.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe und auch die Darstellung fast überall wörtlich dieselbe, aber im „Opus numerorum" ein wenig kürzer.

20. *Numeris inequalibus si differencie numero equales preponantur, inter totos etiam erit inequalitas non permutata.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **29**. Wenn $a < b$, so ist $10a + c < 10b + d$.

Die Beweise der zwei Traktate stimmen wörtlich überein.

21. *Si numero minori una versus dextram differencia adiiciatur, reliquus de ipso plus novies non detrahetur.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **30**. Wenn $a < b$, so ist $\frac{10a + c}{b}$ höchstens gleich 9 und einem eigentlichen Bruche.

Die Beweise der zwei Traktate stimmen wörtlich überein.

22. *Numerum datum per quemlibet minorem dividere.*

„Demonstratio Jordani" Satz **31**. Divisionsverfahren.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe, und auch die Darstellung wörtlich dieselbe, nur daß im „Opus nnmerorum" die letzten Zeilen der „Demonstratio Jordani" fehlen, die wesentlich die Probe durch entgegengesetztes Verfahren enthalten.

23. *Numerus differenciarum a quibus radix extrahenda est, dupplum differenciarum radicis non excedit.*

„Demonstratio Jordani" Satz **33**. Die Ziffernzahl einer Zahl ist höchstens das Doppelte der Ziffernzahl ihrer Quadratwurzel.

Die Beweise der zwei Traktate stimmen wörtlich überein. Merkwürdigerweise wird sowohl im „Opus numerorum" als in der „Demonstratio Jordani" die angenommene Zahl durch *abgde* und nicht wie sonst immer durch *abcde* bezeichnet, aber daraus darf man gewiß nicht folgern, daß der Beweis aus einer griechischen oder griechisch-arabischen oder byzantinischen Quelle entnommen ist.

24. *Distancia simplicium numerorum in differenciis suis inter primos productorum ex ipsis dupplicata constabit.*

„Demonstratio Jordani" Satz **32**, der in der von mir benutzten Handschrift lautet: „Distantia simplicium numerorum inter proximos productorum ex ipsis duplicata constabit". Da mir indessen diese Fassung des Satzes sinnlos erschien, versuchte ich in meinem Artikel *Über die „Demonstratio Jordani de algorismo"*, dieselbe auf folgende Weise zu verbessern[1]: „Equidistantia simplicium numerorum inter proximos productorum ex ipsis duplicata constabit", aber sicherlich ist der Sinn ein anderer als der von mir angenommene.

Ich bringe darum zum Abdruck den Beweis des „Opus numerorum", der fast wörtlich mit dem der „Demonstratio Jordani" übereinstimmt.

Singulis enim eorum in sua multiplicatione dispositis, nnmerum utrinsque disposicionis inparem esse constat minorem uno dnplo simplicis secundum differencias et quia inter duplos dupla est differencia, eadem etiam erit inter eos sic dispositis, quoniam eque ab eis distant. Facta ergo multiplicatione eorum quoniam primi productorum sive circuli sive numeri super ultimos compositorum constabunt, ipsorum quoque abinvicem distantiam eandem esse constat.

Aus diesem Beweise dürfte hervorgehen, daß der Satz auf folgende Weise zu deuten ist. Wenn man das Produkt zweier Zahlen *abcd* und $\alpha\beta\gamma\delta$ berechnet, so ist die Differenz der Stellenzahlen der Einerziffern der zwei Teilprodukte $b \cdot \beta$ und $d \cdot \delta$ [d. h. $5 - 1 = 4$] das Doppelte der

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 31.

Differenz der Stellenzahlen der Ziffern b und d oder β nnd δ [d. h. $3-1 = 2$]. In Wirklichkeit wird dieser Satz bei dem Beweise der Richtigkeit der Quadratwurzelausziehung benntzt. Besonders klar ist freilich weder der Satz noch der Beweis derselben.

25. *Propositi numeri radicem extrahere.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **34**. Quadratwnrzelausziehung.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe, und sie ist anch fast überall mit denselben Worten ausgedrückt.

Nach der Regel folgt im „Opus numerornm": 1. der Beweis, daß die Quadratwurzel einer fünfziffrigen Zahl aus drei Ziffern besteht; 2. ein ziemlich unklarer Versuch, das Verfahren der Quadratwnrzelansziehnng zu erläutern, wenn man annimmt, daß die gegebene Zahl $abcdef$ (a, b, c, d, e, f die sechs Ziffern) und die berechnete Wurzel ghk ist; dabei werden auch die Fälle $h = 0$ und $k = 0$ besonders berücksichtigt. In der „Demonstratio JORDANI" folgt nach der eigentlichen Regel ebenfalls zuerst: 1. der Beweis, daß die Quadratwurzel einer fünfziffrigen Zahl aus drei Ziffern besteht (ein wenig ansführlicher); 2. Erläuterung des Verfahrens, wenn man annimmt, daß die gegebene Zahl $abcdef$ und die berechnete Quadratwurzel ghk ist (ausführlicher). Dann enthält die „Demonstratio JORDANI" noch: 3. einen fast unnötigen Beweis, daß, wenn ghk die Quadratwurzel aus $abcdef$ ist, so ist g die größte Zahl, deren Quadrat von ab (d. h. $10a + b$) subtrahiert werden kann, h die größte Zahl, die mit $2 \cdot 10 \cdot g + h$ multipliziert von $abcd - 100g^2$ subtrahiert werden kann usw.; 4. den Beweis des Satzes $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$; hier wird $a + b + c$ durch abc bezeichnet, während früher abc immer $100a + 10b + c$ bedentete.

In der „Demonstratio JORDANI" wird an zwei Stellen auf Satz **13** verwiesen, welcher Satz im „Opus numerorum" fehlt. Es handelt sich dabei um den obenerwähnten Beweis, daß g die größte Zahl ist, deren Quadrat von ab subtrahiert werden kann, nnd dieser Beweis fehlt ebenfalls im „Opus numerorum". An einer anderen Stelle der „Demonstratio JORDANI" kommt, wie ich schon in meinem Artikel *Über die „Demonstratio JORDANI de algorismo"* bemerkt habe[1]), der Passus vor: „Hanc subtractionem docuimus in opere extrahendi radicem", und ich war früher der Ansicht, daß hier eine besondere Schrift oder wenigstens ein Abschnitt einer anderen Schrift als die „Demonstratio JORDANI" gemeint war.[2]) Indessen dürfte „opns extrahendi radicem" ganz einfach das am Anfange des Satzes **34** der „Demonstratio JORDANI" auseinandergesetzte

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 33.

2) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 208.

Wurzelausziehungsverfahren bedenten, denn an einer anderen Stelle steht „ex opere multiplicandi constat“ und hier bedentet „opus multiplicandi“ offenbar das im Satze **28** der „Demonstratio Jordani“ gelehrte Multiplikationsverfahren.

Aus dem vorangehenden Berichte findet man, daß im „Opus numerorum“ die Sätze **9, 12—19** der „Demonstratio Jordani“ fehlen. Diese Sätze besagen[1]), daß:

[9] $$a \cdot 10^n = a \cdot (1 \cdot 10^n);$$

[12] $$1 \cdot 10^n + 9 \cdot 10^n = 1 \cdot 10^{n+1};$$

[13] $$9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \ldots + 9 \cdot 10^{n-1} < 10^n;$$

[14] jede ganze Zahl nur auf eine einzige Weise unter die Form $a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \ldots$ gesetzt werden kann;

[15] $$a \cdot 10^n = a + a(9 + 9 \cdot 10 + \ldots + 9 \cdot 10^{n-1});$$

[16] $$9 \cdot 10^n \equiv 0 \pmod 3;$$

[17] $$a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \ldots \equiv 0 \pmod 3,$$ wenn $a + b + c + \ldots \equiv 0 \pmod 3$;

[18] $$a + b = a + b\ (!);$$

[19] $$a \cdot 10^n + b \cdot 10^n = (a + b) \cdot 10^n.$$

Warum überhaupt die Sätze **15—17** in der „Demonstratio Jordani“ vorkommen, ist mir unverständlich. Die Sätze **16** und **17** enthalten Spezialfälle der Dreierprobe, aber im ganzen Traktate habe ich keine Anwendung derselben entdecken können. Satz **15** weist auf die Neunerprobe hin, aber wird nur für den Beweis des Satzes **17** benutzt. Aus dem Fehlen dieser Sätze im „Opus numerorum“ kann man darum gar keine Folgerungen ziehen. Dagegen könnte man möglicherweise versucht sein, das Fehlen der Sätze **9, 12—14, 18, 19** so zn erklären, daß die „Demonstratio Jordani“ die ursprüngliche Schrift sei und die fraglichen Sätze gestrichen worden sind, weil sie fast selbstverständlich und überdies wenig wichtig waren. Diese Erklärung scheint mir indessen nicht stichhaltig, denn teils finden sich im „Opus numerorum“ Sätze, die ebenso selbstverständlich (z. B. Satz **5**) oder von ebenso geringem Belang (z. B. Satz **17**, d. h. Satz **26** der „Demonstratio Jordani“), teils enthält der *Algorithmus demonstratus* des Meisters Gernardus einige der betreffenden Sätze; besonders der Satz **19** der „Demonstratio Jordani“ wird von Gernardus in drei verschiedenen Sätzen (I: 3—5) behandelt, weil er die Fälle $a + b < 10$, $a + b = 10$, $a + b > 10$ unterscheidet. Da nun der *Algorithmus demonstratus* allem Anschein nach aus der zweiten Hälfte des

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 28—29.

13. Jahrhunderts herrührt[1]), liegt es näher anznnehmen, daß der im „Opus numerorum" enthaltene Stoff allmählich erweitert worden ist, znerst dnrch die „Demonstratio Jordani", dann noch mehr dnrch den *Algorithmus demonstratus;* das „Opus nnmerorum" wäre folglich die ursprüngliche Schrift. Freilich muß zngegeben werden, daß diese Schlußfolgerung nicht allein besonders beweiskräftig ist.

Dagegen scheint es mir, als ob eine Vergleichung der Definitionen der zwei Traktate zn einem sichereren Resultate führen würde. Die Definitionen der „Demonstratio Jordani", die im „Opus nnmerorum" fehlen, sind:

3. Digitus est numerus a quo figura denominatur sive quicumque primo loco una sola representatur figura.
4. Articulns est numerns denarius vel qui precise constat ex denariis. Item articulus est numerus qui potest dividi in decem partes equales.
7. Numeri simplices a primo loco equidistantes dicuntur eiusdem numeri differencie.
13. Equidistantes numeri sunt inter quos continue se seqnentes sunt differencie nnmero equales.
14. Idem est limes et differencia. Nnmeri similes in omnibus differenciis equidistant a primis.

Die Definitionen 7 und 13 sind ziemlich überflüssig und können darum nicht für unseren Zweck in Betracht kommen. Dasselbe gilt von der Definition 14, weil der Term „limes" nie in der „Demonstratio Jordani" angewendet wird. Dagegen weisen die Definitionen 3 und 4 auf einen bestimmten terminologischen Unterschied zwischen den zwei Traktaten hin. In der „Demonstratio Jordani" wird nämlich der Term „digitus" oft, der Term „articulus" zuweilen gebraucht, während diese zwei Terme im „Opus numerorum" gar nicht vorkommen. Die Sätze der „Demonstratio Jordani" (**9, 15, 17, 19**), die den Term „digitns" enthalten, fehlen vollständig im „Opns numerorum"; wenn der erste Traktat in einem Beweise das Wort „digiti" benntzt, steht an der entsprechenden Stelle des zweiten Traktates immer „unitates" und die Stellen, wo sich in der „Demonstratio Jordani" „articuli" findet (z. B. Satz **19**), fehlen im „Opus numerorum". Nun wissen wir allerdings, daß die Terme „digiti" und „articuli" schon bei den Abacisten des 10. Jahrhunderts vorkommen[2]),

1) Vgl. P. Duhem, *Sur l'Algorithmus demonstratus;* Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 15.

2) Vgl. z. B. die bekannte Stelle bei Gerbert: „Quid cum idem numerus . . . nunc digitus, nunc constituatur ut articulus" (*Gerberti Opera mathematica*, ed Bubnov, Berlin 1899, S 7). Es scheint, als ob bei Gerbert die Ausdrücke „digitus"

aber für unseren Zweck ist es in erster Linie wichtig zu wissen, ob bei den Algorithmikern diese Terme älter oder jünger als die Terme „unitates" und „deceni" sind. Ich habe darum über diese Frage Untersuchungen angestellt und teile hier das Resultat derselben mit.

In der von Curtze herausgegebenen, nachweislich vor 1168 verfaßten Algorismusschrift kommen nie die Worte „digiti" und „articuli", sondern nur „unitates" und „deceni" vor[1]), und ebenso sucht man vergebens die Terme „digiti" und „articuli" im Traktate *Algoritmi de numero indorum*[2]); auch im *Liber abbaci* des Leonardo Pisano ist es mir nicht gelungen, die zwei Terme aufzufinden.[3]) Dagegen finden sie sich im *Liber algorismi de pratica arismetrice*[4]), in dem von Boncompagni herausgegebenen *Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala*[5]), in dem von Cantor herausgegebenen *Liber algorizmi*[6]), im *Prologus Ocreati in Helceph*[7]), im

und „articulus" teils bzw. Einer und Zehner bedeuteten, teils einen etwas allgemeineren Sinn hätten, nämlich zwei Zahlen zu bezeichnen, von denen die zweite das Zehnfache der ersten ist. Jedenfalls dürfte Gerbert nie eine Zahl von der Form $B \cdot 10^n$, wo B mehr als eine wirkliche Ziffer hat, als einen „digitus" betrachtet haben (vgl. die Bemerkung von Bernelinus in seinem *Liber abaci; Oeuvres de Gerbert*, éd. Olleris, Clermont 1867, S. 362). — Das Wort „articulus" kommt schon in einem Alkuin zugeschriebenen Briefe vor (vgl. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 1[3], Leipzig 1907, S. 840) und scheint dort eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$ zu bedeuten.

1) M. Curtze, *Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, S. 17—21.

2) B. Boncompagni, *Trattati d'aritmetica*, Rom 1857, S. 1—23.

3) Siehe *Scritti di Leonardo Pisano, pubblicati da B. Boncompagni* I, Rom 1857, S. 2—3.

4) B. Boncompagni, *Trattati d'aritmetica*, Rom 1857, S. 26: „Omnes numeri a primo limite procreati dicuntur digiti ... A ceteris uero limitibus pronenientes dicuntur articuli." Hier bedeutet also „articulus" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$.

5) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese*, Rom 1851, S. 38: „Si enim proponatur digitus et articulus in digitum et articulum multiplicandi". In dieser Schrift, die sicherlich ohne Grund dem Gherardo Cremonese beigelegt worden ist, bedeutet „articulus" an der fraglichen Stelle anscheinend Zehner, aber eigentlich hat wohl der Verfasser der Schrift dem Terme eine weitere Bedeutung gegeben (vgl. unten S. 151 Fußnote 4).

6) M. Cantor, *Über einen Codex des Klosters Salem;* Zeitschr. f. Mathem. **10**, 1865, S. 2: „Igitur aliud in numero est digitus, aliud articulus" ... Decem, C, M articuli sunt. Compositus est ex digito et articulo." Hier sollte also eigentlich jede Zahl von der Form $A \cdot 10$ (A eine beliebige ganze Zahl) ein „articulus" sein.

7) Ch. Henry, *Prologus Ocreati in Helceph;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 3. 1880, S. 132: „[Primi numeri] digiti vocantur ... Sunt ... in unoquoque limite numerorum novem termini ... Omnes ... qui sunt in caeteris limitibus praeter primum, articuli solent appellari." Hier bedeutet also „articulus" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$.

Algorithmus demonstratus[1]) und im *Algorismus vulgaris*[2]) des Sacrobosco. Nach Sacrobosco scheinen die Terme „digiti" und „articuli" ausnahmslos in den lateinischen Rechenbüchern des christlichen Mittelalters und der Renaissance vorzukommen, wenigstens kenne ich kein solches Rechenbuch, worin sie fehlen.

Hieraus geht mit großer Wahrscheinlichkeit hervor, daß die Terme „digiti" und „articuli" nicht von den ersten Algorithmikern benutzt wurden[3]), sondern erst am Anfange des 13. Jahrhunderts angewendet worden sind. Ich sage „mit großer Wahrscheinlichkeit", denn die Möglichkeit, daß der Sprachgebrauch der Algorithmiker schon von Anfang an schwankend war, ist bisher durch keinen sicheren Beleg wahrscheinlich gemacht.[4])

1) „Digitus est omnis numerus minor decem. Articulus est omnis numerus qui digitum decuplat aut digiti decuplum aut decupli decuplum et sic in infinitum." Hier bedeutet also „articulus" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$.

2) Siehe die Ausgabe von M. Curtze, Kopenhagen 1897, S. 2: „Quilibet digitus una sola figura . . . habet scribi, omnis vero articulus per cyphram . . . et digitum". Hier bedeutet also „articulus" nur eine Zahl von der Form $a \cdot 10$ $(a < 10)$, d. h. Zehner.

3) Wenn M. Chasles (*Explications des traités de l'Abacus et particulièrement du traité de Gerbert;* Comptes rendus de l'acad. d. so. [de Paris] **16**, 1843, S. 13 des Sonderabzuges) zuerst den Term „articulus" als eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$ definiert und dann hinzufügt: „ces expressions *digits, articles* . . . ont passé dans les traités d'*algorisme,* où on les trouve sans interruption jusque dans le cours du XVIIe siècle, avec la même signification", so sind seine Angaben folglich nicht ganz genau. Teils bedeutete „articulus" nicht immer eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$, sondern zuweilen allgemeiner eine Zahl von der Form $A \cdot 10$ (A eine beliebige ganze Zahl), teils benutzen drei der ältesten Algorismusschriften nicht die Ausdrücke „digitus" und „articulus", und es ist nicht konstatiert, daß diese Ausdrücke überhaupt von den Algorithmikern des 12. Jahrhunderts angewendet wurden.

4) Daß an einer Stelle der wahrscheinlich von Gherardo Cremonese verfertigten Übersetzung von Alkhwarismis Algebra das Wort „articulus" benutzt wird (siehe Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, Paris 1837, S. 265), wo es sich eigentlich um eine beliebige größere Zahl handelt (Rosen übersetzt das entsprechende arabische Wort durch „greater number"), beweist gar nicht, daß sich Gherardo Cremonese der Terminologie der späteren Algorithmiker bediente. Im Gegenteil weiß man, daß bei den Abacisten „articulus" zuweilen als „major numerus" mit Rücksicht auf den „digitus" definiert wurde (siehe Gerberti *Opera mathematica,* S. 252), und es ist darum leicht erklärlich, daß bei der Übersetzung der arabischen Terme (vgl. Woepcke, *Extrait du Fakhri,* Paris 1853, S. 48) die entsprechenden Wörter „articulus" und „digitus" zur Anwendung kommen konnten. Noch geringere Bedeutung hat der Umstand, daß an einer anderen Stelle der Librischen Ausgabe (S. 254, Z. 3) das Wort „articulus" vorkommt, denn hier dürfte der Text („post hoc similiter reiteratur mille apud unumquemque articulum usque ad id quod comprehendi potest de numeris ultime") verstümmelt sein (Rosen übersetzt die entsprechende Stelle des arabischen Textes auf folgende Weise: „then the thousand can be thus repeated *at any complex number* . . .").

Aus dem von mir oben erwähnten Umstande, daß zwar die „Demonstratio Jordani“ aber nicht das „Opus numerorum“ die Terme „digiti“ und „articuli“ enthält, kann man also folgern, daß diese Schrift sehr wahrscheinlich die ältere ist. Noch größer wird diese Wahrscheinlichkeit, wenn man die Terminologie der zwei Traktate näher untersucht. Dabei fällt es zuerst auf, daß von den neun Sätzen der „Demonstratio Jordani“, die im „Opus numerorum“ fehlen, nicht weniger als vier (**9**, **15**, **17**, **19**) die Terme „digiti“ oder „articuli“ enthalten, während sich diese Terme in keinem einzigen der übrigen 25 Sätze der „Demonstratio Jordani“ finden. Diese Tatsache erklärt sich ohne weiteres, wenn man annimmt, daß die fraglichen neun Sätze in das „Opus numerorum“ eingeschaltet worden sind, nachdem der Gebrauch der Terme „digiti“ und „articuli“ geläufig wurde. Fast unerklärlich wird dagegen die Tatsache, wenn die „Demonstratio Jordani“ die ältere Schrift ist, denn es ist höchst unwahrscheinlich, daß die vier Sätze **9**, **15**, **17**, **19** absichtlich gestrichen worden wären, weil sie die Terme „digiti“ und „articuli“ enthielten, und kaum wahrscheinlicher ist es, daß hier ein Zufall vorliegen würde. Für die Ansicht, daß der Traktat, wo die Terme „digiti“ und „articuli“ vorkommen, eine spätere Bearbeitung des ursprünglichen Traktates ist, spricht auch der Passus des **28**. Satzes der „Demonstratio Jordani“: „ultimum inferiorum in ultimum superiorum ducamus multiplicatione unitatum sive digitorum quod idem ut“ (der entsprechende Passus des „Opus numerorum“ lautet: „ultimum inferiorum in ultimum superiorum ducamus multiplicatione unitatum“), sowie der Umstand, daß in der „Demonstratio Jordani“ neben dem Terme „articuli“ auch der Term „deceni“ vorkommt an solchen Stellen, wo die späteren Algorithmiker immer das Wort „articuli“ anwenden. Sowohl das eine als das andere erklärt sich nämlich ohne weiteres, wenn man annimmt, daß der Bearbeiter der neuen Auflage des „Opus numerorum“ an einigen Stellen vergessen hat, die von ihm bevorzugten Terme statt der im „Opus numerorum“ vorkommenden einzuführen. Geradezu unverständlich wird die Abfassung des Satzes **6** („Numero composito per differencias suas disposito, si prima differencia vacua fuerit, totus numerus par erit“), wenn sie von einem Mathematiker herrühren würde, der wirklich den Term „articulus“ anwendete, denn der Satz kann ganz einfach auf folgende Weise ausgedrückt werden: „Omnis articulus par est“ (vgl. Def. 4). Daß übrigens Def. 4 der „Demonstratio Jordani“ ein späterer Zusatz sein muß, wird unmittelbar ersichtlich, wenn man sie mit Def. 5 vergleicht. Nach Def. 5 ist nämlich jede Zahl von der Form $A \cdot 10$, wo A mehrziffrig ist, ein „numerus compositus“, aber nach Def. 4 ist dieselbe Zahl ein „articulus“.

Das Endresultat der vorangehenden Untersuchung wird also: A u s terminologischen Gründen ist es höchst wahrscheinlich, daß

die „Demonstratio JORDANI" eine spätere Bearbeitung des „Opus numerorum" ist, und durch diese Annahme erklären sich auch gewisse andere Umstände, die sonst auffällig sein würden. Dagegen gibt es meines Wissens keinen Umstand, der dieser Annahme zu widersprechen scheint.

Zum Schluß nur noch einige Worte über die Verfasserfrage. Wenn man aus inneren Gründen geneigt sein muß, die „Demonstratio JORDANI" wirklich dem JORDANUS zuzuweisen, so gelten diese Gründe ebensosehr in betreff des „Opus numerorum". Ist nun diese Schrift die ursprüngliche, so muß sie in erster Linie als von JORDANUS verfaßt betrachtet werden, während die „Demonstratio JORDANI" vielmehr als eine neue erweiterte Auflage, vielleicht nicht von JORDANUS selbst besorgt, anzusehen ist. Jedenfalls muß also die Einleitung des „Opus numerorum" von JORDANUS herrühren, und auf diese Weise könnte man eine Stütze der Annahme, daß der Mathematiker JORDANUS mit dem Ordensgeneral JORDANUS SAXO identisch sei, bekommen, wenn es sich bestätigen würde, daß dieser Vorlesungen gehalten hat[1]); in der Tat ist es sehr leicht, den von mir oben besonders erwähnten Passus: „nec in hac quoque parte . . vires subministret" zu verstehen, wenn das „Opus numerorum" ursprünglich eine Vorlesung war. Auf diese Weise erklärte sich auch leicht der Umstand, daß die Beweise der zwei Handschriften Cod. Vatic. Ottob. 309 und Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 zuweilen durchaus verschieden sind, wenn man annimmt, daß die Vorlesung mehr als einmal gehalten wurde. Ferner weiß man, daß ALBERTUS MAGNUS durch JORDANUS SAXO für den Dominikanerorden gewonnen wurde, und da die naturphilosophischen Stellen der Einleitung des „Opus numerorum" teilweise an die Lehren des ALBERTUS MAGNUS erinnern, so könnte man auch aus diesem Umstande vermuten, daß JORDANUS SAXO und der Mathematiker JORDANUS identisch sind. Indessen gebe ich gern zu, daß auf das letzte Argument geringerer Wert zu legen ist, da die Naturphilosophie des ALBERTUS MAGNUS zum größten Teil nicht besonders selbständig ist. Übrigens hat vermutlich dem Verfasser des „Opus numerorum" die Einleitung der *Institutio arithmetica* des BOETIUS zum Muster gedient.[2])

1) Vgl. M. CURTZE, *Jordani Nemorarii geometria*, Thorn 1887, S. VI.

2) Vgl. z. B. BOETIUS, *De institutione arithmetica*, ed. G. FRIEDLEIN, Leipzig 1867, S. 9 Z. 16—26, S. 10 Z. 1—7.

Sur le „Libro de algebra“ de Pedro Nuñez.

Par H. Bosmans à Bruxelles.

I.

L'ouvrage qui fait l'objet de cette note est intitulé:

libro de algebra en arithmetica y geometria. Compuesto por el Doctor Pedro Nu- ñez, Cosmographo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubi- lado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniuersidad de Coymbra. (Marque d'imprimeur de Steelsius: Un autel, sur lequel un sceptre s'élève entre deux colombes. En exergue la devise): Concordia res parvae crescvnt. *en anvers.* En casa de la Biuda y herederos de Iuan Stelsio. 1567. *con privilegio real.*[1])

C'est un volume des plus rares, à tel point que dans son érudite bibliographie des ouvrages sortis des presses des Steelsius, Nuyts n'en parle pas.[2])

D'assez nombreux exemplaires du *Libro de algebra* ont comme adresse d'imprimeur, „En Anvers, En casa de los herederos de Arnoldo Birckman, 1567“. C'est notamment celle qui est donnée par Brunet dans son *Manuel du libraire.*[3]) Da Silva les indique l'une et l'autre dans son dictionnaire[4]), et se demande, à ce propos, s'il faut voir, dans ces ouvrages, deux éditions distinctes parues, la même année et dans la même ville, chez deux libraires différents, ou bien si l'on n'a affaire qu'à une seule et même édition

1) In 8° de 32 p. non numérotées, 681 pp. numérotées au r° seul de 1 à 341 et 3 p. blanches. L'exemplaire dont je me sers appartient à l'Université de Louvain. Il fait partie d'un recueil factice, coté „Sciences 293“, relié aux armes d'Adrien Romain (un paon rouant), et qui lui a appartenu. Je remercie vivement MM. les bibliothécaires de l'Université, et tout specialement M. Wils, pour l'obligeance avec laquelle ils l'ont mis à ma disposition à Bruxelles.

2) *Jean Steelsius, libraire anversois.* Série d'articles publiée dans le Bulletin du bibliophile Belge, **14** et **15**, Bruxelles 1858 et 1859.

3) Tom. **4**, Paris 1863, col. 140.

4) *Diccionario bibliographico Portuguez* **6**, Lisboa 1862, p. 441—442.

avec deux titres. Cette dernière hypothèse est la vraie. Sans avoir eu l'occasion de confronter ensemble des exemplaires de Steelsius et de Birckman, je crois néanmoins pouvoir l'affirmer avec certitude. Non seulement le format, l'année et le nombre de pages sont les mêmes, mais les multiples citations faites d'après Birckman qu'il m'a été possible de contrôler concordent parfaitement avec le texte de Steelsius. Au surplus en mettant ainsi au titre d'une même édition leurs adresses respectives, les éditeurs ne font que se conformer à un usage alors courant au Pays-Bas.

Dans son mémoire sur la vie et les travaux de Pedro Nuñez, Ribeiro dos Sanctos[1]) parle en outre d'une édition qui aurait paru à Bâle, en 1592; „da Officina dos herdeiros de Arnoldo Birak“, en ajoutant toutefois qu'il ne l'a pas vue.

Jusqu'à meilleure information je tiens ce renseignement pour erroné. En 1592, il est vrai, parut, à Bâle, une édition des *Opera* de Nuñez; mais ces *Opera* ne contiennent pas l'algèbre[2]) et l'éditeur en fut Sebastien Henricpetrus. D'autre part Arnoldo Birack est probablement une transcription fautive d'Arnoldo Birckman. Il doit y avoir là une confusion avec les exemplaires qui parurent, en 1567, à Anvers, chez Arnould Birckman.

Le *Libro de algebra* de Nuñez a eu plusieurs versions, toutes restées inédites.

Le célèbre Jean Pretorius le traduisit en latin. Doppelmayr[3]) nous apprend que de son temps le manuscrit original de Pretorius se trouvait encore à la bibliothèque d'Altorff, parmi les autres papiers de ce savant. C'est vraisemblablement le manuscrit renseigné aujourd'hui sous le no. 979,

---

1) *Memoria da vida e escritos de Pedro Nunes*, publié dans Memorias de litteratura Portugueza, publicadas pela academia real das sciencias de Lisboa. **7**, 1806, p. 271.

2) Le titre complet de cette édition des *Opera* de Nuñez en indique bien le contenu: *Petri Nonii Salaciensis Opera. Quae complectuntur primùm dvos Libros, in qvorvm priore tractantur pulcherrima Problemata: in Altero Traduntur ex Mathematicis disciplinis regulae & instrumenta Artis navigandi, quibus varia rerum Astronomicarum φαινόμενα circa coelestium corporum motus explorare possumus. Deinde Annotationes in Aristotelis problema Mechanicum de Motu navigii ex remis: Item in Georgii Pvrbachii planetarum theoricas Annotationes, quibus multa hactenus perperam intellecta, ab aliisq; praeterita exponuntur. Eivsdem de Erratis Orontii Finoei Liber Vnus. Postremò, de Crepvscvlis lib. I. cum libello Allacen de causis Crepusculorum Quae quemadmodum mole exigua videntur, ita virtute ingentia, Lector candide, intelliges.* Cum Gratia & Priuil. Caesareae Majest. Basileae per Sebastianvm Henricpetri. — A la fin: Basileae per Sebastianvm Henricpetri. Anno CIↃ.IↃ.XCII. Mense septembri.

3) *Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*, Nürnberg 1730, p. 89.

sans nom de traducteur, mais avec le millésime de 1615, dans le catalogue des mannscrits de l'nniversité d'Erlangen.[1]) Il serait probablement possible de tirer la chose an clair en confrontant l'écriture de ce mannscrit avec celle des autographes de Pretorius qne possède cette bibliothèque.

M. L. Delisle donne, en ontre, dans son *Inventaire général des manuscrits français de la bibliothèque nationale*[2]), sons le no. 1344 (Colbert): „L'algèbre en arithmetique et geometrie par Pierre Nuñes, tradnit de l'espagnol par Guillaume de Rascas, Seigneur de Bagarris et dédié à Henri IV. MS. original". M. Brocard a déjà appelé l'attention sur ce manuscrit à diverses reprises.[3])

Ces deux versions ne sont probablement pas les senles. Mais des recherches ultérieures m'eussent exposé à franchir les bornes imposées à ce travail. Les résultats précédents ne sont donc qn'une première indication ntile qui aurait besoin d'être complétée.

Avant de quitter cet ordre d'idées, je rappellerai que le *Libro de algebra* fnt primitivement écrit en portugais. Cette rédaction est perdne et seule la dédicace de Nuñez au prince cardinal, l'Infant don Henrique, nons a été conservée dans la langue originale.

Dans cette dédicace l'antenr nons apprend qu'il tradnisit lni-même son oeuvre en espagnol. Il voulait, dit-il, lni ménager ainsi des lecteurs plus nombreux, l'espagnol étant beancoup plus répandu que le portugais.

Autre renseignement curieux. La dédicace est datée de Lisbonne, le 1r décembre 1564, et Nuñez nous y dit que son travail était écrit alors depnis plus de trente ans. Le *Libro de algebra* anrait donc été composé, d'après cela, en 1532 ou 1533.

Ceci demande cependant quelques observations.

Entendne de l'original portugais l'assertion de Nuñez ne soulève aucune difficulté et je crois bien que c'est ainsi qu'il la comprenait lui même. Elle serait évidemment fansse si on l'appliqnait à la version espagnole. Dans cette dernière version, Nuñez fait de mnltiples et incontestables emprunts à des auteurs qui ont écrit bien après 1533. Au surplns il ne s'en cache pas et cite souvent leurs oenvres en termes

1) *J. C. Irmischer, Handschriften-Katalog der königlichen Universitätsbibliothek zu Erlangen.* Frankfurt a. M. und Erlangen 1852, p. 239. Le manuscrit est signalé en ces termes: „979. — *Nonii Pet., algebra*, ex Hispanico utcunque latine facta, Pap. in 4°. 530 S. v. J. 1615. Pappbd."

2) Tom. 2, Paris 1878, p. 238.

3) L'Intermédiaire des mathématiciens, 9. 1902, p. 41. — *Description et usage d'un nouvel anneau astronomique, d'après un manuscrit inédit.* Sans lieu, ni date, p. 9.

exprès. Nommons, par exemple, l'Arithmétique de CARDAN[1]) qui est de 1539, les six premiers livres des Eléments d'EUCLIDE par PELETIER[2]) qui sont de 1557, les *Quesiti et inventioni diverse* de TARTAGLIA[3]), etc. etc.

En constatant ces emprunts, loin de moi toute pensée de blâme; je ne veux que préciser les choses. Il est naturel qu'avant d'éditer son travail NUÑEZ ait cherché à le mettre au courant des derniers progrès de la science. On ne peut que louer cet effort, et si l'auteur méritait un reproche, ce serait, peut-être, de ne pas l'avoir fait assez grand encore. Chose étonnante, en effet, il semble ignorer presque complétement les algébristes allemands. CHRISTOPHE RUDOLF et MICHEL STIFEL notamment lui sont inconnus. Pas une fois il ne les nomme, et on chercherait vainement, dans toute son algèbre, la moindre trace de leur influence.

II.

Mon intention n'est pas de parcourir le *Libro de algebra*, chapitre par chapitre, comme je l'ai fait, dans la Revue des questions scientifiques pour *l'Algebre* de PELETIER[4]), et ici même pour le *De arte magna* de GOSSELIN[5]); je craindrais de tomber dans des redites. Mais voici quelques points où l'oeuvre de NUÑEZ se distingue nettement des travaux similaires de ses contemporains.

On y remarque tout d'abord une généralité dans les démonstrations, une abstraction dans les énoncés des exercices, très exceptionnels pour l'époque et qui donne au *Libro de algebra* un caractère déjà tout moderne. C'est ainsi que les 110 problèmes d'algèbre, objet du chapitre 5 de la 3e partie, ne sont plus tirés, comme chez les autres algébristes du temps, du commerce, de l'industrie, ni des usages courants de la vie; ce sont des problèmes sur les nombres. Que si l'auteur emprunte à L. PACIUOLO ou à quelque autre une question où des joueurs, par exemple, se partagent des écus, il a soin de ramener le problème à une recherche sur les nombres. Tel est le cas pour le 110e problème du chapitre 5 rappelé ci dessus.

1) *H. CARDANI Practica arithmetice & mensurandi singularis* . . . [A la dernière page]: Auno a Virgineo partu M. D. XXXIX. Io. Autonius Castellioueus Imprimebat Impensis Bernardi Calusci. — C'est par ex. le prob. 58 du chap. 67 de cet ouvrage (f° GG r° — GGij r°), que NUÑEZ a en vue dans le passage qu'il dit, au f° 79 r°, avoir emprunté à CARDAN.

2) *I. PELETARII, In EUCLIDIS Elementa geometrica demonstrationum libri sex* . . . Lvgdvni. Apvd Ioan. Tornaesivm et Gvl. Gazeivm. M. D. LVII. L'ouvrage contient, en appendice, huit lettres de PELETIER à des savants en vue, dont une adressée à NUÑEZ, f° (p 5) v° — (p 6) r°.

3) Ils eurent plusieurs éditions. La première est de Venise 1546

4) Tom. 41, Bruxelles 1907, p. 117—173.

5) Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, p. 43—66.

Ce même cachet d'abstraction se remarque aussi dans les 77 exercices d'application de l'algèbre à la géométrie qui forment l'objet du dernier chapitre de la troisième partie.

Parmi les ouvrages mathématiques du moyen-âge Nuñez a étudié à fond l'*Arithmetica* de Jordan.[1]) Il y est surtout frappé par l'emploi *fréquent* des lettres introduit par Jordan[2]) dans les démonstrations arithmétiques, Reconnaissant à cet emploi une force probante que n'ont pas les simples vérifications numériques alors en usage en guise de démonstration il fait sienne cette méthode. Son mérite, en cela, est analogue à celui de Maurolyco.[3]) Mais pas plus que le géomètre Sicilien, il ne fait faire de progrès à la méthode de Jordan. C'est ainsi que si chez Jordan les chiffres sont remplacés par des lettres; il n'a cependant pas encore l'idée de conserver, dans les résultats, la trace des données; les sommes, les différences, les produits et les quotient sont chaque fois remplacés par une lettre nouvelle au fur et à mesure qu'ils se présentent dans les calculs. Nuñez et Maurolyco agissent de même et Viète le premier devait faire faire en cette matière un nouveau pas à la science. N'importe, au milieu du 16[e] siècle l'emploi de la notation littérale de Jordan est trop rare, pour qu'il n'y ait pas lieu de signaler à l'attention les auteurs qui en ont reconnu le mérite. Simple verification ne fait souvent pas preuve. Nuñez le sait. Aussi la grande rigueur d'esprit dont il donna tant de preuves, entre autres dans sa polémique contre Oronce Finé, ne pouvait manquer

1) Publiée pour la première fois en 1496 par Lefèvre d'Etaples. — *In hoc opere contenta: Arithmetica decem libris demonstrata. Musica libris demonstrata quatuor. Epitome ι libros arithmeticos diui Severinj Boetij. Rithmimachie ludus q̄ & pugna numeror; appellāt.* — A la fin: Has duas Quadriuū partes . . . curarunt . . . Ioannes Higmanus & Volfangus Hopilius suis grauissimis laboribus & impensis. Parrhisii anno salutis Domini . . . 1496 . . . Réédité, sous le même titre, à Paris, en 1514, chez Henri Estienne. Nuñez cite aussi le *De ponderibus* de Jordan de Némore, mais il nous apprend lui même (f° 334 v°) qu'il le fait d'après une copie transcrite sur un manuscrit de l'abbaye de Saint-Victor, à Paris.

2) Sur les *premier* emploi des lettres, voir Eneström, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, p. 85—86.

3) D. Francisci Maurolyci, *Arithmeticorum libri duo nunc primum in lucem editi* . . . Venetiis, Apud Franciscum Franciscium Senensem. M. D. LXXXV. Chasles dit, on le sait, dans *l'Aperçu historique* (p. 345) que Maurolyco „introduisit le premier l'usage des lettres à la place des nombres dans les calculs de l'arithmétique". Je crois devoir rappeler cette erreur de l'illustre historien, pour montrer combien petit fut le nombre des imitateurs de Jordan de Némore.

4) Au f° 30 r°, Nuñez après avoir donné une démonstration sur des chiffres y ajoute cette réflexion bien rare chez un algébriste du 16[e] siècle „Y aun que esta demonstracion paresca particular, la razon della es vniuersal, y generalmente se puede accommodar a toda multiplicacion . . .". Le traité *De erratis Orontii Finaei* par Nuñez a été réédité dans ses *Opera* de Bâle, 1592.

de l'avertir de la supériorité des demonstrations de JORDAN DE NÉMORE sur celles qui étaient alors habituellement en usage.

Mais s'il ne mérite que des éloges quand il suit les traces de JORDAN DE NÉMORE le souci de la rigueur n'inspire pas toujours NUÑEZ avec le même bonheur. C'est ainsi qu'on ne saurait guère l'approuver dans les vertes critiques qu'il adresse à PACIUOLO pour avoir admis les racines négatives des équations. Il s'agit, dans le passage suivant, de

$$x + 79 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -79.$$

„La verdad es, dit NUÑEZ, que el caso es impossible; porque impossible es que numero y cosas sean yguales a cifra, y que 1. co. sea ygual a $\tilde{m} \cdot 79$. y si entendio que $\tilde{m} \cdot 79$. es aun menos que nihil, a que llaman debito, esto es mera vanidad y pura contradition."[1])

Mais il y a bien plus étonnant encore. NUÑEZ n'admet pas même que l'inconnue puisse avoir pour valeur zéro. Que s'il opère parfois comme si cette hypothèse était licite, il s'en excuse en invoquant l'usage et en protestant contre lui. Il s'agit cette fois de l'équation

$$40 = 40 + \frac{3}{5}x, \quad \text{d'où} \quad 0 = \frac{3}{5}x, \quad \text{et} \quad x = 0.$$

„Esto que, dit-il, en este caso auemos obrado ygualando $\dot{40}$. con $40 \cdot \tilde{m} \cdot \frac{3}{5} \cdot co.$ y concluyendo que cifra de numero es ygual a $\frac{3}{5} \cdot co.$ es lo que communmente los Arithmeticos practicos dizen, pero es fuera de my opinion, y lo contrario tengo escripto."[2])

Pour achever de caractériser le *Libro de Algebra* je dirai que NUÑEZ y suppose connues toutes les opérations de l'arithmétique élémentaire. Quant au calcul algébrique, voici un exemple de la division avec sa preuve par la multiplication. Il s'agit de

$$(12x^3 + 18x^2 + 27x + 17) : (4x + 3)$$

ce qui donne pour quotient

$$3x^2 + 2\frac{1}{4}x + 5\frac{1}{16} + \frac{1\frac{13}{16}}{4x+3}.$$

On remarquera que le diviseur s'écrit à gauche du dividende et le quotient au dessous de toute l'opération. La disposition entière des calculs s'écarte beaucoup de celle qui était alors généralement en usage.[3])

1) F° 224 r°. — Voir aussi f° 126 v° etc.

2) F° 165 v°. — Voir aussi f° 21 r°, f° 126 v°. etc.

3) F° 32 r°. L'attention a déjà été appelée, par M. TROPFKE, sur cette disposition des calculs de la division algébrique chez NUÑEZ (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Berlin 1902, p. 325).

„Partidor. $4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3$ | $12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17.$

$12 \cdot cu \cdot p \;\; 9 \cdot ce.$

$9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17.$

$9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 6 \cdot co \cdot \frac{3}{4}.$

$20 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 17.$

$20 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 15\frac{3}{16}.$

$1\frac{13}{16}.$

$3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5\frac{1}{16} \cdot \tilde{p} \cdot 1\frac{13}{16}.$

par $\cdot 4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3.$

„La prueua sera que multiplicando $\cdot 3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5\frac{1}{16} \cdot \tilde{p} \cdot 1\frac{13}{16}.$ partidor $4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3 \cdot$ por el partidor haremos la summa principal.

$3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5\frac{1}{16}.$

$4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3.$

$12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 20 \cdot co \cdot \frac{1}{4}.$

$9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 6 \cdot co \cdot \frac{3}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 15\frac{3}{16}.$

$1\frac{13}{16}.$

$12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17.$

III.

On a dit que Nuñez n'avait guère traité la résolution de l'équation du 3e degré.[1]) C'est une indication qui doit être modifiée. Il donne la règle de solution avec plusieurs exemples. Bien plus il énonce même cette règle dans le texte italien original de Tartaglia. La voici telle qu'on peut la lire dans le *Libro de algebra.*[2])

1) Voir Ch. Hutton, *Tracts on mathematical and philosophical subjects* II, London 1812, p. 251: „... without treating on cubics, further than giving some account of the dispute between Tartelea and Cardan concerning their invention; and that in such manner as shows he did not very well understand them".

2) F° 334 r°.

Quando chel cubo con le cose apresso
Se agualia a qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso,
Dapoi terrai questo per consueto
Ch'el lor producto sempre si eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sotrati
Varra la tua cosa principale.[1])

En style moderne ces vers connus signifient, je crois utile de le rappeler, soit à résoudre

$$x^3 + ax = b$$

déterminez deux inconnues auxiliaires y et z, au moyen des équations

$$y - z = b, \quad yz = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

et vous aurez l'inconnue principale par

$$x = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}.$$

Nuñez, il est vrai, s'arrête ici, tandisque dans ses célèbres vers à Cardan, Tartaglia résout encore

$$x^3 = ax + b \quad \text{et} \quad x^3 + b = ax.$$

Mais la résolution du premier cas suffit au but de Nuñez, car d'après lui, si la règle de Tartaglia est correcte, elle n'est pas pratique à cause de sa complication de radicaux et il faut trouver autre chose.

Voici, en résumé, son très intéressant raisonnement.

Considérons, dil-il, l'équation[2])

$$x^3 + 3x = 36.$$

Il est bien aisé de s'assurer que sa racine est 3. C'est effectivement la seule racine réelle, les deux autres étant $\frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{-39}\right)$. Or en appliquant la règle de Tartaglia on trouve

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{325} + 18} - \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18}.$$

Considérons ensuite l'équation[3])

$$x^3 + 9x = 54$$

1) Voir le commentaire de ces vers chez Cossali: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra* II, Parma 1799, p. 154 et suiv. ou chez Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2^2, p. 488—489. Je conserve l'orthographe de Nuñez.

2) F° 340 v°. 3) F° 340 v°—341 r°.

Il est de nouveau aisé de s'assurer que sa racine est 3. C'est encore une fois la seule racine réelle, puisque les deux autres sont

$$\frac{3}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-7}\right).$$

Mais en appliquant la règle de Tartaglia on trouve

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{756} + 27} - \sqrt[3]{\sqrt{756} - 27}.$$

Et maintenant il faut céder la plume à Nuñez.[1])

„Ny aura", dit-il, „Arithmetico de tan sotil ingenio, que proponendiole estas dos quantidades

$$R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 325 \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot \tilde{m} \cdot R \cdot V\ cu \cdot R \cdot 325 \cdot \tilde{m} \cdot 18.$$

$$\left(= \sqrt[3]{\sqrt{325} + 18} - \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18}\right)$$

y[2])

$$R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 756 \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot \tilde{m} \cdot R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 756 \cdot \tilde{m} \cdot 27.$$

$$\left(= \sqrt[3]{\sqrt{756} + 27} - \sqrt[3]{\sqrt{756} - 27}\right)$$

pueda conoscer que son yguales, y valo pero cada vna dellas 3. Y el impedimento es, venir el valor de la cosa explicado por quantidades irracionales, y los binomios las mas vezes no seren cubos."

Voilà qui est clair et qui explique bien la manière de faire de Nuñez. Il expose un des cas de la règle de Tartaglia, ce qui est très suffisant pour la faire connaître. S'il ne s'étend pas sur les autres, c'est parce qu'à son avis, cette règle est, en fait, peu pratique. Même quand la racine est en réalité rationnelle, comme dans les exemples donnés ci dessus, on la trouve sous une forme si compliquée de radicaux qu'on ne saurait pas y reconnaître la véritable valeur rationnelle de cette racine. Pour résondre l'équation du 3e degré il faut donc s'y prendre autrement que Tartaglia.

Le procédé de Nuñez est ingénieux et devait devenir fécond entre les mains de ses successeurs. Tel qu'il l'expose il est évidemment moins pratique encore que celui qu'il critique, mais il l'est pour d'autres motifs. Pour qu'on puisse en juger le voici, en deux mots[3]):

Soit
$$x^3 = ax^2 + bx + c$$

l'équation du 3e degré, dans laquelle l'auteur distingue plusieurs cas d'après les signes de a, b et c. En retranchant préalablement aux deux membres une quantité convenablement choisie, on pourra toujours leur

1) Nuñez commet ici une faute de plume et écrit deux fois 576 pour 756.

2) F° 341 r°.

3) Il fait l'objet du chapitre 1 de la 3e partie, f° 123 v°—133 r°.

trouver un diviseur commun du premier degré en x, et après l'avoir supprimé, la proposée sera ramenée au second degré.

Pour nous, l'exactitude de cette règle est intuitive; car soit p une racine de la proposée, en en retranchant membre à membre

$$p^3 = ap^2 + bp + c$$

il vient

$$x^3 - p^3 = a(x^2 - p^2) + b(x - p)$$

qui se décompose en

$$x - p = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + px + p^2 = a(x + p) + b.$$

Mais la lecture de Nuñez laisse cependant l'impression qu'il n'a entrevu que d'une manière assez confuse ce raisonnement si simple. On se demande surtout s'il a aperçu que $x = p$ est toujours l'une des racines de l'équation, même quand p est négatif.

Quoiqu'il en soit, et la remarque est importante, Nuñez dit en termes exprès[1]) qu'on n'a pas encore découvert la règle générale à suivre, pour trouver à coup sur le nombre à retrancher aux deux membres et rendre ainsi possible l'abaissement du degré de l'équation.

Il donne cependant à ces sujets quelques conseils.

Le premier est de savoir par coeur les résultats des produits[2])

$$(x+1)(x+1), \quad (x+1)(x+2), \quad (x+1)(x+3), \ldots$$
$$(2x+1)(x+1), \quad (2x+1)(x+2), \ldots$$

et ainsi de suite jusqu'à 10.

Il indique ensuite certaines formes particulières de l'équation pour lesquelles le diviseur se trouve d'après une règle générale.

Si la proposée est de la forme[3])

$$x^3 = (a+1)x + a,$$

ajoutez l'unité aux deux membres, il vient

$$x^3 + 1 = (a+1)(x+1)$$

et l'on peut supprimer $x + 1$.

Plus généralement, et cette généralisation est exprimée très explicitement, étant donnée[4])

$$x^3 = ax + b$$

s'il existe entre a et b une relation de la forme $p^3 = ap - b$, il vient

$$x^3 + p^3 = a(x + p)$$

et l'on peut diviser par $x + p$.

1) F° 125 v°. 2) F° 125 v°. 3) F° 126 r° et v°.
4) F° 126 r°—127 r°.

De même, de[1])

$$x^3 + a = (a+1)x$$

on tire

$$x^3 - 1 = (a+1)(x-1)$$

et $x-1$ est facteur commun. Après l'avoir supprimé l'équation est abaissée au 2^d degré.

Généralisation analogue à la précédente. Si dans[2])

$$x^3 + b = ax$$

il existe entre a et b, la relation $p^3 = ap - b$, il vient

$$x^3 - p^3 = a(x-p)$$

et l'on pourra affirmer, sans raisonnement ultérieur, „sin otro discurso“, que $x = p$ est toujours racine. Mais cette racine n'est pas la seule. Supprimons aux deux membres le facteur $x - p$, l'équation du 2^d degré obtenue fournira les racines restantes.

Les quatre équations générales[3])

$$\begin{aligned}(1+a+b)x &= x^3 + ax^2 + b\\ (1+a+b)x^2 &= x^3 + ax + b\\ ax^2 + bx &= x^3 + (a+b-1)\\ ax^2 + b &= x^3 + (a+b-1)x\end{aligned}$$

admettent toutes la racine $x = 1$. Elles peuvent s'écrire respectivement:

$$\begin{aligned}x^3 - 1 &= (x-1)(b+1-ax)\\ x^3 - 1 &= (x-1)[(a+b+1)x + b + 1]\\ x^3 - 1 &= (x-1)(ax + a + b)\\ x^3 - 1 &= (x-1)(ax - b + 1)\end{aligned}$$

Pour obtenir les autres racines, on supprime aux deux membres le diviseur commun $x - 1$ et on égale les quotients obtenus

Enfin les trois équations générales[4])

$$\begin{aligned}ax^2 + a &= x^3 + x\\ ax + a &= x^3 + x^2\\ ax^2 + ax &= x^3 + 1\end{aligned}$$

admettent toutes un diviseur commun aux deux membres. Ce diviseur est $x^2 + 1$ pour la première équation et $x + 1$ pour les deux autres.

Toute cette théorie de l'abaissement du degré des équations est très intéressante. Elle frappa vivement les contemporains de Nuñez qui ne

1) F° 127 r° et v°. 2) F° 127 v°—128 r°. 3) F° 128 r°—132 r°.
4) F° 132 r°—133 r°.

lui ménagèrent pas leurs éloges. Ces éloges ont même fait croire à quelques historiens qne Nuñez était l'inventeur du procédé de la recherche du plns grand commun diviseur algébrique, par la voie des divisions successive des polynômes l'un par l'autre. M. Maurice Cantor[1]), par exemple, sans se prononcer cependant pour cette opinion d'une manière tout à fait catégorique, invoque en sa faveur le passage que voici du livre II de *L'Arithmétique* de Simon Stevin[2]):

„Probleme LIII.

Estant donnez deux multinomies algebraiqnes, trouver leur plus grande commune mesure.

Nota. Petrus Nonius au commencement de la troisiesme partie de son Algebre, estimoit qu'alors ce probleme n'estoit par generale reigle inuenté[3]); parqnoi il en descripuoit quelqne maniere a tastons. Nous descriprons sa legitime construction, qui sera semblable à l'operation de l'inuention de la plus grande commune mesure des nombres Arithmetiques entiers du 5 probleme: à sçauoir on diuisera premierement le maieur par le moindre, et pnis le diuiseur autrefois par la reste, iusques à ce qu'il ne reste rien.“

Ce passage est équivoque et on conçoit que ceux qui n'avaient pas le texte de Nuñez sous les yeux aient pu s'y tromper. A la décharge du géomètre flamand il ne faut pas oublier que, contrairement à son habitude, il a écrit son *Arithmétique* en français, langue qu'il ne maniait, ni avec la facilité, ni avec la précision de sa langue maternelle.

Quoiqu'il en soit, nous venons de résumer intégralement la recherche „à tastons“ de la commune mesure des „multinomies“ chez Nuñez. Eh bien! non seulement Stevin a raison quand il dit que l'algébriste portugais n'a pas inventé une „reigle generale“ pour la recherche du plus grand commun diviseur algébrique, mais avec sa modestie habituelle il lui donne même trop de part dans la découverte, car pas nn seul des exemples de Nuñez n'est traité par voie de division des denx „multinomies“ données l'une par l'autre.

Qu'en conclure?

Que la lecture de Nuñez a probablement suggéré à Stevin l'idée de rechercher une méthode générale pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynomes en imitant „l'invention de la plus grande commune mesure des nombres arithmetiques entiers“. Voilà, pour ma

1) *Vorlesungen* 2^2, p. 389.

2) *L'Arithmetiqve de Simon Stevin de Brvges* . . . A Leyde, De l'Imprimerie de Christophle Plantin. CIↃ.IↃ. LXXXV, p. 240. — Reproduit dans les *Oeuvres*, Leyde 1634, tom. I, p. 56. 3) *Libro de algebra*, f° 124 v°.

part, le sens que j'attache à sa Note. Quant à la découverte elle-même de la méthode, le mérite lui en appartient

Il est bien clair, d'après ce qui précède, qu'on jugerait mal le *Libro de algebra* en disant simplement, sans correctif, que Nuñez n'y traite pas la résolution de l'équation du 3[e] degré. La vérité est qu'il ne la traite pas à la manière de Cardan. A tort ou à raison il regarde la formule Tartaglia-Cardan comme manquée, même en dehors du cas irréductible, parce qu'elle est trop compliquée de radicaux. En cela il n'est pas le seul, et dans son essai historique sur la résolution des équations, Adrien Romain n'est pas moins catégorique que lui. A preuve ce passage[1]):

„Inter omnes aequationes quae sequuntur aequationes gradus secundi, primo occurrit aequatio gradus tertii affecti gradu primo (c. à d. de la forme $x^3 \pm ax \pm b = 0$). Eam vero hactenus perfecte et generaliter exhibuit nemo. Hieronymus Cardanus (*libro artis magnae*, cap. 25) ut aequationes gradus tertii affecti gradu primo exhibeat, nullam potest invenire regulam generalem, sed exhibet regulas particulares quindecim, quae sane nec ipsae ne ex minimā parte satisfaciunt."

Les formules de Cardan „ne ex minimā parte satisfaciunt". Comme Nuñez, Romain est donc d'avis qu'il faut trouver mieux et il ajoute qu'il y est arrivé.[2])

En quoi consistait sa méthode?

La partie de l'*In Mahumedis Algebram* où il l'expliquait est malheureusement perdue. On peut cependant la deviner par les calculs qu'il nous a laissés dans ses autres ouvrages. Le *Mathematicae analyseos triumphus*[3]) notamment permet d'affirmer qu'elle avait de l'analogie avec la méthode exposée par Simon Stevin dans son *Appendice algebraique.*[4])

1) *In Mahumedis Algebram*, p. 12. — Voir sur ce rarissime ouvrage mon mémoire: *Le fragment du commentaire d'Adrien Romain sur l'algèbre de Mahumed ben Musa el Chowarezmi*, publié dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles **30**: 2, 1906, p. 267—287.

2) O. c. p. 15.

3) *Mathematicae analyseos Trivmphvs in qvo lateris enneagoni circvlo inscripti ad Radium Circuli exhibetur ratio à Geometris summè desiderata. Ad Ill*[mum] *&* R[mum] *Principem ac Dominum, D. Ivlivm, Episcopum Herbipolensem, & Franciae Orientalis Ducem, &c. Authore A Romano, Equite Aurato, Comiti Palatino, Medico Caesareo, atq; ad D. Ioannis Evangelistae Herbipoli Canonico.* Lovanii, Sumptibus authoris. Anno 1609. — J'ai analysé cet ouvrage très rare, dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles **29**: 1, 1905, p. 77—79, d'après un exemplaire appartenant à l'Université de Munich, où il est coté, 199 *Math.*

4) *Appendice Algebraique, de Simon Stevin de Breges, contenant regle generale de toutes equations.* — *L'Appendice* sort des presses de François van Raphelengen de Leyde. L'exemplaire que j'en connais appartient à l'Université de Louvain, où il est coté *Scienc.* 587 Albert Girard l'a introduit presque intégralement dans le texte même de son édition de *L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges*, Leyde 1625,

Elle reposait évidemment sur ce principe fondamental de la résolution des équations numériques, que deux nombres comprennent entre eux une racine de l'équation, si, substitués dans son premier membre, il lui font prendre des signes contraires.

Nuñez n'a pas été aussi loin, et encore une fois, réduite à de purs tâtonnements, sans règle pour les diriger, sa méthode a des défauts d'un genre différent il est vrai de ceux des formules de Cardan, mais qui l'empêche d'avoir, en pratique, sur ces formules, une supériorité marquée.

Quant à Adrien Romain, il connaissait certainement le *Libro de algebra*. J'en ai la preuve incontestable, car je me sers de l'exemplaire même qui a appartenu à l'illustre professeur de Louvain et de Wurzbourg. Serait-il téméraire d'affirmer qu'il a été frappé par les efforts tentés par Nuñez pour trouver directement une première racine de l'équation et que la lecture de l'algébriste portugais lui a suggéré l'idée de rechercher une règle générale pour y arriver? Quoiqu'il en soit de cette intéressante question d'influence, le mérite d'avoir découvert la règle n'en reviendrait pas moins au géomètre flamand.

IV.

Quant aux équations de degré supérieur à 3, Nuñez, à l'instar des mathématiciens arabes et des algébristes de la renaissance, ne s'occupe que de celles de la forme[1])

$$x^{2m} + ax^m + b = 0$$

dont la résolution peut être ramenée à celle d'une équation du 2^d degré. Outre l'équation générale[2]), il traite, entre autres, de cette manière[3])

$$3x^3 + x^6 = 88, \quad 16x + x^7 = 10x^4.$$

Pour terminer cette note, j'ajoute un mot sur la résolution des équations à plusieurs inconnues.

Cette théorie fait chez Nuñez l'objet du chapitre 6 de la 3e partie intitulé: „De la regla de la quantidad simple o absoluta."[4]) La *quantidad*, on le sait, est la deuxième inconnue. Nuñez ne la représente ni par une deuxième lettre, ni même par une deuxième abréviation, il écrit toujours le mot quantidad au long. J'ai déjà observé ailleurs[5]) combien d'algébristes du 16e siècle, même parmi les plus éminents, n'avaient pas apprécié

p. 351—355 (dans les *Oeuvres*, Leyde 1634, p. 88—89) et en a fait sous le nom de „Reigle" un corollaire du Probleme LXXVII. Cantor expose la méthode de Stevin dans ses *Vorlesungen* 2^2, p. 628—629.

1) F° 150 r°—151 v°.

2) F° 150 r°.

3) F° 150 v°.

4) F° 224 v°—227 v°

5) *L'Algebre de Jacques Peletier*, publié dans la Revue des questions scientifiques de la société scientifique de Bruxelles 7_3 1, 1907, p. 117—173.

l'utilité des lettres multiples pour représenter les diverses inconnues. Au moment où j'écrivais, je n'avais pas lu Nuñez, car j'eus pu ajouter son nom à ma liste. S'il expose la résolution des équations à plusieurs inconnues, et il l'expose bien, c'est surtout dans le but avoué de démontrer que la méthode est compliquée et qu'il vaut mieux s'en passer.[1]) C'est là aussi, on le sait, l'avis de Gemma Frisius.[2]) Mais qui plus est, Frisius fait cette réflexion en marge de son exemplaire de l'*Arithmetica integra* de Stifel! De Stifel, tant plus clair cependant que Cardan, seul connu par Nuñez!

Tout ce chapitre 6 du *Libro de algebra* est des plus intéressants. L'auteur commence par y résoudre un problème de Cardan.[3])

„Tres erant viri pecuniam habentes", avait dit Cardan. „Primus cum dimidio reliquorum habuit aureos 32. Secundus cum reliquorum tertia parte 28. Tertius cum reliquorum parte quarta 31. Quaeritur quantum quisque habuit?"

L'intérêt du problème provient de ce qu'on le retrouve repris avec les mêmes données numériques par plusieurs des principaux algébristes du seizième siècle et notamment par Peletier.[4]) Il est amusant et surtout instructif, de voir ces maîtres se buter à des difficultés qui de nos jours n'embarrasseraient plus les tout commençans. Peletier après avoir reproduit, comme il le dit, „de poinct en poinct" la solution de Cardan en critique la longueur et la complication; puis il en essaie une solution meilleure dans le style de Stifel. Il y a progrès, mais c'est encore loin de la perfection.

A l'exemple de Peletier, Nuñez suit aussi pas à pas Cardan, tout en imprimant à l'ensemble de la question une marque fort personnelle. Et tout d'abord l'énoncé prend chez lui ce tour abstrait, déjà si moderne, qui donne tant de charme à tout son ouvrage. Les écus, les tonneaux

1) „Ieronymo Cardano hallo muchas Reglas de quantidad, por las quales resuelne muchas questionos que trae, podiendo se muy bien resolner por las Reglas de la cosa, y con mas facilidad. Y para que esto que dizimos conste ser assi, trataremos vna question suya qne por la quantidad resuelne, la qual es esta . . .", f° 226 v°.

2) *Le Commentaire de Gemma Frisius sur l'Arithmetica integra de Stifel* par H Bosmans, publié dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles **30**: 1, 1906, p. 168.

3) *Artis magnae*, cap 9. Dans les *Hieronymi Cardani Opera*, **4**, Lugduni M.DC.LXIII, p. 241—242.

4) *L'algebre de Iaqves Peletier du Mans departie en deus Liures* . . . A Lion. Par Iau de Tovrnes. M. D. LIIII . . ., p. 107—110. — *Iacobi Peletarii Cenomani, De occvlta parte nvmerorum, qvam algebram vocant, libri duo.* Parisiis, Apud Gulielmum Cauellat . . . 1560 . . ., f° 31 r° et v°.

de vin, les aunes de drap sont bien loin; il s'agit tout bonnement de la recherche de trois nombres.[1]) „Tenemos tres numeros“, dit-il, „que el primero con la mitad de los otros, haze 32; y el segundo con el tercio de los otros dos, haze 28; y el tercero con el quarto de los otros dos, haze 31; y queremos saber quanto es cada vno dellos?“

La solution de NUÑEZ, nous venons de le dire, est celle de CARDAN. Il y passe par des calculs analogues à ceux de l'algébriste italien, mais notablement plus courts et plus simples. Cependant ils ne le satisfont pas, aussi les termine-t-il par cette réflexion.[2]) „Pero nos auemos tratado este mismo exemplo, que es el caso 51, y lo practicamos muy facilmente, y breuemente por la cosa, sin vsar de la quantidad absoluta.“ Le problème 51 du chapitre 5 de la 3e partie[3]) est effectivement le même que celui qui nous occupe et il y est résolu au moyen d'une seule inconnue. Cette solution n'appelle pas de remarque; je n'y insiste pas.

Je suis loin d'avoir signalé tout ce que le *Libro de algebra* renferme de curieux, mais ce que j'en ai dit suffit à prouver sa haute valeur. C'est un ouvrage digne de l'estime dont il jouit au 16e siècle.

1) F° 224 v°. 2) F° 225 v°. 3) F° 169 v°—170 r°.

Sur l'auteur de l'„Histoire de la roulette" publiée par Blaise Pascal.

Par M. Stuyvaert à Gand.

Je voudrais présenter ici quelques observations que m'ont suggérées la lecture de certaines œuvres de B. Pascal et la comparaison que j'en ai faite avec l'exposé de M. Cantor dans le 2e tome de ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*.

En parlant de l'*Histoire de la Roulette*, M. Cantor dit (p. 883 de la 2e édition) que Pascal se fit l'interprète de Roberval qnand ce dernier accusa publiquement Torricelli de larcin scientifique. En d'autres termes, le jugement sévère que M. Cantor porte sur l'*Histoire de la Roulette* atteint Roberval autant que Pascal: tous deux ont, d'après lui, leur part de responsabilité dans cet écrit. Telle est aussi l'opinion de P. Tannery (*Pascal et Lalouvère;* Mém. de la soc. des sc. phys. et nat. de Bordeaux 5_3, 1889, p. 55—84) qui cite presque indifféremment Roberval ou Pascal comme auteur de l'*Histoire de la Roulette.*[1])

Je me demande s'il n'y a pas à faire un pas de plus, et si l'on ne doit pas attribuer à Roberval la rédaction proprement dite de la pièce intitulée *Histoire de la Roulette*, ou au moins d'une notable partie de cet écrit.

Bien que je n'attache qu'une importance relative à des détails de style, je note cependant, dans la pièce en question, les passages suivants (*Œuvres complètes* de Blaise Pascal III, Paris 1866, p. 337): „il espéra *de* tirer de lui la solution de la Roulette . . ."; et plus loin: „ce fut alors qu'il commença *de* l'appeler par ce nom tiré du grec . . .". Or Pascal ne se sert pas habituellement de ces expressions. Nous le voyons au con-

1) L'édition originale de cet écrit est anonyme et ne porte ni lieu ni année d'impression. Le titre est: *Histoire de la roulette Appellée autrement la trochoïde ov la cycloïde où l'on rapporte par quels degrez on est arriué à la connoissance de la nature de cette ligne.* L'écrit est composé de 8 pages in 8°; et à la fin se trouve le date: „ce 10me Octobre 1658". Il y a une édition latine avec le titre: *Historia trochoïdis siue cycloïdis, gallicè, la roulette. In qua narratur quibus gradibus ad intimam illius lineae naturam cognoscendam peruentum sit* Cette édition, qui est aussi anonyme et ne porte ni lieu ni année d'impression, contient 8 pages in 8°. La bibliothèque nationale de Paris possède les deux éditions.

traire écrire à M. Le Pailleur (ibid. p. 50) „j'espère vous faire voir . . ."; et, dans la *Suite de l'Histoire de la Roulette* (ibid. p. 354), „ce fut dans le mois de septembre qu'il commença *à* écrire . . .". Ainsi Pascal n'emploie pas la préposition *de* après les verbes *espérer* et *commencer*, au moins pas toujours; il est possible toutefois que l'on rencontre des exemples du contraire, notamment dans les *Provinciales*.

Lorsque je lis dans l'*Histoire de la Roulette* (ibid. p. 338): „on reçut leurs solutions presque en même temps, l'une de M. de Fermat . . ., l'autre de feu M. Descartes et toutes deux différentes de celle de M. de Roberval; de telle sorte qu'en les voyant toutes, il n'est pas difficile de reconnaître quelle est celle *de l'auteur;* car il est vrai qu'elle a un caractère tout particulier et qu'elle est prise par une voie si belle . . .", le mot que je viens de souligner doit désigner pour moi *l'auteur* du texte que j'ai sous les yeux, au moins si je m'en rapporte à l'usage actuel, mais au XVIIème siècle l'usage était sans doute différent, et le mot souligné doit désigner *l'auteur de la Roulette.* En tout cas ce passage présente une certaine obscurité que n'a pas d'ailleurs la version latine (ibid. p 344): „*ita tamen ut qui eas omnes videat, illico illius demonstrationem internoscat qui primus problema dissolvit*". La même obscurité se rencontre un peu plus loin, car je lis (ibid. p. 340): „je lui fis donc mander que cette voie de la première découverte était la quadrature que *l'auteur* avait trouvée . . .". C'est encore moi qui souligne le mot auteur désignant Roberval et remplacé dans le texte latin par Robervallius.

Ce sont là des arguments assez minces pour décider si Roberval a rédigé tout ou partie de l'*Histoire de la Roulette.* On peut avoir des raisons plus fortes de croire la chose quand on s'est habitué au style de B. Pascal: alors on a *l'impression* que le morceau n'est pas de lui. Mais une impression est quelque chose de personnel et de difficile à communiquer. Toutefois je ferai remarquer que Pascal, peut-être pour avoir trop usé du dilemme, avait contracté l'habitude, presque la manie de phrases à deux membres symétriques. Or des phrases de ce genre on n'en rencontre guère dans l'*Histoire de la Roulette,* tandis qu'elles abondent dans d'autres écrits, notamment dans la *Suite de l'Histoire de la Roulette,* d'où je tire les deux exemples suivants: (l. c. p. 353) „. . . s'il eût eu en main les méthodes et les démonstrations géométriques de la vérité, ce n'eût pas été par cette conformité qu'il se fût assuré de sa solution — mais qu'il en eût jugé plutôt, et de celle de M. de Roberval même par ses propres preuves . . ."; (ibid. p. 353—354) „. . . qu'il n'y a point assurément de déshonneur à n'avoir point résolu un problème, qu'il y a peu de gloire à y réussir — et qu'il y a beaucoup de honte à s'attribuer des inventions étrangères".

Sans doute on a prétendu, je le sais bien, qu'il n'est guère possible de distinguer l'un de l'autre, à leur style, les grands prosateurs du XVIIième siècle; mais, en disant cela, on a surtout en vue Pascal, Arnault, Nicole. En est-il de même de Roberval?

Que Pascal ait eu sous la main une note écrite de Roberval, ou que celui-ci lui ait donné ses renseignements de vive voix, la chose en somme n'importe pas tant. L'essentiel, comme M. Cantor le démontre, est que Pascal n'a pu prendre ses informations que chez Roberval. Un détail pourrait peut-être faire douter un instant: l'éloge que l'*Histoire de la Roulette* fait de Roberval est tellement outré que l'on pourrait hésiter à attribuer le texte à Roberval même, si l'on ne savait pas, d'autre part, que la vanité humaine est sans bornes.

Je ne pense pas que Pascal se soit jamais montré historien de mathématiques très érudit, et en 1658 il s'était depuis longtemps éloigné de l'étude des sciences exactes. Or il est remarquable combien l'*Histoire de la Roulette* est précise en ce qui concerne la quadrature de la cycloïde; elle cherche à établir la date de cette découverte (1636) avec un luxe de détails qui trahit encore Roberval. Par contre, en ce qui concerne la cubature du solide engendré par la cycloïde, et surtout la question des tangentes, on ajoute, sans grand appareil d'arguments, que ces deux problèmes furent résolus par Roberval *dans ce même temps*, et que „l'invention des touchantes se fit par une méthode qu'il trouva *alors* et qu'il divulgua *incontinent*". Ces locutions sont passablement élastiques et leur manque de précision serait un manque de bonne foi si, comme M. Cantor l'établit (l. c. p. 890), la méthode en question, qui est la composition des mouvements, n'a pu être appliquée par Roberval à la cycloïde qu'en 1639 au plus tôt.

Que les arguments invoqués par Roberval pour établir son droit de priorité soient valables ou non, je dois admettre que Pascal les a trouvés probants; rien ne m'autorise à douter de sa sincérité sur ce point. Mais alors, dans les *Problemata de Cycloïde* (l. c. III, p. 322), où il n'a cité que Galilée et Torricelli, il a, dans son esprit, fait tort involontairement à Roberval, son aîné, l'ami de son père, un des familiers de sa maison. Il peut avoir eu de regrets dans la suite; Roberval peut s'être plaint: le *post-scriptum* des *Réflexions sur les prix concernant la Cycloïde* (l. c. p. 333) semble l'écho de cette plainte et annonce une rectification.

Or les détails que Roberval donne pour établir son droit, sont trop nombreux et trop minutieux pour être transmis oralement. Rien d'impossible à ce que Pascal ait reçu de Roberval des renseignements écrits et qu'il ait, par scrupule de sincérité, respecté le texte de son ami.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1³: 12, 15, 22, 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162, 163—165, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 61—64.

1³: 163—165. Zu der Stelle in Platons *Timaeus* S. 32 B, die von den mittleren Proportionalen handelt, hat Herr Junge (BM 8_3, 1907, S. 64) bemerkt, daß die Stelle den Begriff des Irrationalen nicht enthält. Folgende Bemerkung betrifft dieselbe Stelle, aber eine andere Frage, nämlich die, wie Platon dazu kam zu behaupten, daß Flächen durch ein, Körper aber niemals durch ein, sondern immer durch zwei Mittelglieder verbunden werden. Herr Cantor erklärt diesen Ausspruch Platons in der dritten Auflage in derselben Weise wie in den früheren Auflagen. Die Flächen und Körper sollen nur als Zahlen angesehen werden können. Daraus zieht Herr Cantor Schlüsse auf die arithmetischen Kenntnisse der pythagoreischen Schule und Platons. Ich glaube in meiner von Herrn Cantor nicht erwähnten Abhandlung *Über zwei Stellen in Platons „Timaeus" und im Hauptwerke von Coppernicus* (Jahresber. der Fürstenschule zu Grimma 1898) nachgewiesen zu haben, daß die Stelle nicht arithmetisch, sondern durch Bezugnahme auf das delische Problem erklärt werden muß. Ist dies zutreffend, so sind die erwähnten Schlüsse nicht mehr berechtigt. Z. B. darf man dann die Stelle nicht mehr als Beweis dafür ansehen, daß Platon die Sätze Euklid VIII: 11—12 gekannt habe.

Aber selbst wenn Herr Cantor die arithmetische Deutung beibehalten wollte, möchte in der Erläuterung manches anders gestaltet sein. Die *Timaeus*-Stelle hat eine Anzahl eingehender Untersuchungen veranlaßt, von denen Herr Cantor nur die von Martin und Hultsch anführt. Seine Erklärung schließt sich an Martin an, der beim Einschieben der zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei Größen die Proportionen nicht in der *stetigen* Form schreibt, die durch die Worte Platons verlangt wird: Feuer zu Luft wie Luft zu Wasser und Luft zu Wasser wie Wasser zu Erde. Auf die unrichtige Ansetzung der Proportionen hat Boeckh in seinem *Excursus* (1865), neuerdings wieder Herr Junge hingewiesen (*Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* Sonderabdruck, Halle 1907, S. 16). Es ist allerdings anzuerkennen, daß Herr Cantor

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

dieselbe Größe der geometrischen Mittel erhält wie bei der richtigen Einschiebung. Da er nämlich mit MARTIN als Faktoren der Flächen- und Körperzahlen nur Primzahlen zuläßt (eine Beschränkung, die nach meiner Meinung nicht begründet werden kann), so ergibt sich die von MARTIN nicht beachtete, von KÖNITZER (1846) erkannte Notwendigkeit, als Größen, zwischen denen Mittel einzuschieben sind, nur Quadrate und Kuben zu nehmen. Das tut Herr CANTOR und verbessert so die Darstellung MARTINS wesentlich, weil es unter diesen Bedingungen in der Tat zwischen Flächenzahlen nur ein, zwischen Körperzahlen immer nur zwei rationale Mittel gibt, und zwar auch in der MARTIN-CANTORschen Schreibweise der Proportionen, die freilich dadurch noch nicht gerechtfertigt ist.

TH. HÄBLER.

1^3 : 165. Der Bericht über ARCHYTAS' Satz und Beweis ist mißlungen; $\frac{n}{n+1}$ ist nicht ein Epimorion. Unter Benutzung der CANTORschen Bezeichnungen kann der Beweis des ARCHYTAS auf folgende Weise wiedergegeben werden. Nach der Definition (vgl. BOETII Arithmetik I : 24: „superparticularis est numerus ad alterum comparatus, quotiens habet in se totum minorem et eius aliquam partem") ist der Nenner ν des Bruches $\frac{\mu}{\nu}$ durch $\mu - \nu$ teilbar, und da $\mu = \nu + (\mu - \nu)$, so muß, wenn man $\mu - \nu = \delta$ setzt, sowohl μ als ν durch δ teilbar sein. Aber nach der Annahme sind μ und ν relative Primzahlen, also ist $\delta = 1$, oder $\mu = \nu + 1$, was zu beweisen war.

Übrigens ist für ARCHYTAS dieser Satz nur ein Hilfssatz. Was er eigentlich beweisen will, ist nämlich, daß, wenn α ein Epimorion und β das entsprechende Hypo-Epimorion ist, so gibt es keine ganze Zahl $\varkappa$ zwischen α und β, die so beschaffen ist, daß $\alpha : \varkappa = \varkappa : \beta$ ist (vgl. BOETII Musik IV : 2).

G. ENESTRÖM.

1^3 : 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183, 203, 213, 225, 236, 245, 270, 287, 297, 298, 310, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 64—66.

1^3 : 335. Wenn Herr CANTOR sagt (Z. 9—11): „daß auch jene [d. h. EUKLIDES und ARCHIMEDES] schon alle Kegelschnitte auf jedem Kegel hervorzubringen imstande gewesen seien, ist eine Behauptung, welche auf keinerlei alten Bericht sich stützt", so hat er ganz gewiß recht. Wenn er aber behauptet, daß APOLLONIOS in dieser Beziehung „das vervollständigte, was EUKLIDES und ARCHIMEDES nur von der Ellipse wußten", so geht er zu weit. Aus der von EUTOKIOS aufbewahrten Angabe des GEMINOS, die den Ausdruck: ὕστερον Ἀπολλώνιος καθόλου τι ἐθεώρησεν enthält, darf man nicht mit Bestimmtheit folgern, daß kein einziger Mathematiker vor APOLLONIOS die fragliche Beobachtung gemacht hatte, sondern nur, daß GEMINOS keine ältere Schrift als die des APOLLONIOS kannte, wo gelehrt wurde, wie man alle Kegelschnitte auf jedem Kegel hervorbringen konnte. Außerdem scheint es, als ob GEMINOS keine eingehende Kenntnis der Geschichte der Kegelschnitte vor APOLLONIOS gehabt hätte. Zuerst gibt er an, was die Alten gewußt hatten, und erwähnt dann, daß APOLLONIOS „später" die allgemeinere Konstruktion bemerkte. Ob „die Alten" alle Mathematiker vor APOLLONIOS und „später" wirklich „zuerst" bedeutet, ist meines Erachtens unmöglich genau festzustellen. Statt: „was

EUKLIDES und ARCHIMEDES nur von der Ellipse wußten" ist also: „was EUKLIDES und ARCHIMEDES, soweit bekannt ist, nur in betreff der Ellipse angegeben hatten" zu setzen.

Selbstverständlich wäre die Kenntnis von Interesse, ob nicht wenigstens ARCHIMEDES wirklich wußte, daß man alle Kegelschnitte auf jedem Kegel hervorbringen kann. Wenn Herr CANTOR dies in Abrede stellt, so ist wohl der Grund dazu, daß sich seines Erachtens ein ungeheuerer Unterschied („une immense différence") zwischen dem allgemeinen Fall und dem von ARCHIMEDES angegebenen Spezialfall vorfindet (siehe M. CANTOR, *M. Zeuthen et sa géométrie supérieure de l'antiquité;* Bullet. d. sc. mathém. 19_2, 1895, S. 67). Meiner Ansicht nach kann der Unterschied für einen Mathematiker ersten Ranges wie ARCHIMEDES nicht besonders erheblich gewesen sein (vgl. die Bemerkung zu 1^3: 310, BM 8_3, 1907/8, S. 66), und die Frage ist nur, ob ARCHIMEDES irgendeinen Anlaß gehabt hat, sich mit den allgemeinen Fall zu beschäftigen. Aber auf diese Frage dürfte es zurzeit unmöglich sein, eine bestimmte Antwort zu bekommen.

G. ENESTRÖM.

1^3: 335. Vgl. die Bemerkung zu 1^3: 310 (BM 8_3, 1907/8, S. 66).

1^3: 339—340. Es ist sehr erfreulich, daß Herr CANTOR hier in der dritten Auflage einige Notizen zur Geschichte des vom historischen Gesichtspunkte aus wichtigen Problems des „Ortes zu drei oder vier Geraden" bringt, worauf freilich ZEUTHEN in einer schon acht Jahre vor dem Erscheinen der zweiten Auflage veröffentlichten Arbeit aufmerksam machte.

Dagegen bin ich weniger mit dem Schluß des betreffenden Absatzes der dritten Auflage der *Vorlesungen* einverstanden. Nachdem Herr CANTOR die fraglichen Notizen nach APOLLONIOS und PAPPOS mitgeteilt hat, fügt er hinzu (S. 340): „Das ist alles, was aus alten Quellen bekannt ist. Wenn man nun versucht hat, jenes Ortsproblem unter Zugrundelegung des III. Buches des APOLLONIUS vollständig zu erledigen, so kann man in diesem Wiederherstellungsversuche die ganze geometrische Begabung seines Verfassers bewundern, aber ein geschichtliches Ergebnis ist es darum keineswegs". Ich gebe gern zu, daß diese Bemerkung buchstäblich richtig ist, aber es kann nicht der Aufmerksamkeit des Herrn CANTOR entgangen sein, daß seine *Vorlesungen* nicht nur geschichtliche Ergebnisse, sondern außerdem eine überaus große Anzahl von mehr oder weniger wahrscheinlichen Schlußfolgerungen aus solchen Ergebnissen enthalten, und da nicht einmal ZEUTHEN selbst behauptet hat, daß seine Lösung des allgemeinen Problems ein geschichtliches Ergebnis im beschränktesten Sinne sei, so muß die Bemerkung des Herrn CANTOR als durchaus gegenstandslos und darum leicht irreleitend betrachtet werden. Auf der anderen Seite verschweigt Herr CANTOR einen Umstand, der meiner Ansicht nach fast den Wert eines geschichtlichen Ergebnisses besitzt, nämlich daß es Herrn ZEUTHEN gelungen ist, gerade auf Grund der drei letzten Sätze des 3. Buches des APOLLONIOS das Ortsproblem zu lösen für einen gewissen Spezialfall (die vier gegebenen Geraden bilden ein Paralleltrapez), und zwar auf eine sehr einfache Weise, deren Auffindung kaum eine besonders große geometrische Begabung erfordert, wenn die drei Sätze schon vorliegen. Stellt man nämlich diesen Umstand mit

dem Vorworte des Apollonios zusammen, kann man kaum umhin zuzugeben, daß dieser das Problem wenigstens für den erwähnten Spezialfall gelöst hat. Ferner hat Zeuthen gezeigt, daß man durch die Hilfsmittel, die schon vor Apollonios bekannt waren, das allgemeine Problem auf die Lösung des Spezialfalles reduzieren kann, und meiner Ansicht nach verdiente auch dieser Umstand in den *Vorlesungen* erwähnt zu werden. Möglicherweise hat Apollonios den allgemeinen Fall in seiner verlorenen Schrift über den bestimmten Schnitt („de sectione determinata") behandelt (vgl. H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896, S. 215).

G. Eneström.

1³ : 344. Die Angabe, daß eine von Proklos erwähnte Schrift des Apollonios *περὶ τοῦ κοχλίου* (über die Schraube) „von gänzlich unbekanntem Inhalte" ist, konnte sicherlich 1880 sehr verzeihlich sein, aber in einer Arbeit mit dem Druckjahre 1907 ist die Angabe ein wenig auffällig. Schon 1881 bemerkte Paul Tannery (*Quelques fragments d'Apollonius de Perge;* Bullet. d. sc. mathém. 5_2, 1881, S. 125), indem er teils auf Proklos, teils auf eine Stelle bei Pappos hinwies: „Il est donc clair que l'écrit cité par Proclus renfermait au moins la théorie géométrique de l'hélice", und die Richtigkeit dieser Bemerkung kann wohl kaum bezweifelt werden. Etwa gleichzeitig mit Tannerys obenerwähntem Artikel fügte J. L. Heiberg in seine Apollonius-Ausgabe (II, S. 117—118) die betreffenden Stellen aus Proklos und Pappos ein. Seitdem haben auch andere Fachgenossen darauf aufmerksam gemacht, daß Apollonios in der fraglichen Schrift offenbar die Schraubenlinie behandelt hat (siehe z. B. G. Loria, *Il periodo aureo della geometria greca*, Modena 1895, S. 196; K. Tittel, *De Gemini studiis mathematicis*, Leipzig 1895, S. 66).

G. Eneström.

1³ : 344. Außer den von Herrn Cantor erwähnten geometrischen Schriften des Apollonios gab es noch eine elementargeometrische Arbeit, die ebenfalls verloren gegangen ist. Die Aufschlüsse, die Proklos über diese Arbeit bringt, hat P. Tannery (*Quelques fragments d'Apollonius de Perge*; Bullet. d. sc. mathém. 5_2, 1881, S. 124—136) zusammengestellt und erläutert. Nach J. G. van Pesch (*De Procli fontibus*, Leiden 1900, S. 143) hatte Proklos wahrscheinlich die Arbeit selbst zur Hand.

G. Eneström.

1³ : 348. Es scheint mir nicht ganz ohne Interesse zu sein, hier ausdrücklich hervorzuheben, daß Proklos (*In primum Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. Friedlein, Leipzig 1873, S. 74) die Arbeit des Apollonius über ungeordnete Irrationalgrößen erwähnt (*τὰ περὶ τῶν ἀτάκτων ἀλόγων, ἃ ὁ Ἀπολλώνιος ἐπὶ πλέον ἐξειργάσατο*). Wie es jetzt steht, ist es nicht klar, was Herr Cantor mit den zwei parenthetischen Zusätzen „*τεταγμένος* des Proklus" und „*ἄτακτος*" meint.

G. Eneström.

1³ : 351, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 66.

1[3] : 365. Warum es nicht anzunehmen ist, daß POSEIDONIOS von Alexandria ein Werk verfaßt habe, worin die von HERON zitierte physikalische Definition vorkommen könnte, ist mir nicht recht verständlich, aber jedenfalls ist diese Frage von untergeordneter Bedeutung. Wichtiger ist dagegen die Frage, ob HERON wirklich POSEIDONIOS von Rhodos gemeint haben kann. Nach der Ansicht des Herrn CANTOR ist dies „wohl möglich", aber aus den von R. MEIER (*De Heronis aetate*, Leipzig 1905, S. 20—21) angeführten Gründen scheint es mir höchst unwahrscheinlich, daß HERON an der fraglichen Stelle von POSEIDONIOS von Rhodos spricht. Der von HERON erwähnte POSEIDONIOS scheint nämlich vor ARCHIMEDES gelebt zu haben und jedenfalls bezeichnet seine Definition einen unvollkommeneren Standpunkt als den des ARCHIMEDES. Will man nicht annehmen, daß sich die Stelle auf POSEIDONIOS von Alexandria bezieht, so muß man meines Erachtens an einen dritten POSEIDONIOS denken, der jedenfalls vor ARCHIMEDES gelebt hat. G. ENESTRÖM.

1[3] : 368. Der von EUTOKIOS in seinem Kommentar zu *De sphaera et cylindro* (siehe ARCHIMEDES, *Opera*, ed. J. L. HEIBERG III, Leipzig 1881, S. 140) erwähnte, sonst durchaus unbekannte HERONAS, der nach EUTOKIOS einen Kommentar zu NIKOMACHOS' Arithmetik verfaßt hat, ist möglicherweise identisch mit dem HERUNDES oder HEROMIDES, den ANARITIUS in seinem Kommentar zu den Elementen zitiert (siehe *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii*, ed. M. CURTZE, Leipzig 1899, S. 3—4). Auf diese Möglichkeit hat übrigens auch CURTZE an der soeben erwähnten Stelle hingewiesen.

G. ENESTRÖM.

1[3] : **380**, siehe BM **8**[3], 1907/8, S. 66—67.

1[3] : 388. Wenn Herr CANTOR hier Z. 21—30 gewisse Umstände erwähnt, und dann die Bemerkung hinzufügt, daß diese Umstände einander gegenseitig als Stütze zu dienen geeignet sind, so setzt diese Bemerkung voraus, teils daß die sogenannten HERONschen Definitionen und die von HULTSCH herausgegebene Geometrie echt sind, teils daß der POSEIDONIOS, der in HERONS Mechanik erwähnt wird, wirklich POSEIDONIOS von Rhodos ist. Aber die Richtigkeit dieser Voraussetzungen ist zum mindesten sehr unsicher (vgl. oben die Bemerkung zu **1**[3] : 365), und dadurch verliert eigentlich der ganze Passus seine Bedeutung. Jedenfalls ist es ungenau zu sagen, daß „POSIDONIUS von Rhodos . . . in HERONS Mechanik vorkommt", da Herr CANTOR selbst S. 365 dies Vorkommen nicht als eine Tatsache, sondern nur als „wohl möglich" bezeichnet hat.

G. ENESTRÖM.

1[3] : 406. Der Ansicht, daß die Abhandlung von K. TITTEL *De Gemini studiis mathematicis* (1895) über das mathematische Werk des GEMINOS ziemlich abschließend ist, dürften weder die Philologen noch die Historiker der Mathematik beipflichten, und vermutlich beansprucht Herr TITTEL selbst gar nicht, daß seine, freilich sehr dankenswerte Abhandlung als ziemlich abschließend betrachtet werden soll; ihr vollständiger Titel lautet: *De Gemini stoici*

studiis mathematicis quaestiones philologae. Über die Ansicht eines sachkundigen Philologen siehe Wilhelm Schmidt, *Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker* (1890—1901); Jahresber. üb. d. Fortschr. d. class. Altertumswiss. **108**, 1901, S. 99. Die wichtige Frage, ob der Aganis des Anaritius mit Geminos identisch ist, und, wenn dies wirklich der Fall ist, welche Folgerungen man daraus ziehen kann in betreff des mathematischen Werkes des Geminos, wird in der Abhandlung von Tittel nicht behandelt.

G. Eneström.

1³ : 409. Wie Herr Cantor bei der Bearbeitung der 3. Auflage der *Vorlesungen* dazu gekommen ist, Z. 25—26 nach Posidonius die Worte: „der wiederholt durch Heron erwähnt worden ist" einzufügen, ist mir nicht recht verständlich. In den Heronschen Schriften kommt meines Wissens der Name Poseidonios nur ein einziges Mal vor, und dort handelt es sich höchstwahrscheinlich nicht um Poseidonios von Rhodos, sondern um einen anderen Poseidonios, der vor Archimedes gelebt hat (vgl. oben die Bemerkung zu **1³ : 365**). In ein paar höchstwahrscheinlich unechten Schriften von Heron kommen freilich Sätze vor, die sehr wohl von Poseidonios von Rhodos herrühren könnten, aber, soviel ich weiß, wird der Name Poseidonios dabei gar nicht genannt. Daß der von Anaritius zweimal erwähnte Abthiniatus mit Poseidonios identisch sein kann, will ich nicht in Abrede stellen, aber es wäre wohl fast zu kühn, zu behaupten, daß die zwei fraglichen Stellen, die Anaritius nach seiner eigenen Aussage aus Simplikios entnommen hat, ursprünglich in dem jetzt verlorenen Kommentar des Heron standen.

G. Eneström.

1³ : 410. Unter Bezugnahme auf eine Bemerkung von K. Tittel (*De Gemini studiis mathematicis*, Leipzig 1895, S. 65—66) hat Herr Cantor hier Z. 32—33 die Worte: „wenn sie [= die Entdeckung] wirklich ihm [Geminus] zuzuschreiben ist, woran eine spätere Stelle bei Proklos wieder zweifeln läßt" eingefügt. Meines Erachtens wäre es besser gewesen, den ganzen Bericht (12 Druckzeilen) über die „Entdeckung" zu streichen, denn teils ist der betreffende Satz ziemlich belanglos, teils sagt Proclus nur, daß sich der Beweis derselben bei Geminos findet. Außerdem handelt es sich um die Schraubenlinie, und da Herr Cantor diese Raumkurve hier zum erstenmal erwähnt, so kann der Leser leicht glauben, daß Geminos, soweit jetzt bekannt ist, diese Kurve zuerst behandelt hat. Aber in Wirklichkeit ist dieselbe schon von Apollonios untersucht worden (vgl. oben die Bemerkung zu **1³ : 344**), und wenn man mit Herrn Cantor Heron vor Geminos setzt, so hatte dieser in betreff des fraglichen Gegenstandes noch einen Vorgänger (vgl. Herons Mechanik, Ausg. von L. Nix, Leipzig 1901. S. 104—106).

G. Eneström.

1³ : 429, 431, 432, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67.

1³ : 432. Nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn J. L. Heiberg beruht die in einer früheren Bemerkung (BM 8_3, 1907/8, S. 67) zitierte Angabe von P. Ramus sicherlich auf einem Gedächtnisfehler oder auf einer Verwechselung. Im Kataloge der Bibliothek des Diego de Hurtado de Mendoza

findet sich nämlich keine Handschrift von NIKOMACHOS' Geometrie, wohl aber die arithmetische Schrift und die Sammlung der griechischen Arbeiten über Musik mit Einschluß der Harmonik des NIKOMACHOS. G. ENESTRÖM.

1^3 : 433. Die bestimmte Angabe, daß OCREATUS ein „Schriftsteller des XII. S." war, ist etwas auffallend, da Herr CANTOR S. 906 teils keinen Grund angibt, warum OCREATUS in das 12. Jahrhundert zu setzen ist, sondern vielmehr hervorhebt, daß die Form „Baiotensem" auf einen im übrigen unbekannten ATELHART von Bayeux hinweist, teils bemerkt, daß die Pariser Handschrift, wo sich der Traktat des OCREATUS findet, aus dem 13. Jahrhundert stammt. Hier, wie in vielen ähnlichen Fällen, muß man die Erklärung in der ersten Auflage der *Vorlesungen* suchen. Dort gab Herr CANTOR nämlich (S. 777) ausdrücklich an, daß der Lehrer des OCREATUS ATELHART VON BATH war; in die zweite Auflage schaltete er indessen (S. 852) drei Zeilen ein, wodurch diese Angabe als höchst unsicher hingestellt wird, aber ohne den Wortlaut der ersten Stelle, wo OCREATUS erwähnt wird, zu ändern. Vgl. unten die Bemerkung zu 1^3 : 906.

Wahrscheinlich beruht der Name „regula NICOMACHI" darauf, daß BOËTIUS, der den Satz $a^2 = (a - d)(a + d) + d^2$ im zweiten Buche (Satz 43) seiner *Institutio arithmetica* aufgeführt und bewiesen hat, dabei bemerkt (ed. FRIEDLEIN, Leipzig 1867, S. 143): „illud quoque subtilius, quod multi huius disciplinae periti nisi NICOMACHUS nunquam antea perspexerunt". Der Satz findet sich auch in JORDANI *Arithmetica* (Satz 3 des 10. Buches), aber ohne daß NIKOMACHOS erwähnt wird. G. ENESTRÖM.

1^3 : 452. Hier wäre ein Verweis auf S. 339—340 erwünscht, und dies um so mehr, weil das Register unter dem Stichworte „Aufgabe des PAPPUS" keine vorangehende Stelle angibt, wo die Aufgabe erwähnt wird (diese Stelle muß man im Register unter dem Stichworte „Ort zu 3 oder 4 Geraden" suchen). Daß „seit DESCARTES die Aufmerksamkeit der Mathematiker aufs neue auf sie gelenkt, der Name der Aufgabe des PAPPUS vorzugsweise geblieben ist", ist wohl nicht unrichtig, aber es liegt sehr nahe, die Bemerkung so aufzufassen, als ob der Name von DESCARTES herrührte, oder wenigstens sehr alt wäre. Bei DESCARTES kommt meines Wissens kein besonderer Name vor, denn seine Randanmerkung „Réponse à la question de PAPPUS" besagt ganz wie die Randbemerkung „Exemple tiré de PAPPUS" nur, daß er die Frage aus PAPPOS entnommen hat. Auch nicht bei NEWTON (siehe *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Editio ultima, Amsterdam 1723, S. 70) habe ich den Namen gefunden, und nach ZEUTHEN rührt er von CHASLES her. ZEUTHEN selbst benutzt nicht den Namen „Aufgabe des PAPPUS".

G. ENESTRÖM.

1^3 : 464. Das „positive Zeugnis" des ABULFARADSCH, DIOFANTOS sei Zeitgenosse des Kaisers JULIANUS gewesen, dürfte kaum die geringste Bedeutung haben. P. TANNERY hat in seinem Artikel *A quelle époque vivait DIOPHANTE?* (Bullet. d. sc. mathém. 3_2, 1879, S. 264) hervorgehoben, daß ABULFARADSCH allem Anscheine nach den Mathematiker DIOFANTOS mit einem bekannten Sophisten dieses Namens, der wirklich ein Zeitgenosse des JULIANUS war, verwechselt hat. G. ENESTRÖM.

1³: 488, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67.

1³: 498. Die Angaben: „Proklus hat also wirklich zu allen Büchern der euklidischen Elementen, wenige ausgenommen, einen Kommentar verfaßt" [Z. 17—19] und „Die Scholien des Proklus zu späteren Büchern hat C. Wachsmuth entdeckt" [Fußnote 3] dürften zu kategorisch sein. In seiner von Herrn Cantor S. 499 zitierten Arbeit weist Heiberg darauf hin, daß das Wort **προλαμβανόμενα** im Titel der von Wachsmuth aufgefundenen Scholiensammlung eher bedeutet, daß nur die Scholien zum ersten Buche von Proklos herrühren; und er bemerkt außerdem, daß der Zweifel, ob Proklos seinen Kommentar wirklich fortgesetzt hat, durch das vollständige Stillschweigen aller Quellen von einer solchen Fortsetzung im höchsten Grade gesteigert wird, und daß die Frage auch nicht nach dem von Wachsmuth veröffentlichten Material als erledigt betrachtet werden kann. Dieselbe Ansicht vertritt auch J. G. van Pesch (*De Procli fontibus*, Leiden 1900, S. 56—57). Später hat Heiberg selbst ein Scholium zu Elem. X: 9 aufgefunden (siehe *Paralipomena zu Euclid*; Hermes **38**, 1903, S. 341), worin Proklos als Gewährsmann ausdrücklich genannt wird, aber diesen Umstand betrachtet Heiberg nicht als entscheidend, und er ist nur damit einverstanden, daß die Wachsmuthschen Scholien zu den übrigen Büchern der Elemente aus Proklos exzerpiert sein können. Dagegen ist Wachsmuths Schüler R. Meier (*De Heronis aetate*, Leipzig 1905, S. 27—28) der Ansicht, daß diese Scholien wirklich Proklos zuzuweisen sind. Jedenfalls ist die Frage noch als ein Streitpunkt zu bezeichnen, und die bestimmten Angaben des Herrn Cantor sind um so irreleitender, weil er dabei auf keine spätere Schrift als die Heibergsche aus dem Jahre 1882 verweist.

G. Eneström.

1³: 500, 502, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67.

1³: 503—504. Mit Recht hebt A. von Braunmühl in seiner Besprechung der neuen Auflage der *Vorlesungen* (Deutsche Literaturzeitung **28**, 1907, Sp. 2102) hervor, daß die Aufgabe des Geschichtschreibers der Mathematik nicht darin besteht, alle die unbedeutendsten Einzelheiten anzuführen, die im Laufe der Jahrhunderte ans Tageslicht traten. Von diesem Standpunkt ist es also zu beanstanden, daß Herr Cantor 25 Zeilen verwendet, um eine apokryphische Geschichte in betreff des winzigen Mathematikers Filoponos ausführlich zu erzählen (21 Zeilen) und dann kurz zu widerlegen (4 Zeilen).

G. Eneström.

1³: 504. Wir besitzen seit einigen Jahren ein Aktenstück, woraus hervorgeht, daß die Rechnung mit ägyptischen Stammbrüchen schon im 5. Jahrhundert den griechischen Mathematikern in Alexandria geläufig war. Dies Aktenstück, das von einem gewissen Paterios herrührt, ist uns von Proklos aufbewahrt worden; veröffentlicht wurde es von W. Kroll im 2. Bande von *Procli in Platonis rem publicam commentarii* (Leipzig 1901, S. 40—42) zusammen mit einem Kommentar von F. Hultsch (S. 409—412). Es handelt sich um die Berechnung von gewissen Längen x, y, z, s, t, u, v, die so beschaffen sind, daß

$$5:4=4:x,\quad 5:3=3:y,\quad x:z=z:y,\quad 4:x=x:s,\quad 4:z=z:t,$$
$$3:z=z:u,\quad 3:y=y:v,$$

und Paterios findet, daß

$$x=3\frac{1}{5},\quad y=1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{20},\quad z=2\frac{1}{3}\,\frac{1}{15},\quad s=2\frac{1}{2}\,\frac{1}{20}\,\frac{1}{100},\quad t=1\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}\,\frac{1}{25},$$
$$u=1\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}\,\frac{1}{50},\quad v=1\frac{1}{15}\,\frac{1}{75}.$$

Aus der Art, wie die Größen x, y, z, s, t, u, v gebildet wurden, folgt, daß

$$x+y=5,\quad s+t=4,\quad u+v=3,$$

und Paterios weist nach, daß die gefundenen Zahlen diesen Bedingungen genügen.

G. Eneström.

1^3 : 509, 510, 513, 515, 528, 545, 563—564, 576, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67—70.

1^3 : 576. In betreff der verschollenen Astronomie des Boetius bemerke ich, daß sich nach Houzeau und Lancaster (*Bibliographie générale de l'astronomie* **1**, Bruxelles 1887, S. 458) eine Handschrift derselben aus dem 9. Jahrhundert in der Klosterbibliothek in St. Gallen finden würde. Bevor die Richtigkeit der Angabe bestätigt worden ist, muß sie allerdings als sehr verdächtig betrachtet werden.

G. Eneström.

1^3 : 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704, 706, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70.

1^3 : 706. Ein weiterer Beleg dafür, daß im christlichen Mittelalter die Form Archimenides gewöhnlich war, und daß also eine Schrift, die diese Form enthält, gar nicht eine arabische Quelle gehabt haben **muß**, bietet die *Geometria speculativa* des Bradwardin. Dort findet sich z. B. folgender Passus: „hoc ut habetur ab eodem Archimenide in praedicto libello" (siehe M. Chasles, *Geschichte der Geometrie* übertragen durch L. A. Sohncke, Halle 1839, S. 613).

G. Eneström.

1^3 : 713, 715—716, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70

1^3: 715—716. Herr Suter hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß die Identität sowohl des „alius liber arithmeticus" als des „liber" mit der Algebra Alkhwarismis noch besser belegt wird, wenn man bzw. auf die Stellen (S. 5 und 21 der Rosenschen Übersetzung): „and that any number may be divided into units" und: „Whenever one number is to be multiplied by another, the one must be repeated as many times as the other contains units" hinweist. Besonders die zweite Stelle dürfte für die Frage durchaus entscheidend sein. In der von Libri veröffentlichten lateinischen Übersetzung lautet diese Stelle: „unus omnium duorum numerorum quorum unus in alterum multiplicatur, duplicatur secundum quantitatem unitatum que est in altero".

Hinzuzufügen ist noch, daß in einer Handschrift (Cod. S. Marco Florent. 216 Bl. 80ᵃ) die Übersetzung von Alkhwarismis Algebra ausdrücklich als „Liber de numero" bezeichnet wird.

G. Eneström.

1^3: 717, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71.

1^3: 717. Was Herr Cantor hier über das Multiplikationsverfahren bei den Arabern sagt, kann sehr wohl an sich richtig sein, aber durch den Verweis auf S. 610—611 muß der Leser irregeleitet werden. Die Angabe S. 717: „das Produkt wird jeweil über die betreffende Ziffer des Multiplikandus geschrieben“ ist nämlich nur dann richtig, wenn die untere Zahl Multiplikandus genannt wird; dagegen entspricht die Angabe S. 611: „das Produkt erscheint über dem Multiplikandus oder gar statt dessen, da man auch wohl so weit geht, die Ziffern des Multiplikandus selbst wegzulöschen“ dem Verfahren der Araber, nur wenn die obere Zahl Multiplikandus genannt wird, denn die untere Zahl wurde nicht weggelöscht. Unter solchen Umständen ist es natürlich unmöglich, daß der nicht sachkundige Leser aus der Cantorschen Darstellung herauslesen kann, wie die Araber bei der Multiplikation verfuhren. Nun wurde aber dies Verfahren wesentlich von den Algorithmikern des christlichen Mittelalters (ich sehe dabei von Leonardo Pisano ab) angewendet, und es kann darum von Interesse sein, eine genaue Auseinandersetzung des Verfahrens zu geben. Dabei ist es angebracht, die untere Zahl Multiplikandus zu nennen, wie Herr Cantor ohne Zweifel S. 717 getan hat, denn in Wirklichkeit spielte bei den Arabern diese Zahl die Rolle unseres Multiplikandus. Allerdings scheint im christlichen Mittelalter gewöhnlich die obere Zahl „numerus multiplicandus“ (oder „multiplicatus“) genannt worden zu sein, während die untere Zahl den Namen „numerus multiplicans“ bekam (nur in der von Curtze herausgegebenen alten Algorismusschrift wird die untere Zahl „multiplicandus“ genannt).

Bei Alkhwarismi kommt (*Algorithmi de numero indorum*, ed. Boncompagni, Rom 1857, S. 10—12) das Beispiel 2326 × 214 = 497764 vor. Die Ausrechnung selbst wird nicht gegeben, aber die Regeln sind so deutlich, daß man daraus wesentlich die ganze Rechnung wiederherstellen kann (vgl. G. Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen*, Erlangen 1869, S. 133). Alkhwarismi nimmt als Multiplikandus (der Term selbst kommt freilich nicht bei ihm vor) die kleinere Zahl 214 und schreibt die zwei Zahlen so, daß die Einheitsziffer des Multiplikandus unter der höchsten Ziffer des Multiplikators steht, also auf folgende Weise $\begin{array}{l}2326\\214.\end{array}$ Dann multipliziert er diese Ziffer von links nach rechts mit den drei Ziffern des Multiplikandus und setzt die Einheitsziffer jeden Produktes über die entsprechende Ziffer des Multiplikandus. Da Alkhwarismi nicht ausdrücklich angibt, daß die Ziffern des Multiplikators weggelöscht werden sollen, so ist es wohl möglich, daß er, wie Friedlein (a. a. O.) annimmt, die Ziffern der Produkte etwas höher setzte, wodurch man das folgende Bild bekommen würde $\begin{array}{l}428\\2326.\\214\end{array}$ Da aber die ältesten lateinischen Algorismusschriften (darunter auch der *Liber algorismi de pratica arismetrice*) ziemlich einstimmig vorschreiben, daß die Ziffern der Produkte unmittelbar über die entsprechenden Ziffern des Multiplikandus gesetzt und die unnötigen Ziffern des Multiplikators allmählich weggelöscht werden sollen, so ist es wohl höchstwahrscheinlich, daß das Bild $\begin{array}{l}428326\\214\end{array}$ dem Verfahren Alkhwarismis entspricht.

Jetzt rückt er den Multiplikandus 214 um eine Stelle nach rechts, so daß die Aufstellung $\begin{matrix}428326\\214\end{matrix}$ wird, und multipliziert die zweite Ziffer 3 des Multiplikators mit den drei Ziffern des Multiplikandus. Ob die neuen Teilprodukte sofort mit den entsprechenden Ziffern der Zahl 428 zusammengelegt werden oder vorläufig über diese geschrieben werden sollen, ersieht man nicht mit Sicherheit aus dem Texte, aber vermutlich benutzte ALKHWARISMI das erste Verfahren, ganz wie seine Nachfolger im christlichen Abendlande, und man bekommt also das Bild $\begin{matrix}492226\\214\end{matrix}$. Auf dieselbe Weise verfährt ALKHWARISMI in betreff der zwei übrigen Ziffern des Multiplikators und bekommt dadurch zuletzt das Bild $\begin{matrix}497764\\214\end{matrix}$, wo die obere Zahl das gesuchte Produkt ist. Hätte man dagegen keine Ziffern weggelöscht und die Teilprodukte nicht sofort zusammengelegt, so würde sich das letzte Bild auf folgende Weise gestaltet haben:

1
4
122
6326
428284
2326
214.

so daß man zuletzt die Addition der Einzelprodukte auszuführen hätte, um das Produkt 497764 zu bekommen.

Vergleicht man das jetzt auseinandergesetzte Verfahren mit dem unsrigen, so sieht man leicht, daß der wesentliche Unterschied darin besteht, daß die Araber nicht rechts wie wir, sondern links begannen; die ursprüngliche Aufstellung sowie die Verschiebung des Multiplikandus nach rechts ist nämlich dadurch bedingt und dient nur dazu, die Stellen der einzelnen Teilprodukte zu bestimmen. Aber daß man ursprünglich die Ausrechnung links begann, beruhte offenbar darauf, daß man die unnötigen Ziffern des Multiplikators weglöschte, und das Verfahren war in diesem Falle sehr zweckmäßig, weil man nur zwei Zeilen in Anspruch zu nehmen brauchte. Daß das Verfahren auch beibehalten wurde, nachdem das Weglöschen unnötiger Ziffern unmöglich war, ist dagegen nur als eine Wirkung der „vis inertiae" zu erklären.

G. ENESTRÖM.

1^2 : 718, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71.

1^3 : 719. Außer der in der Fußnote 1) genannten Übersetzung, die wahrscheinlich von GHERARDO CREMONESE herrührt (vgl. was Herr CANTOR weiter unten S. 803 und 908 bemerkt), gibt es eine andere von ROBERTUS CASTRENSIS, die uns im Cod. Vindob. 4770 Bl. 1—12^b, sowie im Cod. Dresd. C 80 Bl. 340^a—348^b aufbewahrt worden ist (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, S. 90). Diese Übersetzung ist von besonderem Interesse, weil sie wahrscheinlich den ältesten deutschen Cossisten bekannt war. E. WAPPLER hat darauf hingewiesen (*Zur Geschichte der Mathematik im 15. Jahrhundert;* Zeitschr. für Mathem. 45, 1900, Hist. Abt. S. 55—56), daß WIDMANN einen Auszug daraus in den

Cod. Dresd. C 80 Bl. 301[a] eingetragen hat, möglicherweise nicht direkt aus dem Cod. Vindob. 4770, sondern aus dem Cod. Lips. 1470. Daß auch Chr. Rudolff höchstwahrscheinlich die Übersetzung kannte, geht aus folgendem Passus seiner Arbeit: *Behend vnnd hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre* (Straßburg 1525, Bl. G vi[b]) hervor:

> Das bezeugen alte bücher nit vor wenig jaren von der coss geschribē/ in welchē die quantitetn / als dragma / res / substantia etc. nit durch character sunder durch gantz geschribne wort dargegeben sein/vnd sunderlich in practicirung eins yeden exempls / die frag gesetzt / ein ding / mit sölchen worten / ponatur vna res.

In der Übersetzung des Robertus Castrensis kommt nämlich gerade der Term „substantia" vor, während dieser Term, soweit jetzt bekannt, sonst nicht angewendet worden ist. Freilich sollen nach Curtze im Cod. Vindob. 4770 für x^0 und x^1 bzw. die Terme „numerus" und „radix" benutzt werden, aber das bedeutet nicht notwendigerweise, daß diese zwei Terme dort ausschließlich zur Anwendung kommen.
G. Eneström.

1³ : 720, 780, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71—72.

1³ : 730. Die Frage, was Alkhwarismis verlorene Schrift über die Vermehrung und die Verminderung eigentlich enthielt, dürfte nicht so einfach sein, als Herr Cantor annimmt. Im christlichen Mittelalter gab es nämlich nicht nur einen „Liber augmenti et diminutionis", sondern auch ein „Capitulum aggregationis et diminutionis", das ebenfalls aus dem Arabischen übersetzt worden war und einen ganz anderen Gegenstand als die Methode der zwei Fehler (oder eine besondere Art dieser Methode) behandelte. Das „Capitulum aggregationis et diminutionis" gehört der lateinischen Übersetzung von Alkhwarismis Algebra an, die Libri in seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (I, Paris 1837, S. 253—289) veröffentlichte, und entspricht, was wir Rechnung mit algebraischen Ausdrücken nennen könnten, zunächst Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Ausdrücken von der Form $\pm ax^2 \pm bx \pm c$. Offenbar kann eine arabische Schrift, von der man nur den Titel „Über die Vermehrung und die Verminderung" kennt, ebensogut den Gegenstand des „Capitulum aggregationis et diminutionis" als den Gegenstand des „Liber augmenti et diminutionis" behandelt haben. Nun kann man ja einwerfen, daß das fragliche „Capitulum" nur ein Abschnitt der Alkhwarismischen Algebra ist, aber in Wirklichkeit kann dieser Abschnitt als eine Einleitung zur eigentlichen Algebra, d. h. zur Behandlung der Gleichungen bei Alkhwarismi, betrachtet werden, und es ist darum gar nicht unmöglich, daß ein Abschreiber daraus einen besonderen Traktat bildete. Auf der anderen Seite gibt es einen Umstand, der darauf hinzuweisen scheint, daß „Über die Vermehrung und die Verminderung" nicht „Methode der zwei Fehler" bedeutete oder wenigstens nicht immer diese Bedeutung hatte. Im *Fihrist* wird nämlich erwähnt (siehe Suter, Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **6**, 1892, S. 37), daß Abû Kâmil teils eine Schrift „Über die Vermehrung und die Verminderung", teils ein „Buch der beiden Fehler" verfaßt hat. Freilich kann, wie Suter (a. a. O. S. 70) bemerkt, der Text des *Fihrist* hier verstümmelt sein, z. B. so, daß

ursprünglich zwischen den zwei Titeln: „es wird auch genannt" stand, aber dies ist lediglich eine Vermutung.

G. Eneström.

1^2 : 734, 736—737, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72.

1^3 : 737. In der Fußnote 1 gibt Herr Cantor an, die bekannte Hypothese vom Ursprung des Wortes *sinus* stamme von dem Pariser Orientalisten Munk her. Es hat aber schon E. Strachey in den Noten (S. 111) seines Buches *Bija Ganita, or the Algebra of the Hindus*, London 1813, auf die Identität: ind. dschiva = arab. dschîb oder dschaib = lat. sinus aufmerksam gemacht. — Das genannte Buch Stracheys hätte überhaupt wegen seiner interessanten Noten zur indischen Mathematik von Herrn Cantor zitiert werden dürfen.

H. Suter.

1^2 : 738, 743, 748, 750, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72.

1^3 : 764. Da Herr Cantor einige bei Alkarkhi vorkommende Multiplikationsmethoden nennt, die auf griechische Quellen hinweisen, füge ich hinzu, daß Alkarkhi auch die von Ocreatus erwähnte „regula Nicomachi" lehrt, freilich für einen anderen Zweck als Ocreatus. Um die Multiplikation $83 \cdot 83$ auszuführen gibt Alkarkhi (siehe die Übersetzung von Hochheim I, Magdeburg 1878, S. 8) folgendes Verfahren an: $(83 + 3) 8 \cdot 10 + 3 \cdot 3$. Setzt man hier $83 = a$, $3 = b$, kann man das Verfahren durch die Formel $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$ ausdrücken, also genau die Formel, die dem Verfahren des Ocreatus zugrunde liegt, obgleich dieser nicht den Spezialfall $a - b = 10k$, sondern den Spezialfall $a + b = 10$ berücksichtigt.

G. Eneström.

1^3 : 770. Aus der Cantorschen Darstellung bekommt der Leser sehr leicht die Vorstellung, daß Alkarkhi regelmäßig zwei Wurzelwerte der Form $ax^2 + c = bx$ angibt. Dies ist indessen nicht der Fall. Nach Woepcke (*Extrait du Fakhri*, Paris 1853, S. 67) finden sich im ganzen *Fakhri* nur drei Gleichungen dieser Form, wo zwei Wurzelwerte angegeben werden, nämlich außer der von Herrn Cantor erwähnten Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ noch die zwei Gleichungen $24 + x^2 = 10x$ und $x^2 + 16 = 10x$. Bei den übrigen Aufgaben, die zur Form $ax^2 + c = bx$ führen, wird nur eine einzige Lösung mitgeteilt. An vielen Stellen ist der Grund dieses Verfahrens ersichtlich, aber an anderen Stellen (II : 11, 44; III : 12, 13) sind die beiden Lösungen gleichwertig. Jedenfalls scheint Alkarkhi nicht wie Alkhwarismi den negativen Wert der Quadratwurzel vorgezogen zu haben, denn in zwei der vier soeben zitierten Fälle entspricht die Lösung dem positiven Wert der Quadratwurzel.

G. Eneström.

1^2 : 780, 781, 794, 800, siehe BM 8_3, 1907, S. 72—73.

1^3 : 801. Die Angabe, daß im Traktate *De pratica arismetrice* bei der Ausziehung der Quadratwurzel, die wirklich berechnete ganze Zahl „als Zähler

eines Bruches gilt, dessen Nenner aus einer mit n Nullen versehenen Einheit besteht", ist nicht ganz genau, denn daraus muß man folgern, daß als Resultat ein Bruch von der Form $\frac{k}{10^n}$ auftritt; auch die vorangehende Bemerkung: „natürlich nicht in einer Schreibart, wie sie den modernen Dezimalbrüchen ... anhaftet" veranlaßt zu dieser Folgerung. In Wirklichkeit wird im Traktate folgendes Verfahren benutzt (vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 405). Um $\sqrt{2}$ zu ermitteln, wird zuerst die Quadratwurzel aus 2000000 gezogen und als Näherungswert ergibt sich $1414_{\circ}$ Hieraus wird gefolgert, daß die ganze Zahl 1 ist, und das übrige, das natürlich tatsächlich 0·414 beträgt, wird sofort durch wiederholte Multiplikation mit 60 in den Sexagesimalbruch $24' \, 50'' \, 24'''$ verwandelt, so daß $\sqrt{2^0} = 1^0 \, 24' \, 50'' \, 24'''$. Da es zurzeit gar nicht sicher ist, daß der Traktat *De pratica arismetrice* von Johannes Hispalensis herrührt (vgl. Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 114) und auch nicht nachgewiesen worden ist, daß der Traktat schon im 12. Jahrhundert vorhanden war, so ist es von Interesse zu bemerken, daß das nämliche Verfahren bei der Ausziehung von Quadratwurzeln in einer nachweislich vor 1168 verfaßten Algorismusschrift vorkommt, die M. Curtze in den Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 8, 1898 (S. 17—27) herausgegeben hat. Hier wird nämlich (S. 26—27) $\sqrt{26}$ dadurch berechnet, daß zuerst als Näherungswert von $\sqrt{260000}$ die ganze Zahl 509 wie gewöhnlich bestimmt wird, und daraus wie im Traktate *De pratica arismetrice* gefolgert, daß $\sqrt{26^0} = 5^0 \, 5' \, 24''$. Daß das Resultat unter der Form $\frac{509}{100}$ geschrieben werden kann, wird nicht mit einem einzigen Worte angedeutet. G. Eneström.

1[3]: 801. Das am Schlusse der Boncompagnischen Ausgabe des *Liber algorismi de pratica arismetrice* hinzugefügte magische Quadrat gehört *ganz gewiß nicht* dem Traktate an. Soweit jetzt bekannt ist, findet sich dieses Quadrat *nur* am Schlusse der von Boncompagni benutzten Handschrift Cod. Paris. 7359, und diese stammt nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn H. Omont aus dem Ende des 13. oder dem Anfang des 14. Jahrhunderts. In allen übrigen bisher bekannten Handschriften des Traktates fehlt das Quadrat, und es steht mit dem vorangehenden Texte in keinem Zusammenhange.

G. Eneström.

1[3]: 802. Die Angabe: „Da [d. h. im Traktate *De pratica arismetrice*] kommt das Wort *differentia* mehrfach vor, ... aber es bedeutet nur die Stelle, bis zu welcher man vor- beziehungsweise zurückrückt. Das gleiche Wort im gleichen Sinne hat auch der Übersetzer der kleinen Abhandlung, welche wir als die des Alchwarismi selbst anerkennen, angewandt", ist nicht ganz richtig. Zum erstenmal wird das Wort „differentia" im Traktate *De pratica arismetrice* (S. 27 der Boncompagnischen Ausgabe) auf folgende Weise definiert: „Singulis limitibus cum numeris a se procreatis Indi dederunt nomina, primum scilicet limitem cum numeris a se procreatis uocantes differentiam unitatum, ... secundum autem cum numeris proucnientibus a se differentiam decenorum ..". Aber auf der vorangehenden Seite des Traktates wurde an-

gegeben, daß 1 „primus limes“, 10 „secundus limes“, usw. ist. Also bedeutet „differentia“ nach der Definition zunächst nicht eine Stelle, sondern eine Gruppe von neun Zahlen $A \cdot 10^n$ ($A = 1, 2, \ldots, 9$). Dieselbe Bedeutung hat das Wort am Anfange des Traktates *Algoritmi de numero indorum*, wo es (S. 3 der Boncompagnischen Ausgabe) heißt: „Prima est differentia unitatum, in qua duplicatur et triplicatur quicquid est inter unum et .IX.“.

Nun ist es aber klar, daß wenn man eine Zahl schreibt, so nimmt die Ziffer der ersten „differentia“ d. h. die Einheitsziffer, immer die erste Stelle rechts ein, die Ziffer der zweiten „differentia“ die zweite Stelle, usw., so daß man in vielen Fällen das Wort „differentia“ ganz einfach mit „Stelle“ übersetzen kann, und in diesem beschränkteren Sinne ist die Angabe des Herrn Cantor richtig.

Da ich oben Anlaß gehabt habe, die Bedeutung des Wortes „limes“ zu erwähnen, so füge ich hinzu, daß dies Wort im Traktate *De pratica arismetrice* auch eine andere Bedeutung hat, und zwar dieselbe als „differentia“ nach der ursprünglichen Definition. Dieselbe Seite des Traktates (S. 27), wo „differentia“ definiert worden ist, enthält nämlich den folgenden Passus: „Constat ... unumquemque limitem .9. numeros continere, primum numeros unitatum, secundum decenorum, ... et similiter ceteros“. G. Eneström.

1³ : 802, 805—806, 815, 855, 857, 859, 862, 863, 867, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 73—74.

1³ : 867. Die Angabe, daß sich der Näherungswert $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ im 66. Kapitel der „*Geometria Gerberti*“ findet, ist sicherlich korrekt, aber es wäre vielleicht nicht ganz überflüssig zu bemerken, daß die Ausgaben der Geometrie hier zum Teil andere Angaben haben. Bei Olleris steht (S. 459 Z. 6) in der Ausgabe selbst „unum et bissem“ $\left[\text{d. i. } \frac{5}{3}\right]$, aber Olleris hat später (S. 595 Z. 12) die Lesart in „unum et quincuncem“ $\left[\text{d. i. } \frac{17}{12}\right]$ verbessert. Bei Bubnov steht (S. 352) „unum et triens lateris“ $\left[\text{d. i. } \frac{4}{3}\right]$, und in Wirklichkeit sind die römischen Bruchzeichen für „quincunx“ und „triens“ nur wenig verschieden, aber sehr merkwürdig ist es jedenfalls, daß Bubnov nicht einmal in seinem kritischen Apparate die viel wahrscheinlichere Lesart „quincuncem“ erwähnt. G. Eneström.

1³ : 869, 875—876, 877, 878, 882, 889, 893, 900, siehe BM **8**₃, 1907, S. 74—78.

1³ : 900. Wie schon von Th. H. Martin (*Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge;* Annali di matem. **5**, 1863, S. 367) hervorgehoben worden ist, hat man gar keinen besonderen Grund anzunehmen, daß sich Oddos Worte: „Hanc [= artem abaci] antiquitus graece conscriptam, a Boetio credimus in latinum translatam. Sed quia liber bujus artis difficilis legentibus ...“ auf die „*Geometria Boetii*“ beziehen. Schon der Umstand, daß Oddo den Ausdruck „liber hujus artis“ anwendet, macht es wahrscheinlich, daß er nicht die „*Geometria Boetii*“ meint, sondern eine Schrift, die speziell „ars abaci“ behandelt, und die von Oddo benutzten Terme „summa“ [= Multiplikandus]

und „fundamentum" [= Multiplikator] weisen auf eine andere Quelle als die „*Geometria Boetii*" hin. Außerdem findet sich in der „*Geometria Boetii*" nicht die geringste Andeutung, daß die Stelle über den Abakus aus dem Griechischen übersetzt worden ist.

G. Eneström.

1^2 : 902, 906, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 78—79.

1^3 : 906. Wie Herr Cantor dazu gekommen ist, den *Prologus Ocreati in Helceph* einen Auszug aus einer arabischen Schrift über Multiplikation und Division zu nennen, dürfte schwer zu erraten sein. Der Verfasser des *Prologus* sagt selbst: „festino aggredi Helcep sarracenicum tractare de multiplicatione ... et divisione" und ein paar Zeilen weiter unten gebraucht er das Wort „compendium". Aber „Helcep" ist offenbar nur ein anderer Name für „Algorismus" (vgl. „ars Helcep" S. 136 Z. 19 der Henryschen Ausgabe), und daß der *Prologus* ein Auszug aus einer arabischen Schrift ist, kann man daraus nicht folgern. Ebensowenig gibt die Lektüre des *Prologus* zu einer solchen Folgerung Anlaß; im Gegenteil bekommt man dadurch den Eindruck, daß der Verfasser ein junger Mann war, der mit ziemlich geringem Erfolg versuchte, das was er teils aus abendländischen, teils — unmittelbar oder mittelbar — aus arabischen Quellen gelernt hatte, zu bearbeiten. Freilich ist die Henrysche Ausgabe sehr schlecht (ob dies auf der Handschrift beruht oder darauf, daß Herr Henry die Handschrift nicht lesen konnte, bin ich nicht imstande zu entscheiden), aber dennoch ist es nicht schwer auszufinden, was der *Prologus* eigentlich enthält. Nach einer kurzen Einleitung über Zahlen und Ziffern (im ganzen Traktate werden nur römische Ziffern angewendet und Null wird überall durch τ bezeichnet), werden zuerst gewisse einfachere Arten von Multiplikation gelehrt, nämlich die „regula Nicomachi", sowie eine ähnliche Regel, ferner die komplementäre Multiplikation, die Regel $ab = a^2 + a(b-a)$ und zuletzt die Multiplikation auf Grund der Euklidischen Definition (vgl. *Elementa* VII Def. 15). Weiter wird die gewöhnliche Multiplikation unter Benutzung der zwei Beispiele $33 \cdot 33 = 1089$ und $1200 \cdot 1200 = 1440000$ auseinandergesetzt, und als Proben der Richtigkeit der Operation werden die zwei Divisionen $\frac{1089}{33} = 33$ und $\frac{1440000}{1200} = 1200$ ausgeführt. Dann werden die Regeln der zwei Operationen kurz zusammengefaßt und endlich wird angegeben, wie man verfahren soll, wenn nach der Division etwas übrigbleibt; als Beispiel wird $\frac{148}{16} = 9\frac{1}{4}$ benutzt. Die letzten fünf Zeilen („Omnis numerus ... quinque bis") scheinen ursprünglich eine Randbemerkung gewesen zu sein, und ihr Sinn ist ohne Zweifel, daß ganz allgemein $(a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab$ und speziell $35 \cdot 35 = 30 \cdot 30 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 30$, so daß in der letzten Zeile „quinquies" gestrichen werden und in der vorletzten Zeile V statt CC stehen soll.

Aus welcher arabischen Quelle die Kenntnisse des Ocreatus entstammen, wird wohl nie ermittelt werden können. Wenn „Helceph" wirklich eine Verketzerung von „Al kâfî" ist, liegt es ja nahe, zu vermuten, daß diese Quelle die Schrift Alkarkhis war, und dort findet sich tatsächlich teils ein Spezialfall der „Regula Nicomachi" (vgl. oben die Bemerkung zu 1^3 : 764), teils die Euklidische Definition der Multiplikation, aber diese war natürlich schon im 12. Jahrhundert im Abendlande bekannt, und die unverstümmelte Form

„NICOMACHUS“ deutet gewiß nicht auf eine arabische Quelle hin. Die Regel $ab = a^2 + a(b - a)$ findet sich bei IBN ALBANNA (siehe die Übersetzung von A. MARRE, Atti dell' accad. pontif. dei Nuovi Lincei **17** [1863—1864], S. 304), aber vermutlich lebte OCREATUS vor diesem. Der übrige Inhalt des *Prologus* könnte ebensogut aus einer abendländischen als aus einer arabischen Quelle entstammen.

Ob der *Prologus* im 12. oder im 13. Jahrhundert verfaßt wurde, dürfte zurzeit unmöglich sein zu entscheiden. Das Zeichen τ für Null sowie die ausschließliche Benutzung römischer Ziffern könnte auf eine frühe Abfassungszeit des Traktates hindeuten, aber meines Erachtens darf man daraus keine bestimmten Folgerungen ziehen. Indessen scheint es mir höchstwahrscheinlich, daß der Traktat spätestens in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts verfaßt worden ist.

G. ENESTRÖM.

1^2 **: 908, 909, 910, 911,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79—80.

2 : 5, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 286; **8**$_3$, 1907/8, S. 80. — **2 : 7,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **6**$_3$, 1905, S. 309. — **2 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502.

2 : 11. In betreff der bei LEONARDO PISANO vorkommenden Probezahlen kann bemerkt werden, daß LEONARDO ausdrücklich hervorhebt (*Liber abbaci*, ed. BONCOMPAGNI, S. 34), daß alle Primzahlen als Probezahlen benutzt werden können („possunt enim multiplicationes ... per alias quasdam pensas probari, scilicet per eam de 7 et de omnibus numeris asam [= Primzahlen] existentibus“). Die Dreizehnerprobe wird tatsächlich S. 42 angewendet. Daß bei LEONARDO „dem eigentlichen Dividieren verhältnismäßig geringe Aufmerksamkeit gewidmet ist“, kann ich nicht finden. LEONARDO gibt zuerst (S. 31) die allgemeine Regel an und lehrt dann ausführlich folgende 12 Divisionen (S. 31—36, 43—47), bei denen die Divisoren Primzahlen sind: 18456 : 17; 18456 : 19; 13976 : 23; 24059 : 31; 780005 : 59; 5917200 : 97; 1349 : 257; 30749 : 307; 574930 : 563; 5950000 : 743; 17849 : 1973; 1235689 : 4007. Diese Beispiele dürften wohl genügen, um das Verfahren auseinanderzusetzen. Auch die Bemerkung des Herrn CANTOR: „Die Teilung wird meist durch die einzelnen Faktoren des Divisors nach einander vollzogen“ scheint mir nicht genau zu sein, denn in Wirklichkeit kommen bei LEONARDO nur drei solche Teilungen vor, nämlich 749 : 75; 67898 : 1760; 81540 : 8190.

G. ENESTRÖM.

2 : 14—15, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **5**$_3$, 1904, S. 200; **6**$_3$, 1905, S. 208—209.

2 : 17. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß LEONARDO die Zahlen, die er *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* nennt, als Linien repräsentiert, er sagt nämlich: „Sit itaque numerus .*e*. linea prima ... numerus quoque .*c*. sit linea sexta“. Sein Verfahren ist also durchaus dasselbe, das EUKLIDES im 7. Buche der Elemente anwendet. Da Herr CANTOR weiter unten (S. 61) von „einem vereinzelten Vorkommen“ solcher Buchstabenanwendung bei LEONARDO redet, so erlaube ich mir beispielsweise auf S. 395—397, 399, 419, 432—434, 436, 439 der BONCOMPAGNIschen Ausgabe des *Liber abbaci* hinzuweisen, wo ebenfalls allgemeine Buchstaben statt besonderer bestimmter Zahlen benutzt werden.

G. ENESTRÖM.

2 : 20, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310.

---

2 : 34. LEONARDO PISANO bemerkt nicht an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle, daß der Gleichung $ax^2 + c = bx$ „regelmäßig zwei Wurzelwerte Genüge leisten". Zuerst gibt LEONARDO den Wert $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ an, und fügt dann hinzu (S. 409 Z. 14—16): „et si id quod remanserit [nämlich nachdem der Wurzelausdruck von $\frac{b}{2a}$ subtrahiert worden ist] non erit radix quesiti census, tunc addes id quod extraxisti super numerum, de quo extraxisti et habebis radicem quesiti census", und einige Zeilen weiter unten wiederholt er dieselbe Bemerkung mit den Worten: „cum non soluetur questio cum diminutione, soluetur sine dubio cum additatione". Was er wirklich bemerkt, ist also, daß, wenn eine Aufgabe durch die Gleichung $ax^2 + c = bx$ gelöst wird, so genügt entweder $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ oder $x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ der gestellten Aufgabe.

Aus den soeben zitierten Stellen könnte man vermuten, daß LEONARDO in betreff der Aufgaben, die zu der Gleichung $ax^2 + c = bx$ führen, nur eine einzige Lösung berücksichtigt. Indessen finden sich bei ihm solche Probleme, für welche er wirklich zwei Lösungen angibt, z. B. S. 414—415, wo er ausdrücklich hervorhebt, daß eine gewisse Aufgabe, die der Gleichung $\frac{20}{x} = \frac{60}{x+2} - 5$ entspricht, die zwei Lösungen $x = 2$ und $x = 4$ hat. Auch hier nennt er in erster Linie die Lösung, die durch *Subtraktion* der Quadratwurzel erhalten wird.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 37, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 80—81. — **2 : 46,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 51,** siehe BM. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106.

---

2 : 52. Daß LEONARDO, nachdem er die Gleichung $\frac{7}{20}x^2 + \frac{64}{5}x = 64$ hergeleitet hatte, den Wert von x „unter Benutzung von Sexagesimalbrüchen ausrechnete" (siehe Z. 18—19), ist entweder eine nicht ganz deutliche Angabe oder lediglich eine Vermutung des Herrn CANTOR; es sollte vielmehr heißen, daß LEONARDO den Wert von $\sqrt{517\frac{11}{49}}$ ohne weiteres in Sexagesimalbrüchen angab („egredientur $\frac{11}{49}517$ pro quadrato linee *.bg.*, de quorum radice, que est secundum propinquitatem 22 et minuta 44 et secunda 33 et tertia 15 et quarta 7") und daraus den Wert von x durch einfache Subtraktion berechnete. Die Angabe, daß LEONARDO den Wert von x unter Benutzung von Sexagesimalbrüchen ausrechnete, kann wohl nichts anderes bedeuten, als daß LEONARDO zuerst die Zahl $517\frac{11}{49} = \frac{25344}{49}$ mit $60^8 = 167{,}961{,}600{,}000{,}000$ multiplizierte, dann die Quadratwurzel $\frac{1}{7} \cdot 2{,}063{,}205{,}949 = 294{,}743{,}707$ berechnete und zuletzt die gefundene Zahl viermal durch 60 dividierte. Aber daß LEONARDO dies sehr beschwerliche Verfahren anwendete, hat man nicht den geringsten

Grund anzunehmen. Ohne Zweifel bediente er sich zuerst des Verfahrens, das er in seinem *Liber abbaci* (S. 355—356 der Boncompagnischen Ausgabe) ausdrücklich gelehrt hatte, und das Herr Cantor S. 30—31 auseinandersetzt, und verwandelte dann die berechnete Zahl in Sexagesimalbrüche ganz wie der Verfasser des von Boncompagni 1857 herausgegebenen *Liber algorismi de pratica arismetrice.*

G. Eneström.

2 : 53, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201 — **2 : 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2 : 59—60,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310—311. — **2 : 61,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287. — **2 : 63**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2 : 67**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82,** 87, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 88**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{6}_3$, 1905, S 395. — **2 : 89, 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503.

2 : 91. In der 3. Nummer (1907) der Tribune publique der *Encyclopédie des sciences mathématiques* hat V. Mortet (S. 7) darauf hingewiesen, daß der von Ch. Henry herausgegebene „Algorisme" nicht überall eine wörtliche Übersetzung des „Carmen de algorismo" bringt. Teils hieraus, teils aus dem Umstande, daß der „Algorisme" sechs („6 parties sont daugorisme"), aber das „Carmen de algorismo" sieben Rechenoperationen anzeigt, schließt Mortet, daß der „Algorisme" und das „Carmen de algorismo" vielleicht nur aus einer gemeinsamen Quelle geschöpft haben; ob der „Algorisme" eine wörtliche Übersetzung oder mehr eine Bearbeitung dieser älteren Algorismusschrift sei, könne selbstverständlich zurzeit nicht entschieden werden.

In betreff dieser Bemerkung hebe ich zuerst hervor, daß der von Mortet zitierte Passus „6 parties sont daugorisme" belanglos ist, da der „Algorisme" unmittelbar nach diesem Passus nur fünf Rechenoperationen erwähnt aber tatsächlich noch zwei in der Einleitung nicht erwähnte Operationen, nämlich Division und Kubikwurzelausziehen lehrt. Dagegen ist es richtig, daß der „Algorisme" nicht überall eine wörtliche Übersetzung des „Carmen de algorismo" enthält, und die von Mortet aufgestellte Hypothese *kann* also richtig sein. Auf der anderen Seite ist die ganze Frage von untergeordnetem Interesse, und, aus diesem Grunde hin ich geneigt, bis auf weiteres die einfachere Hypothese, daß der „Algorisme" wesentlich eine Übersetzung des „Carmen de algorismo" sei, zu empfehlen.

G. Eneström

2 : 91—92, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395—396. — **2 : 97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 210. — **2 : 100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 396. — **2 : 104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 106,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 380. — **2 : 111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S 352. — **2 : 116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 117—118,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107, 311 — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406 — **2 : 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504

2 : 128. Wie M. Curtze (BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504) herichtet hat, heabsichtigte er 1900 zusammen mit P. Tannery die *Practica geometriae* des Dominicus de Clavasio herauszugehen. Auf Curtzes Anregung übernahm Tannery später die endgültige Redaktion der Arheit, und aus einer Bemerkung im Journal

des savants 1904, S. 462 scheint es, als ob die Arbeit im August 1904 beinahe fertig war; A. Favaro hat dieselbe sogar als von Tannery schon veröffentlicht aufgeführt (siehe *Paolo Tannery, Nota commemorativa,* Padova 1905, S. 5). Leider muß diese Angabe auf einem Mißverständnis beruhen, und merkwürdigerweise ist es nicht einmal gelungen, die Abschrift der *Practica geometriae* wiederzufinden, die Curtze verfertigte und an Tannery sandte.

Da Herr Cantor S. 127 angibt, daß sich zahlreiche Handschriften der *Practica geometriae* erhalten haben, erlaube ich mir, diese durchaus richtige Angabe dahin zu präzisieren, daß Curtze 1899 vierzehn solche Handschriften kannte (siehe Centralblatt für Bibliothekswesen **16**, 1899, S. 270—271), nämlich: 1. Cod. Lips. 1469; 2. Cod. Lips. 1470; 3. Cod. Amplon. Fol. 37; 4. Cod. Amplon. Fol. 393; 5. Cod. Amplon. Fol. 385; 6. Cod. Amplon. Qu. 352; 7. Cod. Cracov. 568; 8. Cod. Cracov. 1919; 9. Cod. lat. Monac. 410; 10. Cod. lat. Monac. 14908; 11. Cod. Seitenstett. XLVI; 12. Cod. Paris. lat. 7378A; 13. eine Handschrift in Madrid; 14. eine Handschrift in Oxford.

G. Eneström.

2:129, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2:132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:144,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381. — **2:145,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2:148,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2:150—151,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288. — **2:155—156,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2:157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 87—88. — **2:163,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2:164,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2:165,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382. — **2:166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140.

2:178—179. Hier wird auseinandergesetzt, wie Johann von Gmunden verfuhr, um Quadratwurzeln aus Sexagesimalbrüchen auszuziehen. Vor dem Berichte hierüber wird bemerkt: „Ganz neu ist ja deren Anwendung [d. h. die Anwendung von Sexagesimalbrüchen in diesem Falle] auch nicht. Johannes von Luna hat schon sich ihrer ganz ähnlich bedient. Aber dort waren Sexagesimalbrüche nicht schon im Laufe der Rechnung benutzt"; und nach dem Berichte fügt Herr Cantor hinzu: „Das ist ... ein Verfahren, welches offenbar nicht zu den Arabern gelangt oder durch deren Vermittelung noch nicht wieder in das Abendland gedrungen war".

Aber in Wirklichkeit ist das Verfahren des Johann von Gmunden durchaus identisch mit dem im *Liber algorismi de pratica arismetrice* (ed. Boncompagni, Rom 1857, S. 90—93) auseinandergesetzten. Vorher wurde in diesem Traktate (a. a. O. S. 86—90) das Verfahren in betreff ganzer Zahlen gelehrt, und dann kommt der von Johann von Gmunden behandelte Fall. Hier unten bringe ich zum Abdruck einen Auszug aus den Vorschriften des *Liber algorismi de pratica arismetrice.*

> Si autem cuiuslibet numeri integri cum fractionibus uolueris inuenire radicem ..., reduc eas ad inferiores differentias habentes radicem, uidelicet ad secunda, uel ad quarta ... Quibus sic reductis, et prepositis illis quodlibet, sed paribus circulis, inuenias radicem earum pretermittendo, [„pretermittere" kann hier mit „verwahren" übersetzt werden] semper differentias secundum medietatem prepositorum circulorum ...

Die Regeln, die hiernach folgen, sind vielleicht an sich nicht ganz deutlich, aber das Verfahren ist genau dasselbe, das für Quadratwurzelausziehen aus ganzen Zahlen gilt, und für diesen Fall sind die Regeln des Traktates vollständig klar. Es handelt sich um die Ausziehung der Quadratwurzel aus 2 (vgl. oben die Bemerkung zu $1^3:801$), und nachdem $\sqrt{2000000} \sim 1414$ berechnet worden ist, wird bemerkt, daß die Einheit die ganze Zahl der Wurzel ist. Dann fährt der Verfasser des Traktates fort:

> Deinde tres differentias pretermissas, que sunt ·4·1·4·, multiplicamus in ·60·, et ex multiplicatione proueniunt ·2·4·8·4·0. Sed quia hic numerus cum circulo quinque differentias occupat, ideo duas ultimas, scilicet ·2·4·, que excedunt medietatem circulorum assummimus, et eas deletas de loco suo sub unitate separatim posita locamus; et sunt ibi minuta ...

Dann wird auf dieselbe Weise 840 mit 60 vervielfacht und wieder drei Ziffern wie vorher abgeschnitten, wodurch die Zahl der Sekunden der Wurzel erhalten wird, usw. Überhaupt kann man die Vorschriften des *Liber algorismi de pratica arismetrice* genau so wiedergeben, wie Herr CANTOR S. 178—179 die Vorschriften des JOHANN VON GMUNDEN wiedergegeben hat. Da nun der fragliche Traktat im Mittelalter ziemlich verbreitet war, so ist es sehr wahrscheinlich, daß JOHANN VON GMUNDEN sein Verfahren unmittelbar oder mittelbar aus demselben entnommen hat; möglich ist allerdings, daß sowohl er als der Verfasser des Traktates eine gemeinsame ältere Quelle benutzt haben.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 206, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S 313. — **2 : 210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398.

---

2 : 228. In betreff der Angabe: „als benutzt werden [von WIDMAN] ... angegeben: ... JULIUS FRONTINUS für Feldmesserisches“ vgl. unten die zweite Bemerkung zu **2** : 234, woraus hervorgeht, daß „Längen- und Flächenmaße“ statt „Feldmesserisches“ zu setzen ist.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 228. Herr CANTOR teilt hier mit, welche Aufschlüsse die Leipziger Universitätsakten über WIDMAN bringen, übergeht aber stillschweigend die Notiz von C. WIMPINA (vgl. den Abdruck dieser Notiz von B. BONCOMPAGNI im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **9**, 1876, S. 209). Abgesehen von den bibliographischen Aufschlüssen gibt WIMPINA an, daß WIDMAN, nachdem er einige Jahre in Leipzig Unterricht erteilt hatte, die Universität verließ und 1498 in seiner Vaterstadt Eger wohnhaft war. Aus einem Ausspruche von WIMPINA („Claret adhuc annos natos uno forte supra triginta“) könnte man versucht sein zu folgern, daß WIDMAN im Jahre 1498 nur 31 Jahre alt war, also 1467 geboren ist, aber ohne Zweifel bedeutet „uno forte supra triginta“ nicht „etwa ein und dreißig Jahre alt“, sondern „etwas mehr als dreißig Jahre alt“; da nun WIDMAN schon 1480 Student war und 1486 Vorlesungen über Algebra ankündigte, so war er kaum vor 1464 geboren, also im Jahre 1498 wenigstens 34 Jahre alt. Daß WIDMAN eine Leipziger Professur inne hatte, hat man meines Wissens nicht den geringsten Grund zu vermuten.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 229, siehe BM 1_3, 1900, S. 504—505.

2 : 229. Außer dem großen Rechenbuch hat Widman noch einige kleinere arithmetische Schriften veröffentlicht, nämlich:

Regula falsi apud philozophantes augmenti et decrementi appellata omnium regulis algobre demptis optima (20 Bl.);
Algorithmus linealis (14 Bl.);
Algorithmus integrorum cum probis annexis (12 Bl.);
Algorithmus minutiarum phisicarum (6 Bl.);
Tractatus proportionum plusquam aureus (17 Bl.);
Algorithmus minutiarum vulgarium (5 Bl.).

Alle diese Schriften sind anonym, und weder Druckjahr noch Ort ist angegeben, aber am Ende des *Algorithmus linealis* findet sich das Signet des Martinus Herbipolensis, der 1490—1512 Buchdrucker in Leipzig war. Da alle Schriften offenbar derselben Druckerei entstammen, so kann man behaupten, daß sie alle in Leipzig, wahrscheinlich wenige Jahre nach dem Erscheinen des Rechenbuchs veröffentlicht wurden; aus einer Angabe von C. Wimpina (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1876, S. 209) scheint übrigens hervorzugehen, daß die fünf letzten Schriften vor 1498 gedruckt waren. Die Schriften sind äußerst selten; die fünf ersten besitzt die Ratsschulbibliothek in Zwickau, und von der letzten Schrift findet sich ein Exemplar in der Universitätsbibliothek in Leipzig. Ausführliche Auskunft über die sechs Schriften hat E. Wappler in seinem *Beitrag zur Geschichte der Mathematik* (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 5, 1890, S. 147—168) gegeben. G. Eneström.

2 : 229. Die quadratische Einmaleinstafel findet sich schon in einer von Narducci (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1882, S. 135—162) veröffentlichten Abakusschrift aus dem Ende des 12. Jahrhunderts. Diese Tafel kommt auch im Anhange des *Liber algorismi de pratica arismetrice* vor (siehe die Ausgabe von Boncompagni, Rom 1857, S. 103).

In betreff der dreieckigen Einmaleinstafel legt man meines Erachtens gewöhnlich zuviel Wert auf die auch von Herrn Cantor zitierte Stelle des Widmanschen Rechenbuches (Bl. 13^b der Ausgabe von 1526), wo angegeben wird, daß diese Tafel „gezogen auss Hebreyscher zungen oder Jüdischer" ist. Im allgemeinen sind Widmans historische Notizen wenig zuverlässig, und vermutlich soll hier „Arabischer" statt „Hebreyscher" oder statt „Jüdischer" gelesen werden. Nun weiß man ja, daß die dreieckige Einmaleinstafel in der von Widman angegebenen Form schon in einer vor 1168 vorhandenen lateinischen Algorismusschrift vorkommt (siehe Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, S. 18), und ob Widman seine Notiz aus dieser Schrift oder aus einer späteren entnommen hat, dürfte von untergeordneter Bedeutung sein. Daß er eine hebräische Algorismusschrift benutzt hat, scheint mir wenig wahrscheinlich. Allerdings kann diese, wie Herr Cantor betont, keineswegs das Buch des Elias Misrachi sein, denn nach Steinschneider enthält das hebräische Original dieser Schrift *nicht* die Einmaleinstafel der Druckausgabe von 1546—1547 (siehe unten die Bemerkung zu 2 : 413). G. Eneström.

2 : 230. Es ist allerdings richtig, daß sich WIDMAN in der zweiten Abteilung, wo die Lehre von den Proportionen behandelt ist, auf JULIUS FRONTINUS beruft, aber meiner Ansicht nach liegt hier eine Verwechslung von zwei Namen vor. Um diese Ansicht zu begründen, mache ich darauf aufmerksam, daß die Zitate von WIDMAN nicht selten unzuverlässig sind. An der von Herrn CANTOR zitierten Stelle wird neben FRONTINUS auch „JORDANUS inn dem sechsten beschluss seines rechenbuchs" erwähnt, was wohl „im sechsten Buche der *Arithmetica JORDANI*" bedeuten soll, aber im ganzen 6. Buche kommt überhaupt kein Satz über Vervielfachung von Proportionen vor, sondern dies wird im 5. Buche gelehrt. Ebensowenig bezieht sich der 27. Satz des zweiten Buches der *Arithmetica JORDANI* auf Subtraktion von Proportionen, wie WIDMAN unmittelbar nachher (Bl. 56^b der Auflage von 1526) behauptet. Ein wenig ungenau ist ebenfalls die Berufung auf EUKLIDES am Anfange der dritten Abteilung (Bl. 163^b der Auflage von 1526): „Nu soltu wissen das punctus nicht annders ist (als EUCLIDES spricht) Dañ ayn ding das kain tayl hat vnnd allso ist punctus ain klain ding das nicht zu taylen ist", denn EUKLIDES nennt gewiß nicht den Punkt „ein kleines Ding".

Unter solchen Umständen, und da weder vor noch nach WIDMAN ein Werk von FRONTINUS über die Proportionen erwähnt worden ist, liegt es meines Erachtens sehr nahe, die Berufung auf FRONTINUS als einen Schreibfehler statt BOETIUS zu erklären. BOETIUS wird von WIDMAN einige Seiten vorher (Bl. 48^b, 49^b der Auflage von 1526) zitiert und an der von Herrn CANTOR hervorgehobenen Stelle, wo der Satz: diapente + diatesseron = diapason vorkommt, könnte BOETIUS' *Institutio arithmetica* II: 48, wo eigentlich dieser Satz enthalten ist, gemeint sein. Außerdem sind FRONTINUS und BOETIUS die einzigen von WIDMAN erwähnten römischen Verfasser, und darum konnte er die zwei Namen leicht verwechseln. Daß übrigens WIDMANS historische Angaben im allgemeinen nur mit großer Vorsicht zu benutzen sind, geht auch aus einer von WAPPLER (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **5**, 1890, S. 155) angeführten Stelle hervor, wo WIDMAN behauptet, daß „JOHANNES DE SACROBUSCO . . hanc artem [= Algorismum] de arabico in latinum transtulit".

G. ENESTRÖM.

---

2 : 230. Aus dem, was Herr CANTOR Z. 23—26 bemerkt, könnte man glauben, daß WIDMAN vielleicht das Problem vom Eierkauf ersonnen hat, um den Beweis zu führen, wie tief er in den Sinn der beiden Zeichen plus und minus eingedrungen war. Aber in Wirklichkeit hat WIDMAN dies Problem gar nicht ersonnen, sondern sicherlich dasselbe, ganz wie die meisten anderen Aufgaben, aus einer älteren Schrift entnommen. Möglicherweise war seine Quelle die von M. CURTZE in den Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **7**, 1895, S. 40—49 zum Abdruck gebrachte „Regula falsarum posicionum declaranda per 12 regulas sive questiones", wo (S. 47) die folgende Aufgabe vorkommt: „Septem ova demptis 2 denariis sunt empta pro 5 ₰ et uno ovo: queritur quanti precii est ovum"; freilich wird die Aufgabe dort vermittels der „Regula falsi" gelöst. Meiner Ansicht nach hat WIDMAN diese an sich sehr schlecht gewählte Aufgabe nach einer unwesentlichen Änderung der Zahlen in sein Rechenbuch eingetragen lediglich um anzugeben, daß die Gleichung $ax - b = cx + d$ durch $x = \frac{b + d}{a - c}$ erfüllt wird. Daß WIDMAN statt „demptis"

das Minuszeichen und statt „et" das Pluszeichen benutzt, deutet meines Erachtens auf keine besondere Absicht hin. Aus der lateinischen Dresdener Algebra weiß man, daß Widman schon 1486 mit dem Sinn der Zeichen + und — vertraut war.

G. Eneström.

2 : 232. Die Erklärung des Ausdruckes „Regula sententiarum" als „unbestimmte Aufgaben, die mehrere Lösungen zulassen" ist ein wenig irreleitend. In Wirklichkeit sollte es „undeutliche Aufgaben" oder „vieldeutige Aufgaben" heißen (vgl. Leonardo Pisano, *Liber abbaci*, ed. Boncompagni, Rom 1857, S. 170), und die „Regula sententiarum" ist also nur eine Spitzfindigkeit ohne wissenschaftlichen Wert. Das einzige Beispiel, das Widman bringt, ist das folgende: „7 ist $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ von ainer zal, Nu wil ich wissen wie vil 9 ist $\frac{1}{5}$ vō der selbigē zal". Nach der ersten Angabe ist die Zahl offenbar 84, aber die zweite Angabe ist undeutlich, und Widman gibt an, daß sie auf vier verschiedene Weisen verstanden werden kann.

Dagegen kommen bei Widman wirklich unbestimmte Aufgaben im gewöhnlichen Sinne vor, z. B. die Aufgabe „Schaff/Esel/Ochsen" (siehe Bl. 130b der Auflage von 1526). Es handelt sich hier um eine Aufgabe, die wir durch die zwei Gleichungen $x + y + z = 100$, $\frac{1}{20}x + y + 3z = 100$ ausdrücken würden. Aus dem, was Widman sagt, kann man folgern, daß sein Verfahren der Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten entspricht. Hierdurch erhält man also $\frac{19}{20}x - 2z = 0$ oder $19x = 40z$, eine Gleichung, der offenbar die Werte $x = 40$, $z = 19$ genügen. Dann wird selbstverständlich $y = 41$, aber wie Probleme dieser Art, die nicht so einfach sind, gelöst werden sollen, geht aus dem Verfahren nicht hervor. Eine andere unbestimmte Aufgabe genau derselben Art (Bl. 89a, b der zitierten Auflage) entspricht der Lösung der Gleichung $35x + 18y = 24(x + y)$, also $11x = 6y$ und Widman gibt die richtige Lösung $x = 6$, $y = 11$ an. Endlich kommt am Ende der Arbeit die gewöhnliche Aufgabe in betreff „person an ainer zech, alls man, frawen, vnd Junckfrawen" (Bl. 189b der zitierten Auflage), aber hier wird nur das Resultat ohne weiteres gegeben.

G. Eneström.

2 : 234. In Widmans Arbeit wird nicht nur angedeutet, daß er die Algebra kannte, sondern darin kommt auch eine wirkliche algebraische Lösung einer Aufgabe vor. Auf diese Stelle (Bl. 215b—216b der Auflage von 1489, Bl. 174b—175a der Auflage von 1526) hat schon Drobisch aufmerksam gemacht, und J. Tropfke hat dieselbe in seiner *Geschichte der Elementar-Mathematik* (I, Leipzig 1902, S. 317) zum Abdruck gebracht. Es handelt sich um das Einschreiben eines Quadrates in einen Halbkreis, dessen Durchmesser 12 ist, und Widmans Lösung ist wesentlich die folgende: Nennt man die Seite des Quadrates x, so bilden die Strecken x und $2x$ zusammen mit dem Durchmesser 12 ein rechtwinkliges Dreieck, so daß $x^2 + (2x)^2 = (12)^2$, woraus $x = \sqrt{28\frac{4}{5}}$. Für x benutzt Widman ein Zeichen, das dem der späteren Cossisten ähnelt, für x^2 schreibt er Zensus und die Quadratwurzel bezeichnet er durch *ra.* oder ℞. (in der Auflage von 1526 kommt nur *ra.* vor).

G. Eneström.

2 : 234. Die Angabe: „Die dritte Abteilung [von WIDMANS Arbeit] ... beruft sich, wie schon gesagt worden ist, auf JULIUS FRONTINUS“, kann buchstäblich richtig sein, aber ist jedenfalls sehr irreleitend. In dieser dritten Abteilung wird FRONTINUS im Vorübergehen ein einziges Mal erwähnt, und dabei handelt es sich lediglich um gewisse Längen- und Flächenmaße. Die betreffende Stelle lautet (Bl. 175^b, 176^a der Auflage von 1526):

> darumb soltu mercken das alweg, partica ist 36 pedes in quadrato vñ in muro 6 vñ 12 oz [= unciae] 1 pes vnd in quadrato 144. Vnd wye wol vyl vnd mancherlay mass sein als dann klerlichen ausstrucket JULIUS FRONTINUS vñ ander mer die da schreiben in diser kunst ...

Ich habe behauptet, daß die fragliche Angabe sehr irreleitend ist, und als Beleg dieser Behauptung genügt es, darauf hinzuweisen, daß Herr CANTOR selbst irregeführt worden ist; S. 237 sagt er nämlich: „Das wichtigste geschichtliche Ergebnis der dritten Abteilung wird unbedingt darin bestehen, daß sie so gut wie ausser Zweifel setzt, daß das feldmesserische Werk des FRONTINUS ... auch am Ende des XV. Jahrhunderts noch vorhanden gewesen sein muß, um von WIDMAN als Quelle genannt werden zu können“. Aber aus dem obigen wörtlichen Zitate geht hervor, das WIDMAN gar nicht ein Werk des FRONTINUS als Quelle genannt hat, denn jener erwähnt nur ganz beiläufig, daß dieser über einen metrologischen Gegenstand geschrieben hat (vgl. HULTSCH, *Metrologicorum scriptorum reliquiae* II, Leipzig 1866, S. 56—57).

Ohne Zweifel beruht die irreleitende Angabe der *Vorlesungen* darauf, daß Herr CANTOR leider die Arbeit WIDMANS nicht zur Verfügung gehabt hat (vgl. *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst*, Leipzig 1875, S. 181), und darum die Angabe von DROBISCH: „in doctrina de mensuris [WIDMANNUS appellat] JULIUM FRONTINUM“ mißverstanden hat.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 234. Der Nachweis, daß WIDMAN sowohl in der „Regula lucri“ als in der „Regula excessus“ wesentlich dasselbe Verfahren anwendete, sowie die Frage, ob er nicht selbst bemerkt hat, daß er so zweimal unter zwei verschiedenen Namen das gleiche Verfahren lehrte, ist durchaus ohne Interesse, weil bei WIDMAN das Wort „Regula“ oder „Regel“ gewöhnlich nicht, wie Herr CANTOR hier anzunehmen scheint, Regel in unserem Sinne, sondern vielmehr Art von Aufgaben bedeutet (vgl. was Herr CANTOR selbst S. 232 Z. 8—11 sagt). Im allgemeinen ist nämlich für WIDMAN nicht die algebraische Formel, wodurch eine Aufgabe gelöst werden kann, sondern die Art der Aufgabe die Hauptsache; nun handelt es sich bei der „Regula lucri“ um Zinsprobleme, bei der „Regula excessus“ dagegen um eine Aufgabe, die wir durch die Gleichung $x(x+4) = 96$ ausdrücken würden, und diese zwei „Regeln“ repräsentieren von WIDMANS Standpunkt zwei verschiedene Arten von Aufgaben. Das, was Herr CANTOR S. 233 (Z. 12—13 von unten) „Gattung von Aufgaben“ nennt, d. h. Aufgaben, die durch dieselbe algebraische Formel gelöst werden, existiert eigentlich nicht für WIDMAN, so daß die von Herrn CANTOR gestellte Frage geradezu sinnlos ist. Mit ebensogutem Rechte könnte man z. B. die Frage anfwerfen, ob WIDMAN nicht gewußt hat, daß er in der ersten „Regula pulchra“ (es gibt nämlich drei „Regeln“ mit diesem Namen) dasselbe Verfahren als in der „Regula transversa“ lehrte; die erste Regel entspricht der Gleichung

$2\left[2\left\{2x-a\right\}-b\right]-c=d$, die zweite der Gleichung $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}x-a\right\}-b\right]-c=d$, also handelt es sich in beiden Fällen um eine Gleichung ersten Grades. Aber, wie gesagt, haben solche Fragen von Widmans Gesichtspunkte aus keinen Sinn.

G. Eneström.

---

2 : 237. Z. 2—3 sollte das Zitat: „Das centrum das ist die zall die do ist von centruz hiss in winckel" gestrichen werden, da es nicht belehrend sondern nur irreleitend ist. Dies Zitat ist von Drobisch aus Widmans Aufgabe: „Wilt du aber wissen das centrum eynes triangels equilateri" (Bl. 169ᵃ der Auflage von 1526) entnommen, und hier bedeutet „centrum eynes triangels" der Radius des Umkreises. Nun meint aber Widman gewöhnlich mit „centrum" den Mittelpunkt eines Kreises und definiert diesen Term auf folgende Weise (Bl. 164ᵃ der Auflage von 1526): „ain punct ist von wölchn all lini aussgstreckt biss an die circūferēcz gleich sein Vn̄ der selbige punct wird Centrum genant des circkels". In dem von Herrn Cantor aus Drobischs Abhandlung entnommenen Zitate bedeutet darum „centrum" an der zweiten Stelle den Mittelpunkt des Umkreises, und jetzt versteht man leicht, daß Widmans Ausdruck sprachlich schlecht ist aber im Grunde einen verständigen Sinn hat. Aber dies kann der Leser der *Vorlesungen* gewiß nicht aus dem losgerückten Zitate erraten, und für ihn muß Widmans Ausdrucksweise durchaus unsinnig erscheinen. Jedenfalls enthält das Zitat nicht, wie man aus den Cantorschen Worten: „Das sind einige von den vorkommenden Erklärungen" annehmen muß, eine Erklärung des Termes „centrum", sondern eine Erklärung des von Widman ganz gelegentlich benutzten Ausdruckes „centrum eynes triangels".

G. Eneström.

---

2 : 237. Vgl. oben die zweite Bemerkung zu **2** : 234.

---

2 : 238. Hier werden die meisten Aufschlüsse, die Gerhardt an der von Herrn Cantor zitierten Stelle in betreff des Mönches Aquinus zusammengestellt hat, mitgeteilt. Nicht ohne Interesse wäre es indessen, hinzuzufügen, daß Gerhardt nach Quetif und Echard eine von Aquinus verfaßte Schrift mit dem Titel *De numerorum et sonorum proportionibus* erwähnt. Vielleicht wäre es möglich, diese Schrift wiederzufinden. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß H. Grammateus dieselbe gekannt und für seinen Traktat *Algorithmus proportionum una cum monochordi generis dyatonici compositione* (Krakau 1514) benutzt hat, denn Grammateus war ein Schüler von A. Stiborius, der selbst Schüler von Aquinus war.

G. Eneström.

---

2 : 240. Die Angabe, daß in einem Beispiel der von Frater Fridericus (1455—1464) verfertigten algebraischen Handschrift (Cod. lat. Monac. 14908) die Regel Ta yen angewandt ist, verdient etwas deutlicher ausgedrückt zu werden. In der Tat wird in dieser Handschrift die fragliche Regel, soweit jetzt bekannt, zum erstenmal in einem abendländischen Traktat allgemein gegeben, das heißt: es wird gelehrt, daß und wie man die Hilfszahlen bestimmen soll, die Herr Cantor im ersten Bande (1^2, S. 644) der *Vorlesungen* durch

k_1, k_2, k_3 bezeichnet hat. Es wird nämlich hervorgehoben, daß man zu untersuchen hat, mit welcher Zahl das Produkt zweier der gegebenen Divisoren multipliziert werden soll, damit man nach Teilung mit dem dritten Divisor den Rest 1 bekomme. Benutzt man die Bezeichnungen der zitierten Stelle des ersten Bandes der *Vorlesungen*, kann man die Vorschrift so ausdrücken, daß man durch Probieren eine Zahl k_1 bestimmt, die der Bedingung $k_1 m_2 m_3 \equiv 1$ (mod m_1) genügt. Wie man weiter verfahren soll, hat schon Leonardo Pisano angegeben.

G. Eneström.

---

2 : 240. Aus dem Cod. lat. Monac. 14908 hat Curtze an der von Herrn Cantor zitierten Stelle auch einige lateinische Beispiele zu der Algebra zum Abdruck gebracht, darunter eine Aufgabe, die durch die Gleichung $x^2 + 25 = 15x$ gelöst wird. Diese hat natürlich die zwei Wurzeln $x = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{125}{4}}$, die beide positiv sind, aber der Verfasser des Traktates bemerkt: „Et quia hic non potest processus fieri secundum viam diminucionis, igitur necessarium est, quod fiat secundum viam addicionis. Nam quinta regula algebre hanc habet ex natura sue demonstracionis libertatem et hoc privilegium.“ Diese Bemerkung hat Curtze erklärt durch Hinweis darauf, daß die Wurzel $\frac{15}{2} - \sqrt{\frac{125}{4}}$ eine andere in der Aufgabe vorkommende Größe negativ machen würde. Es ist also möglich, daß der Verfasser des Traktates sonst wirklich zwei Lösungen angegeben hätte, aber es ist ebensosehr möglich, daß er nur entweder $\frac{15}{2} - \sqrt{\frac{125}{4}}$ oder $\frac{15}{2} + \sqrt{\frac{125}{4}}$ als Lösung aufgeführt haben würde.

G. Eneström.

---

2 : 242, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505.

---

2 : 242. Die Angabe (Z. 23—24): „Dagegen erscheint der Subtractionsstrich mit der Aussprache minner“, sollte eigentlich heißen: „In den von Wappler 1887 und 1899 veröffentlichten Auszügen wird so gut wie ausschließlich das Wort minner bei den Subtraktionen benutzt; an einer einzigen Stelle erscheint das Zeichen —, und zwar einmal als gewöhnliches Minuszeichen, zweimal in einer verwandten Bedeutung“. Die betreffende Stelle lautet:

> Aber 3 ℋ — 2 ϑ stund 6 ϑ vnd 5 ℋ . . . Darnach mache 2 ϑ stund 6 ϑ macht 12 ʒ — vnd mach 2 ϑ stund 5 ℋ 10 ϑ —.

Es handelt sich um das Produkt $(3 - 2x)(6x + 5)$, und statt zu sagen: „$-2x$ multipliziert mit $6x$ macht $-12x^2$“ sagt der Verfasser (oder der Abschreiber?) der deutschen Dresdener Algebra: „$2x$ multipliziert mit $6x$ macht $12x^2$ —“.

Jedenfalls ist diese Stelle von besonderem Interesse, weil sie zu beweisen scheint, daß der Subtraktionsstrich schon vor Widman benutzt worden ist. Wappler hat nämlich nachträglich ermittelt (siehe Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 9, 1899, S. 539, Fußnote 2), daß die Nachschrift der deutschen Dresdener Algebra lautet: „factum 81 altera post exaltacionis crucis“ [= verfertigt am Ostersonnabend 1481] und im Jahre 1481 war Widman ein sehr junger Student in Leipzig, der sicherlich noch nichts über die Algebra geschrieben

hatte. Die zitierte Fußnote von Wappler übersah ich, als ich meine Anfrage: *Ist Johannes Widman Verfasser der „Dresdener Algebra“?* (Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 90) redigierte, sonst würde ich eine darin vorkommende Bemerkung etwas anders ausgedrückt haben.

In betreff des Multiplikationswortes „stund“ ist zu bemerken, daß es allerdings in den von Wappler 1887 veröffentlichten Auszügen aus der deutschen Dresdener Algebra regelmäßig vorkommt; dagegen steht in dem von Wappler 1899 zum Abdruck gebrachten Beispiel (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, S. 539—540) nicht „stund“, sondern „mol“. G. Eneström.

---

2 : 243, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382.

2 : 243. In betreff meiner letzten Bemerkung (BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382) teilt mir Herr Tropfke mit, daß er in Wirklichkeit das Zeichen der bekannten Größe der Dresdener lateinischen Algebra als Anfangsbuchstaben des Wortes „dragma“ betrachtet, und daß seiner Ansicht nach der Abschreiber das richtige Zeichen verstümmelt hat. Diese Verstümmelung beruht nach Herrn Tropfke wahrscheinlich darauf, daß das richtige Zeichen einem φ ähnelte und von dem Abschreiber als ein solches aufgefaßt wurde. Mit dieser Erklärung kann ich sehr wohl einverstanden sein. In der Tat ähnelt in Rudolffs Algebra (1525) das Zeichen der bekannten Größe fast mehr einem verschnörkelten d als einem φ; auf der anderen Seite konnte der unkundige Abschreiber der Dresdener lateinischen Algebra das Zeichen seiner Vorlage, vorausgesetzt daß es mit dem Rudolffschen übereinstimmte, sehr leicht als ein φ gelesen haben. Daß er nicht φ sondern ȹ schrieb, ist ja nicht auffällig, wenn man die Form Φ in Betracht zieht. G. Eneström.

2 : 245, 246, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383.

2 : 246. Mit Recht bemerkt Herr Cantor (Z. 28), daß das „Compendium de ȝ et re“ der lateinischen Dresdener Algebra viele Rechenfehler enthält. Im allgemeinen sind diese ohne Interesse, aber wenigstens einer dürfte verdienen, hervorgehoben zu werden, weil es sich um eine Aufgabe zu handeln scheint, die zu imaginären Lösungen führen würde. Die betreffende Gleichung (S. 15 des Wapplerschen Abdruckes) ist $6x^3 + 18x = 10x^2$, die abgesehen von der Wurzel $x = 0$ die zwei imaginären Wurzeln $x = \frac{5 \pm \sqrt{-83}}{6}$ hat. Indessen kommen diese Wurzeln nicht zum Vorschein, denn in der Handschrift findet sich als Lösung $\sqrt{3 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}$, d. h. für die Gleichung $x^2 + b = ax$ wird die Formel $x = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ benutzt. Daß hier der Fehler *ausschließlich* auf dem Abschreiber beruht, scheint mir weniger wahrscheinlich. G. Eneström.

---

2 : 247, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383—384.

2 : 249. Die ursprünglich von E. Wappler (*Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert*, Zwickau 1887, S. 10) herrührende Vermutung, daß

das von WIDMAN in seiner zweiten Vorlesungsanzeige erwähnte kleine kurzgefaßte Buch („compendiosus libellus") gerade die *Behende und hubsche Rechenung* vom Jahre 1489 war, halte ich für höchst unwahrscheinlich. Die zweite Vorlesungsanzeige ist offenbar älter als die dritte (aus dem Jahre 1486), rührt also spätestens aus dem Jahre 1486 her, und damals war die *Behende und hubsche Rechenung* vermutlich noch nicht verfaßt; nach WIDMANS Vorwort wurde das Buch auf SIEGMUND ALTMANNS Anregung bearbeitet. Jedenfalls kann dies Buch gewiß nicht ein „compendiosus libellus" genannt werden, und der „libellus" war offenbar lateinisch geschrieben. Dagegen ist es wohl möglich, daß die von WIDMAN erwähnte Schrift mit dem später von ihm veröffentlichten *Algorithmus integrorum cum probis annexis* identisch sei. G. ENESTRÖM.

2:250, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2:253,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2:273,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2:274,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2:281,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2:282, 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2:296,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354.

---

2 : 304. Wenn Herr CANTOR hier die PEACOCKsche Erklärung des Wortes „consolare" sehr scharfsinnig nennt, so ist es angebracht, sich der alten Regel „de gustibus non est disputandum" zu erinnern. Dagegen erlaube ich mir zu bemerken, daß das Wort lange Zeit vor dem Erscheinen der Arithmetik von Treviso angewendet worden ist. Am Anfange des 11. Kapitels des *Liber abbaci*, das gerade die Überschrift „Incipit capitulum undecimum de *consolamine* monetarum" hat, definiert LEONARDO PISANO den Term „consolare" auf folgende Weise: „Moneta consolari dicitur, quando ponitur in libra ipsius aliqua data argenti quantitas". Zieht man jetzt in Betracht, daß „consolatus" schon im klassischen Latein die Bedeutung „ermutigt" hat, so liegt wohl der Gedanke ziemlich nahe, der Term „consolare" habe gar nichts mit astrologischen Träumereien zu tun, sondern sei geradezu das klassische Wort „consolari". Jedenfalls ist es angebracht zu erwähnen, daß der Term wenigstens auf LEONARDO PISANO zurückgeht. G. ENESTRÖM.

2:305, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 88. — **2:313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2:314,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288—289. — **2:317,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 384.

---

2 : 319. In der 7. Distinction behandelt PACIUOLO auch (Bl. $105^{a, b}$) ein paar unbestimmte Probleme und bedient sich dabei der Regel der zwei Fehler, also ganz wie der anonyme Verfasser eines algebraischen Traktates aus der Mitte des 15. Jahrhunderts (vgl. BM 5_3, 1904, S. 202). Das erste Problem führt zu zwei Gleichungen von der Form

$$x + y + z + t = k, \qquad ax + by + cz + dt = k,$$

und PACIUOLOS Lösung ist wesentlich die folgende. Man wählt zwei Reihen von Zahlen x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2 aus, die den Gleichungen

$$x_1 + y_1 + z_1 + t_1 = k, \qquad x_2 + y_2 + z_2 + t_2 = k$$

genügen, und bestimmt die Zahlen

$$\varepsilon_1 = k - (ax_1 + by_1 + cz_1 + dt_1), \qquad \varepsilon_2 = k - (ax_2 + by_2 + cz_2 + dt_2);$$

dann ist

$$x = \frac{\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad y = \frac{\varepsilon_1 y_2 - \varepsilon_2 y_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad z = \frac{\varepsilon_1 z_2 - \varepsilon_2 z_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad t = \frac{\varepsilon_1 t_2 - \varepsilon_2 t_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Man sieht sofort, daß diese Werte den zwei Gleichungen genügen, aber gar nicht ganzzahlig zu sein brauchen, obgleich es sich um Anzahlen von Ziegen, Schweinen usw. handelt. Nur dadurch, daß die Versuchszahlen auf passende Weise gewählt sind, bekommt Paciuolo für die gesuchten Größen ganzzahlige Werte. Das zweite Problem ist eine gewöhnliche Zechenaufgabe mit Männern, Frauen und Kindern, und nur das Resultat wird angegeben. Paciuolo fügt hinzu: „Ma ingegnate a ponere: in modo che te vēga persone sane: perche poi summando se fossero rotte li pezzi de fanciuli con quelli de le donne e de li homini non farienno persone . 20 .“. Er weiß also selbst, daß das Verfahren nicht immer ganzzahlige Werte gibt. Tartaglia, der in seiner Arbeit *General trattato di numeri et misure* (I, Venedig 1556, Bl. 277ᵃ) Paciuolos Lösung erwähnt, bemängelt diesen, weil „non è vero, che la [nämlich die Frage] risolua totalmente per la detta position doppia, come finge“ und bemerkt, daß Fragen dieser Art zum Teil durch Herumtasten, zum Teil durch methodisches Verfahren gelöst werden. Nähere Auskunft hierüber verspricht Tartaglia später gelegentlich zu geben.

G. Eneström.

2 : 320, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 88—89. — **2 : 322,** siehe BM 6_3, 1905, S. 399.

2 : 322. Wie Herr Cantor richtig hervorhebt, erwähnt Paciuolo die zweifache Möglichkeit der Auflösung der Gleichung $x^2 + c = bx$, aber daraus darf man nicht folgern, daß für Paciuolo Aufgaben, die durch diese Gleichung gelöst werden, wirklich zwei Lösungen hatten. Am Ende des Bl. 145ᵃ behandelt Paciuolo die Aufgabe: Eine Zahl zu bestimmen, deren Quadrat um 4 vergrößert gleich das Fünffache der Zahl selbst ist, und gibt als Lösung nur $\sqrt{\frac{25}{4} - 4} + \frac{5}{2}$ an. Dann fährt er fort: „Ma ale volte varra la cosa a questo capitulo la $\frac{1}{2}$ · de le cose meno ditta ℞.“. Ebenso drückt sich Paciuolo an einer folgenden Stelle (Bl. 147ᵃ Z. 7—9; vgl. Bl. 147ᵇ Z. 30—31) aus: „Ma a le volte se haue la verita a luno modo. A le volte a laltro. El perche se cauando la ℞. del ditto remanente de la mita de le cose non satisfacesse al thema. E tu la ditta ℞. agiongi a la mita de le cose.“ Hier scheint Paciuolo als Lösung der Gleichung $x^2 + c = bx$ in erster Linie $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ anzugeben und nur wenn diese nicht angewendet werden kann, $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ als Lösung anzuerkennen.

Herr Cantor lenkt auch die Aufmerksamkeit darauf, daß Paciuolo die Bedingung $\frac{b^2}{4} > c$ ausdrücklich aufstellt. Ich erlaube mir die Bemerkung hinzuzufügen, daß Paciuolo nicht den Fall $\frac{b^2}{4} = c$ ganz einfach als Spezialfall der allgemeinen Formel behandelt, d. h. er ist nicht dazu gekommen, die Null als eine Größe zu betrachten, deren Quadratwurzel selbst Null ist. Unter

solchen Umständen ist es kaum möglich die Gleichung $x^2 + \frac{b^2}{4} = bx$ *algebraisch* zu lösen, und daß Paciuolo nicht auf algebraischem Wege zur Lösung $x = \frac{b}{2}$ gekommen war, sieht man daraus, daß er in erster Linie als Wurzel der Gleichung $x^2 + 6\frac{1}{4} = 5x$ die Quadratwurzel aus $6\frac{1}{4}$ angibt („sel n° fosse eq̄le al quadrato de la $\cdot\frac{1}{2}\cdot$ de le cose alora la . R̸. de ditto q̄drato: cioe essa mita de cose serebe el quesito"). G. Eneström.

2 : 325, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S 285. — **2 : 334**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 339**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 351**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87.

2 : 358. Herr Cantor übergeht hier stillschweigend ein bei Chuquet vorkommendes Beispiel der Auflösung quadratischer Gleichungen, das meines Erachtens von besonders großem Interesse ist, nämlich das 2. Beispiel der Seite 805 der Ausgabe von Marre. Es handelt sich um die Gleichung $3x^2 + 12 = 12x$ und gemäß der von Chuquet aufgestellten allgemeinen Regel wird als Lösung $x = 2 \pm \sqrt{4-4}$ angegeben. In betreff des Wurzelwertes fügt Chuquet hinzu: „reste .0. Donc R̸.²0. adioustee ou soustraicte auec .2. ou de .2. monte .2. qui est le nōbᵉ. que lon demande". Chuquet rechnet also hier mit Null als mit einer wirklichen Größe und wenn man von den indischen Mathematikern absieht, so ist dies meines Wissens nicht vor Chuquet vorgekommen. In der Geschichte der Verallgemeinerung des Zahlenbegriffs bezeichnet also das *Triparty* des Chuquet einen Fortschritt, der bisher unbeachtet zu sein scheint (vgl. z. B. J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 155; *Encyclopédie des sciences mathématiques* I: 1, Leipzig 1904, S. 33, Fußnote 147).

G. Eneström.

2 : 358. Die Angabe: „Für Chuquet . . . gab es also keine Auflösung $x = 0$" ist zum mindesten ein wenig irreleitend, denn tatsächlich gibt es bei Chuquet Aufgaben, wo bei der Auflösung eine der gesuchten Größen den Wert Null bekommt, ohne daß er diesen Wert als unmöglich verwirft (siehe z. B. S. 641 der Ausgabe von Marre: „Et Je treuue .30. 20. 10. 0. et moiñs .10. qui sont les cinq nombres que Je vouloye auoir").

Schwieriger ist dagegen zu entscheiden, ob Chuquet Null als Wurzel einer aufgestellten *Gleichung* anerkennen will. In den meisten Fällen, wo wir die Lösung $x = 0$ angeben würden, behauptet er ausdrücklich, daß die gesuchte Größe „impossible" oder „irreperible" sei, aber zuweilen fehlt diese Behauptung, z. B. S. 778 der Ausgabe von Marre, wo es sich um die Gleichung $\sqrt{\frac{12x}{3x}} = \sqrt{5}$ handelt. Aus dieser Gleichung leitet Chuquet zuerst $\sqrt{4} = \sqrt{5}$ her und bemerkt dann: „Et pour tant que les parties sont sembles et Inegales cest signe que le nombre que lon βche(!) est .0.". G. Eneström.

2 : 360, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314. — **2 : 379**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 386**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 392**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82 — **2 : 395**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 396**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 397**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/07, S. 211.

---

2 : 398. Über Christoff Rudolffs Lebensverhältnisse kennt man eigentlich fast gar nichts. Daß er in Jauer in Schlesien geboren wurde, ist ja sehr wahrscheinlich, da er sich selbst „vom Jawer" nennt. Daß er ein Schüler des Grammateus war, erwähnt er am Schluß seiner Algebra, und die betreffende Stelle hat Gerhardt (*Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. 38, Fußnote 2) vollständig zum Abdruck gebracht. Sonst habe ich nur die folgende, freilich sehr unbedeutende biographische Notiz über Rudolff auffinden können, die er selbst im 210. Beispiele seiner Algebra (Bl. R ii^b) mitgeteilt hat:

> Mit diesem exempl ward ich zu Breslaw von meinē guten freund Johansen Seckerwitz, Rechenmeister daselbs, durch die coss zu machē ersucht, war zur selbigen zeyt der regl quantitatis nit bericht.

Es handelt sich um eine Aufgabe, die durch die folgenden drei Systeme von Gleichungen gelöst wird:

$$6x_1 + 9y_1 + 15z_1 = 32 \cdot 7, \quad x_1 + y_1 + z_1 = 32,$$
$$6x_2 + 9y_2 + 15z_2 = 32 \cdot 10, \quad x_2 + y_2 + z_2 = 32,$$
$$6x_3 + 9y_3 + 15z_3 = 32 \cdot 13, \quad x_3 + y_3 + z_3 = 32,$$

und bei deren Lösung Rudolff selbst die sogenannte „regula quantitatis", d. h. zwei unbekannte Größen anwendet. Rudolff hat sich also vor 1525 einige Zeit in Breslau aufgehalten. Daß er schon 1544 gestorben war, scheint aus einer Stelle der *Arithmetica integra* (Bl. 226^a) hervorzugehen, wo Stifel Rudolff erwähnt und dabei den Ausdruck „iam in Christo quiescentem" anwendet.

Herr Cantor nennt die erste von Rudolff veröffentlichte Arbeit „eine Coss", und in der Tat ist *Die Coss* der von Stifel herrührende Titel der Neuausgabe von 1553—1554, während Rudolff selbst seiner Arbeit den Titel *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeincklich die Coss genent werden* gab.

In seiner Widmungsschrift erwähnt Rudolff, daß er „in kürz dise regeln Algebre in latein ... in druck geben" will, aber erschienen ist diese lateinische Ausgabe sicherlich nicht. Dagegen ist sie vielleicht handschriftlich aufbewahrt, und Chasles (siehe *Geschichte der Geometrie*, übertr. von L. A. Sohncke, Halle 1839, S. 638—639; vgl. *Catalogo della biblioteca Boncompagni* I, Roma 1898, S. 137) erwähnt eine andere lateinische Übersetzung im Cod. 7365 der Nationalbibliothek in Paris.

G. Eneström.

2 : 399, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107—108.

---

2 : 399. Die Wurzelzeichen bei Rudolff sehen nicht so aus, wie Herr Cantor Z. 15 angibt, sondern haben die folgende Form



Wenn man unter Bezugnahme auf die in der Dresdener lateinischen Algebra vorkommenden Punkte (vgl. was Herr CANTOR weiter oben S. 243 nach WAPPLER mitteilt) den kleineren Strich des Quadratwurzelzeichens als einen Punkt auffaßt, so könnte man sagen, daß RUDOLFF als Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzelzeichen bzw. ein, drei und zwei miteinander durch kleine schräge Striche verbundene Punkte benutzt und in jedem Falle an der rechten Seite des letzten Punktes einen längeren schrägen Strich, der aufwärts führt, hinzufügt. Diese Wurzelzeichen hat auch J. SCHEYBL in seiner Algebra benutzt (siehe *Euclidis . . . sex libri priores . . . algebrae porro regulae . . .*, Basileae 1550, S. 35).

Die meisten Abbildungen der RUDOLFFschen Zeichen für $\sqrt[3]{\ }$ und $\sqrt[4]{\ }$, die ich gesehen habe, sind ungenau, wenn auch nicht so ungenau wie die der *Vorlesungen*. Gut sind die Abbildungen in GERHARDTS zweitem Artikel *Zur Geschichte der Algebra in Deutschland* (Monatsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1870, S. 152); TROPFKE (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 191) hat unrichtig vor dem ersten Punkte einen kleinen Strich, und noch weniger genau sind die Abbildungen bei TREUTLEIN (*Die deutsche Coss;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **2**, 1879, S. 45), wo der erste Punkt in ein *e*-ähnliches Zeichen verwandelt worden ist.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß RUDOLFF immer seine Wurzelzeichen „Punkte" nennt (vgl. z. B. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. 57, Fußnote 2), obgleich sie tatsächlich wie Haken oder wie Haken mit Zickzacklinie aussehen.

G. ENESTRÖM.

2 : 401, 405, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 89.

2 : 413. Der Passus (Z. 32—34): „Dazu gehört weniger ein in Dreiecksgestalt angeordnetes Einmaleins, für welches wir (S. 229) einen jüdischen Vorgänger denken müssen" sollte gestrichen werden, denn nach STEINSCHNEIDER (*Intorno a* JOHANNES DE LINERIIS (DE LIVERIIS) *e* JOHANNES SICULUS; Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, S. 350; vgl. *Brani dell'aritmetica d'*ELIA MISRACHI, Rom 1866, S. 59—62) kommt die fragliche Tafel in der hebräischen Originalausgabe (1534) der Schrift des MISRACHI *nicht* vor. WERTHEIM, der nur die Ausgabe oder vielleicht richtiger die Bearbeitung von MÜNSTER und SCHECKENFUCHS (1546—1547) benutzt hat, irrt folglich, wenn er in seiner Schrift *Die Arithmetik des* ELIA MISRACHI (2. Aufl., Braunschweig 1896, S. 17) behauptet, daß MISRACHI den Gebrauch des Einmaleins lehrte.

G. ENESTRÖM.

2 : 419. Hier gibt Herr CANTOR nach UNGER Auskunft über die verschiedenen von JACOB KÖBEL verfaßten Rechenbücher. Indessen hat KÖBEL noch ein Rechenbuch veröffentlicht, das meines Wissens in keiner historischen oder bibliographischen Arbeit beschrieben worden ist. Der Titel lautet:

Ein Neuw Reche || püchlein/ Wie man uff den | Linien vnd Spacien/ mit Re chenpfenningen/ leichtlich Re | chen Lernen solle/ Mit viln zusetzen/ vor || nie Getrückt/ vnd ytzunt zu Op penheym offenbart. || Wie mann ein Wurtzel/ auß einer || Quadryrten/ oder Cubirten Zalen/ auff | den Linien

vnd Spacien Erlernen solle. ‖ Wie man̄ Ewiglich alle Zeit Jar ‖ vn̄ Monat/ ein Neuwē Monschein/ uff ‖ den Linien vn̄ Spacien/ nach Mittelm Lauff/ Erfaren solle. ‖ Getrückt zu Oppenheym/ Mit ‖ Keyserlichē Freiheiten/ vn̄ schwerē penē ‖ inn VI: Jaren nit nachtzutrücken.

Die Auflage hat 100 römisch numerierte und dann noch 4 ungezählte Blätter, die das Register entbalten. Oh als Format Quart oder Oktav angegehen werden soll, dürfte kaum entschieden werden können; die Bogen A, C, F, I, M, P, S enthalten 8, die Bogen Aa, B, D, E, G, H, K, L, N, O, Q 4 Blätter. Am Ende der letzten Seite findet sich das Druckjahr „Anno etc. 1.5.22 .·.". Der Verfasser ist nicht auf dem Titelhlatt genannt, aher das Vorwort heginnt: „Jacob Köbel Statschreiher zu Oppenheym etc. Zu dem Leser".

Der Titel der Auflage ist nicht vollständig, denn das Buch enthält nicht nur Rechnen auf Linien. Der vierte Teil (Bl. LXVII—LXXVIII) bringt Bruchlehre, der fünfte Teil (Bl. LXXVIII—XCII) Regeldetri sowie verwandte Regeln nebst einigen Scberzaufgaben. Den Schluß hildet die im Titel erwähnte Mondrechnung.

Von dieser Auflage besitze ich selbst ein Exemplar; ein anderes Exemplar besaß M. Chasles (siehe *Catalogue de la bibliothèque scientifique ... de M. Chasles*, Paris 1881, S. 206). G. Eneström.

---

2 : 420, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 83.

---

2 : 420. In seinem Rechenhuch von 1522 hediente sich Köbel des Linienrechnens sowohl hei der Kuhik- als hei der Quadratwurzelausziehung. Als Beispiel der Kubikwurzelausziebung kommt bei ihm $\sqrt[3]{12167} = 23$ vor (Bl. LIX—LX). G. Eneström.

---

2 : 420. Die zwei in der Fußnote 7 zitierten, jetzt nicbt leicht zugänglicben Programme von B. Berlet sind 1892 zum zweitenmal herausgegehen unter dem Titel: *Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu rechnen. Die Coss von Adam Riese* (Leipzig 1892, VIII + 62 S. + Porträt + Facsim.), versehen mit einem Vorwort, worin die früheren hibliographiscben Angahen teilweise ergänzt wurden. G. Eneström.

---

2 : 421. Z. 10 dürfte „die drei ersten" statt „jedes" zu setzen sein. Vermutlich bängt die Angahe des Herrn Cantor damit zusammen, daß er S. 422 auf Grund eines Mißverständnisses eine nicht existierende Auflage des *Büchleins auff den Schöffel, Eimer vnd Pfundtgewicht* aufgeführt hat (vgl. die folgende Bemerkung). G. Eneström.

---

2 : 422. Z. 25 soll ohne Zweifel „1536" statt „1533" stehen; wenigstens kennen Berlet und Unger nur eine Auflage vom *Büchlein auff den Schöffel, Eimer vnd Pfundtgewicht*, nämlich die 1536 von Lotter in Leipzig gedruckte. Freilich steht dort auf dem Titelhlatt: „durch Adam Riesen 1533", und vermutlich hat Herr Cantor daraus gefolgert, daß das Büchlein schon 1533 nicht nur verfaßt, sondern auch herausgegehen wurde. G. Eneström.

2 : 425, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507.

2 : 426. Hinsichtlich der acht bei Rudolff vorkommenden Gleichungsformen ist besonders die Behandlung der sechsten von Interesse, weil daraus hervorgeht, wie wenig man noch am Anfange des 16. Jahrhunderts damit vertraut war, daß eine Gleichung mehr als eine Wurzel haben kann. Nachdem nämlich Rudolff die Lösung $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ der Gleichung $ax^2 + c = bx$ angegeben hat, fährt er fort (Bl. $\mathrm{H}\,\mathrm{I}^a$):

> Bey diser equation soltu merckē, wañ die größer quātitet mer inhelt dañ die kleiner so muß radix quadrata addirt werdē. bedeūt aber die größer minder dann die kleiner so muß sie subtrahirt werden von $\frac{1}{2}$ des mittern quocients.

Nun bedeutet nach Rudolffs Terminologie (vgl. Bl. $\mathrm{G}\,\mathrm{VII}^a$) „die größer quantitet" den Koeffizienten von x^2 und „die kleiner quantitet" den Koeffizienten von x^0, aber aus seinen Beispielen geht hervor, daß diese Ausdrücke hier bzw. die Koeffizienten von x und x^0 bedeuten müssen. Seine Bemerkung enthält also, daß die Gleichung $ax^2 + c = bx$ nur eine einzige Lösung hat, nämlich $x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$, wenn $b > c$, und $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$, wenn $b < c$ (vgl. Treutlein, *Die deutsche Coss;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **2**, 1879, S. 75). Wie Rudolff diese durchaus willkürliche Regel aufstellen konnte, gibt er nicht an; am Schluß seines vom Jahre 1526 datierten Rechenbuches hat er auch anerkannt, daß sie unrichtig ist, und daß jede Gleichung von der Form $ax^2 + c = bx$ in Wirklichkeit zwei Wurzeln hat, obgleich die Aufgabe, die durch die Gleichung gelöst werden soll, sehr oft derart ist, daß die eine Wurzel nicht angewendet werden kann (vgl. Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland,* München 1877, S. 58, Fußnote 2). Auf diese Berichtigung (die Stifel in die Neuausgabe der Rudolffschen Arbeit Bl. 143^b eingefügt hat) deuten die ziemlich dunkeln Worte des Herrn Cantor (S. 427 Z. 21—22) hin: „Ja auch die Zwiespaltigkeit, um Rudolffs Ausdruck anzuwenden, bringt er erst nachträglich zur Rede".

G. Eneström.

2 : 427, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314—315.

2 : 427. Es ist richtig, daß Rudolff die zweite Unbekannte, die er „quantitet" nennt, durch q darstellt, aber diese Abkürzung ist nicht die einzige und noch weniger die erste, die er anwendet. In der Tat wird „quantitet" Bl. $\mathrm{P}\,\mathrm{VII}^a$ definiert, und in den Rechnungen werden dann teils das ganze Wort quantitet (z. B. Bl. $\mathrm{P}\,\mathrm{VII}^b$ Z. 1), teils die Abkürzungen quanti: (z. B. Bl. $\mathrm{Q}\,\mathrm{I}^b$ Z. 1), quant: (z. B. Bl. $\mathrm{Q}\,\mathrm{III}^a$ Z. 13), quantit: (z. B. Bl. $\mathrm{Q}\,\mathrm{IV}^b$ Z. 10), quāt: (z. B. Bl. $\mathrm{Q}\,\mathrm{VIII}^a$ Z. 3 v. u.), quā (z. B. Bl. $\mathrm{Q}\,\mathrm{VIII}^a$ Z. 2 v. u.), quan (z. B. Bl. $\mathrm{Q}\,\mathrm{VIII}^a$ Z. 5 v. u.) und qu (z. B. Bl. $\mathrm{R}\,\mathrm{I}^b$ Z. 5) benutzt. Erst Bl. $\mathrm{R}\,\mathrm{I}^a$ erscheint die Abkürzung q oder q:, und von nun an wendet Rudolff dieselbe vorzugsweise an. Der hier hervorgehobene Umstand ist für die Geschichte der mathematischen Zeichensprache von Interesse, weil er zeigt, wie sich die Zeichen allmählich und fast unbewußt aus den Abkürzungen entwickelten.

G. Eneström.

2 : 428. Außer der von Herrn Cantor erwähnten unbestimmten Aufgabe gibt es in Rudolffs Algebra noch viele andere Aufgaben dieser Art (siehe Bl. $\mathrm{L}\textsc{viii}^{a,b}$ $\mathrm{R}\textsc{i}^{a}$, $\mathrm{R}\textsc{iv}^{a}$—$\mathrm{R}\textsc{vii}^{a}$). Von besonderem Interesse sind die fünf Aufgaben 213—217, weil die Lösungen ganze Zahlen sein müssen; es handelt sich nämlich um Personen, die zu einer Zeche zusammenkommen oder um Verkauf von Pferden, Ochsen usw. In jeder Aufgabe werden drei Zahlen gesucht, und Rudolff löst die Aufgabe dadurch, daß er die erste Zahl als die eigentlich Unbekannte annimmt, und die zwei übrigen als Funktionen dieser Unbekannten ausdrückt. Auf diese Weise bekommt er vorläufig für die fünf Aufgaben bzw. die Lösungen:

[213] $x,\ 30 - 3\frac{2}{3}x,\ 2\frac{2}{3}x;$

[214] $x,\ 20 - 5x,\ 4x;$

[215] $x,\ 6\frac{2}{3} - 1\frac{2}{3}x,\ 13\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x;$

[216] $x,\ 26 - 2x,\ x - 7;$

[217] $x,\ 100 - 3\frac{2}{19}x,\ 2\frac{2}{19}x.$

Dann gibt er an, wie viele ganzzahlige Werte x in jedem Falle haben kann, nämlich:

$$[213]\ x = 3,\ 6;\quad [214]\ x = 1,\ 2,\ 3;\ [215]\ x = 1;$$
$$[216]\ x = 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12;\quad [217]\ x = 19.$$

Die Aufgaben [214] und [216] sind ja sehr einfach, da man nur zu beobachten hat, daß x nicht zu groß oder zu klein genommen wird. Auch die Aufgaben [213] und [217] sind nicht besonders verwickelt, weil man sofort sieht, daß x ein Multipel von 3 bzw. von 19 sein muß. Etwas schwieriger ist die Aufgabe [215], weil x so gewählt werden muß, daß $\frac{1+2x}{3}$ eine ganze Zahl wird. Auch hier gibt Rudolff die Lösung richtig und vollständig an, denn der Wert $x = 4$, wodurch die zweite Zahl 0 wird, was von seinem Gesichtspunkte aus unzulässig.

Rudolffs Verfahren kann als der erste Schritt zu einer methodischen Lösung unbestimmter Aufgaben ersten Grades in ganzen Zahlen bezeichnet werden. Den zweiten Schritt machte Bachet de Méziriac, indem er zeigte, wie man die ganzzahligen Werte der Ausdrücke von der Form $\frac{a+bx}{c}$ ermitteln soll.

G. Eneström

2 : 429, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201—202.

2 : 429. Den meisten Lesern dürfte es unverständlich sein, wie Herr Cantor behaupten kann (Z. 1—2), daß die Druckwerke des Apianus und des Riese, wo die „regula cecis" vorkommt, später als Rudolffs Rechenbuch, dessen Druckjahr nach der zweiten Auflage der *Vorlesungen* (S. 398) 1532 ist, veröffentlicht wurden. In betreff des Rechenbuches von Apianus (1532) erklärt sich die Sache, wenn man die erste Auflage der *Vorlesungen* einsieht, denn dort findet man (S. 365) die gewöhnliche Angabe (1526) hinsichtlich des Druckjahres des Rechenbuches von Rudolff. Unerklärlich ist dagegen die Cantorsche

Behauptung in bezug auf Riese, denn Berlet (*Adam Riese*, Leipzig 1892, S. 24) und Unger (*Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung*, Leipzig 1888, S. 50) haben darauf hingewiesen, daß Riese die „regula cecis" in seiner *Rechenung auff der linihen vnd federn* behandelt, und dies Buch erschien, wie Herr Cantor sowohl in der ersten als in der zweiten Auflage (S. 421) der *Vorlesungen* richtig angibt, schon 1522. Nun kennt man allerdings kein Exemplar dieser ersten Auflage, aber Unger hat ein Exemplar der zweiten, im Jahre 1525 erschienenen Auflage eingesehen, und da er ausdrücklich angibt, daß sich darin die „regula cecis" findet, kann man schon hieraus folgern, daß diese Regel jedenfalls in einem vor Rudolffs Rechenhuch veröffentlichten Druckwerke vorkommt. Daß die Regel auch in der ersten Auflage von 1522 vorkam, hat man nicht den geringsten Grund zu bezweifeln.

Über Rieses Verfahren bekommt man bei Berlet (a. a. O.) und Unger (a. a. O. S. 100) nähere Auskunft. Sind drei Unbekannte vorhanden, so eliminiert Riese zuerst eine derselben und erhält dadurch eine Gleichung von der Form $ax + by = c$. Dann zerlegt er durch Probieren c in zwei Teile so, daß der eine Teil durch a und der andere Teil durch b teilbar ist, also ganz wie Initius Algebras (vgl. Biblioth. Mathem 7_3, 1906/7, S. 392). Sind nur zwei Unbekannte vorhanden, so handelt es sich natürlich um eine bestimmte Aufgabe, ist dagegen die Zahl der Unbekannten größer als drei, so muß man c in mehr als zwei Teile zerlegen.

Daß ein Beispiel der „regula cecis" schon in Widmans Rechenbuch von 1489 vorkommt, habe ich oben in der Bemerkung zu 2 : 232 erwähnt.

G. Eneström.

---

2 : 430, siehe BM 2_3, 1901, S. 145.

---

2 : 437—438. Wenn es sich lediglich um eine Geschichte der sogenannten Divinationsaufgaben und deren Lösungen handelt, so kann ohne Zweifel die Behandlung des hier erwähnten Kunststückchens Stifels sowie die Bemerkung: „welchem wir nirgend anderswo begegnet zu sein uns erinnern können" von Interesse sein — ich kenne auch keinen früheren Verfasser, bei dem genau dies Kunststückchen vorkommt. Legt man dagegen Gewicht auf die Herausarbeitung des eigentlichen mathematischen Ideengehalts (vgl. Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 10, Fußnote 1), so ist hier eine andere Behandlungsweise erwünscht. Dann sollte zuerst darauf hingewiesen werden, daß das Kunststückchen offenbar ein sehr einfaches Beispiel der Ta-yen-Regel ist, die Herr Cantor in den *Vorlesungen* schon vielfach erwähnt und behandelt hat (siehe 1^2, S. 643—644; 2^2, S. 26, 240, 287, 428). Nun kannte man schon im 15. Jahrhundert in Deutschland, wie ein solches Beispiel gelöst werden soll (vgl. oben die Bemerkung zu 2 : 240), und die einzige Schwierigkeit in diesem Falle ist offenbar, ein Multipel von a zu finden, das durch $a + 1$ geteilt 1 als Rest liefert. Daß a^2 ein solches Multipel ist, ersieht man sogleich, weil $a^2 = (a+1)(a-1) + 1$, und dadurch wird der lange von Herrn Cantor gebrachte Beweis ohne weiteres unnötig, denn es genügt auf S. 644 des 1. Bandes der *Vorlesungen* zu verweisen. Auf der anderen Seite war es im 16. Jahrhundert nicht ganz leicht zu entdecken, daß a^2 wirklich das gesuchte Multipel ist, und aus diesem

Grunde verdient ohne Zweifel das Beispiel erwähnt zu werden; sonst gibt es bekanntlich in fast jedem größeren Rechenbuch des 16. Jahrhunderts Probleme ähnlicher Art, d. h. wo es sich darum handelt, Zahlen zu bestimmen, wenn man die Reste kennt, die bei gewissen Divisionen übrigbleiben.

G. Eneström.

2 : 440, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325.

2 : 444. Auch Köbel hat Kubikwurzelausziehungen mittels Rechenpfennigen gelehrt (siehe oben die Bemerkung zu 2 : 420).

2 : 449, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140.

2 : 452. Hier sollte Z. 8 meines Erachtens $\sqrt{3} \sim \frac{16}{9}$ statt $3 \sim \left(\frac{16}{9}\right)^2$ gesetzt und der folgende Passus (Z. 9—14): „Es ist hier . . . Durchmesser galt" gestrichen werden. Es ist durchaus richtig, daß S. Günther am Ende der von Herrn Cantor zitierten Fußnote die Annäherungsformel $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \sim \left(\frac{2}{3}a\right)^2$, d. h. $\sqrt{3} \sim \frac{16}{9}$ als „einen ganz eigenartigen Versuch, die beiden ältesten Werte von π durch eine anderweite Flächentransformationsaufgabe unter einander in Beziehung zu setzen" bezeichnet, aber Herr Cantor würde sicherlich seinem alten Schüler einen wirklichen Dienst erwiesen haben, wenn er die Günthersche Bemerkung *lediglich* als einen Scherz betrachtet hätte. Man braucht nämlich nicht besonders scharfsinnig zu sein, um einzusehen, wie unzutreffend diese Bemerkung ist, da es sich gar nicht um zwei Werte von π sondern um $\sqrt{3}$ und $\frac{16}{9}$ handelt, und diese zwei Zahlen sind ja *nur* aus dem Grunde untereinander in Beziehung gesetzt, weil die eine eine *irrationale* Zahl ist. Wenn Herr Cantor selbst die Formel $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \sim \left(\frac{2}{3}a\right)^2$ einen „ungemein eigentümlichen Zufall, wenn wirklich ein Zufall" nennt, so erlaube ich mir auf S. 377—378 der 3. Auflage des 1. Bandes der *Vorlesungen* hinzuweisen, wo er durchaus vergessen hat, einen „ungemein eigentümlichen Zufall" genau derselben Art hervorzuheben. Hier erwähnt Herr Cantor, daß bei Heron zweimal eine geometrische Konstruktion vorkommt, die der Annahme $\sqrt{3} \sim \frac{7}{4}$ entspricht. Da nun bekanntlich bei den Indern der Wert $\pi = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ nachgewiesen worden ist, so ist es eigentlich eine Inkonsequenz, daß Herr Cantor nicht an dieser Stelle die folgende Bemerkung einfügt: „Es soll hier auf den ungemein eigentümlichen Zufall aufmerksam gemacht werden, daß von den beiden als gleichwertig angenommenen Zahlen die eine $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ bei den Indern, die andere 3 bei nahezu allen Völkern des Altertums als die Verhältniszahl des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser galt". Denn der Verfasser der *Geometria deutsch* kannte sicherlich ebensowenig den ägyptischen Wert für π als Heron den indischen.

G. Eneström.

2 : 454, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 479—480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141; **7**$_3$, 1906/7, S. 290—291, 385. — **2 : 481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **8**$_3$, 1907/8, S. 83. — **2 : 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 483,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S 291. — **2 : 484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 385—386. — **2 : 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87; **7**$_3$, 1906/7, S. 291, 386. — **2 : 503, 505,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 292. — **2 : 509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 524,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 90. — **2 : 527,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 529,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91. — **2 : 530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 531,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212. — **2 : 532,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 292; **8**$_3$, 1907/8, S. 84. — **2 : 535,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 536,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2 : 537,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 539,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 293. — **2 : 541,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 547,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 84 — **2 : 548,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401 — **2 : 550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2 : 561,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 566,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 85. — **2 : 567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510 — **2 : 572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207; **8**$_3$, 1907/8, S. 85—86. — **2 : 582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 593,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270.

---

2 : 603. Die hier nach einem Antiquariatskataloge zitierte, angeblich 1600 in London gedruckte und von einem gewissen Hamson herrührende englische Übersetzung von Pitiscus' Trigonometrie existiert sicherlich nicht; vermutlich ist 1600 Druckfehler statt 1630, wie Hamson ganz gewiß Druckfehler statt Handson ist. Die erste englische Übersetzung von Pitiscus' Trigonometrie ist ohne Zweifel die 1614 in London erschienene; diese hat den Titel: „Trigonometry: or the doctrine of triangles. Now translated into English by Ra. Handson. Whereunto is added (for the Marriners vse) certaine Nauticall questions, together with the finding of the variation of the compasse. All performed arithmetically, without Mappe, Sphaere, Globe, or Astrolabe, by the said R. H.".

Die Arbeit ist in Quartformat und besteht aus drei Teilen [I:(12) + 176 S.; II:33 + (3) S.; III:(92) S.]. Der dritte Teil hat den Spezialtitel: „A canon of triangles: or, the tables of sines, tangents and secants, the radius assumed to be 100,000".

Eine spätere Auflage dieser Übersetzung mit dem Druckjahre 1630 findet sich im British museum, und vermutlich ist diese Auflage in dem von Herrn Cantor zitierten Antiquariatskataloge gemeint. G. Eneström.

---

2 : 603—604, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108. — **2 : 605,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 86. — **2 : 610,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 388. — **2 : 611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S.277; **2**$_3$, 1901, S. 146.

2 : 612. Da Z. 19—23 die Göttinger Handschrift der Algebra des Initius Algebras im Vorübergehen erwähnt wird, könnte man die Bemerkungen, die sich auf diese Arbeit beziehen, hier unterbringen. Jetzt beschränke ich mich darauf hinzuweisen, daß die Algebra einen kleinen Beitrag zur Geschichte der Auffindung der Faktoren ganzer Zahlen bietet. Das Verfahren des Initius Algebras ist wesentlich das folgende (siehe M. Curtze, *Die Algebra des Initius Algebras;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902, S. 545—548). Ist N die gegebene ganze Zahl, und wird $N = n^2 + a$ gesetzt, wo $a < 2n + 1$, so untersucht man, ob die Zahlen $\frac{m^2 + a}{n - m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ ganz oder gebrochen sind; ist $\frac{m^2 + a}{n - m}$ eine ganze Zahl, so ist $n - m$ ein Faktor von N. Die Richtigkeit der Regel ist leicht einzusehen, denn

$$\frac{N}{n-m} = \frac{n^2+a}{n-m} = \frac{n^2-m^2+m^2+a}{n-m} = n+m+\frac{m^2+a}{n-m}.$$

G. Eneström.

---

2 : 612—613, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2 : 613**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2 : 614**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 214, 389; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86—87. — **2 : 622**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87. — **2 : 623**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 624, 625**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2 : 626**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2 : 632**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 644**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 666, 667**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 88—89. — **2 : 669**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 674**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 687**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294. — **2 : 689**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89. — **2 : 693**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394—395. — **2 : 700, 701, 703**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—272.

---

2 : 703. Die englische Übersetzung von Pitiscus' Trigonometrie durch R. Handson (nicht „Hamson") erschien zuerst 1614 (vgl. oben die Bemerkung zu **2** : 603). Der Verweis auf Pitiscus in Nepers *Descriptio* von 1614 bezieht sich also wahrscheinlich auf das lateinische Original.

G. Eneström.

---

2 : 704, 705, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 272—273.

---

2 : 712. Über die hier erwähnte *Logistica prosthaphairesis astronomica* (Z. 3 lies 1609 statt 1619) hat A. von Braunmühl nähere Auskunft gegeben teils in dem Aufsatze *Zur Geschichte der prosthaphaeretischen Methode in der Trigonometrie* (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, S. 15—29), den Herr Cantor S. IX seines Vorwortes nennt, teils in den *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I (Leipzig 1900, S. 197—199). Da Braunmühl den Verfasser „einen gewissen Melchior Jöstel, der aus Dresden stammte

und in Wittenberg Mathematik lehrte" nennt (Herr CANTOR sagt nur, daß JÖSTEL ein Wittenberger Mathematiker war), mache ich darauf aufmerksam, daß nach B. BERLET (*ADAM RIESE*, Leipzig 1892, S. 4) MELCHIOR JÖSTEL am 10. April 1559 zu Dresden geboren ist, ein Schüler von ABRAHAM RIESE (dem Sohn des berühmten ADAM RIESE) war, später in Wittenberg studierte und 1584 eine Arbeit seines Lehrers mit dem Titel: „Algorithmus von flechen, so an art vnd gestalt einander enlich vnd gleichförmig vnd mit geraden linien beschlossen werden" ins Lateinische übersetzte; er scheint 1586 selbst einen Traktat über irrationale Zahlen verfaßt zu haben. G. ENESTRÖM.

---

2 : 714, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 89—90. — **2 : 715,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **6**$_3$, 1905, S. 404—405. — **2 : 726,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 90. — **2 : 727,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 392. — **2 : 741,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 765,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142; **5**$_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358; **7**$_3$, 1906/7, S. 392—393.

---

2 : 773. Wie Herr CANTOR richtig annimmt, ist die Arbeit von BACHET, die hier unter dem Titel „Eléments d'arithmétique" erwähnt wird, niemals von ihrem Verfasser herausgegeben worden. Indessen wurde das Manuskript der Arbeit, deren wirklicher Titel *Elementorum arithmeticorum libri 13* lautet, schon vor etwa 30 Jahren von Herrn CH. HENRY in der Bibliothek des „Institut" in Paris wiedergefunden, und Herr HENRY hat über den Inhalt derselben ausführliche Auskunft gegeben im X. Abschnitte der Abhandlung: *Recherches sur les manuscrits de PIERRE DE FERMAT suivies de fragments inédits de BACHET et de MALEBRANCHE* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, S. 619—641; S. 95—117 des Sonderabzuges). G. ENESTRÖM

---

2 : 775, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405; **7**$_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 393. — **2 : 791,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203—204; **6**$_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518; **6**$_3$, 1905, S. 211; **7**$_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe

BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3:14—15**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3:17**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3:22**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3:23**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 297—298; **8**$_3$, 1907/8, S. 91. — **3:24**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3:25**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399. — **3:26**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **7**$_3$, 1906/7, S. 394 — **3:37**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 91—92. — **3:39**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 407. — **3:40**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3:45—48, 49, 50**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3:57**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3:63**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3:68**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 299. — **3:70**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3:78**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 92. — **3:82**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3:97**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 394 — **3:100**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149; **7**$_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3:102**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S 318; **7**$_3$, 1906/7, S. 300. — **3:112**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210; **6**$_3$, 1905, S. 318. — **3:116**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:117**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S 518. — **3:118**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 92—93. — **3:122**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 301. — **3:123**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399; **7**$_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3:124**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3:126**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288. — **3:129—130**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 93. — **3:131**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210 — **3:151**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3:167, 172—173**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3:174**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3:183**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 482. — **3:188**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S 241. — **3:201**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S 513. — **3:207**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3:215**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3:218**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513 — **3:220**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3:224**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:225, 228**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3:230**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 211—212. — **3:232**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **6**$_3$, 1905, S. 212; **7**$_3$, 1906/7, S. 303; **8**$_3$, 1907/8, S. 94. — **3:244—245**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 205, 413; **7**$_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3:246**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3:250**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:270**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 395. — **3:276**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S 304 — **3:303**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3:306**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304. — **3:330—331**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3:337**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3:364**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3:365**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S 94. — **3:367**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 215. — **3:370—371**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3:382**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3:384**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319. — **3:397**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 94. — **3:398**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 305—306; **8**$_3$, 1907/8, S. 94—95. — **3:408**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3:412**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 306 — **3:447, 455**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3:473**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3:477, 479**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3:480**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 95. — **3:497, 498**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3:507**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72 — **3:521**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3:527**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 95. — **3:535**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S 401. — **3:536**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3:560**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319—321. — **3:565**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3:571**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72. — **3:578**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3:582**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 307. — **3:586**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309.

---

3 : 593. Die Bemerkung (Z. 17): „Der Vorteil einer solchen oberen Grenze ist besonders offenkundig“ ist richtig nur unter der Voraussetzung, daß die Gleichung $\Phi(x) = 0$ keine negativen Wurzeln hat, deren numerische Werte $> e$ sind, denn sonst können die Faktoren der Gleichungskonstante, die $\overline{\gtrless} e$ sind, nicht von vornherein von der Prüfung ausgeschlossen werden.

G. Eneström.

3:609, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309—310. — **3:612**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 307—308. — **3:614—615**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90; **7**$_3$, 1906/7, S. 308. — **3:616**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 214, 408. — **3:636—637**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3:646—647**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3:652**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3:660**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3:667**, siehe

BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 682,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442.

---

3 : 689. Der Schluß der Seite sollte auf folgende Weise modifiziert werden:

Den Jahren 1742—1745 gehört ein Briefwechsel an, welcher für die Geschichte der Reihenlehre von Bedeutung ist, der Briefwechsel zwischen NIKOLAUS I BERNOULLI und EULER. Dieser Briefwechsel besteht aus sechs Briefen (16. Januar 1742, 1. September 1742, 10. November 1742, 14. Mai 1743, 4. Februar 1744, 17. Juli 1745) von EULER und fünf Briefen (13. Juli 1742, 24. Oktober 1742, 6. April 1743, 29. November 1743, 20. April 1745) von BERNOULLI. Die vier ersten Briefe von BERNOULLI wurden 1843 von P. H. FUSS in der *Correspondance mathématique* (II, S. 681—713), die übrigen Briefe 1862 von P. H. FUSS und N. FUSS in EULERS *Opera posthuma* (I, S. 519—549) veröffentlicht.

Auf Grund dieser Modifikation sollte natürlich der CANTORsche Bericht über den Briefwechsel an gewissen Stellen ergänzt werden. G. ENESTRÖM.

---

3 : 692. Hier sollten die drei ersten Zeilen gestrichen werden (vgl. die vorangehende Bemerkung), und das folgende sollte modifiziert werden. Die zwei betreffenden Briefe EULERS sind vom 4. Februar 1744 und 17. Juli 1745, der Brief BERNOULLIS vom 20. April 1745 datiert. Alle drei Briefe sind in den *Opera posthuma* (I, S. 538—549) zum Abdruck gebracht. Als Summe der Reihe $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \ldots$ hatte EULER zuerst 0.59521 angegeben, berichtigte aber diese Angabe in seinem zweiten Briefe.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 695, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 880,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95—96. — **3 : 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen.

133. Über den Mathematiker Bernardus de Villacampi. Von Verfassern, die sich mit JOHANNES DE LINERIIS und JOHANNES DE MURIS beschäftigt haben, wird als Zeitgenosse dieser zwei Mathematiker ein Pariser Gelehrter BERNARDUS erwähnt, der zuweilen „de Villacampi“ oder „de Haermais“, zuweilen nur „Philosophus“ genannt wird; nach B. BALDI (*Cronica de matematici*, Urbino 1707, S. 85) war dieser BERNARDUS „grand' Aritmetico“. Nun wird bekanntlich in gewissen Handschriften der von SCHÖNER 1534 heraus-

gegebene *Algorithmus demonstratus* einem sonst unbekannten Gernardus zugewiesen, und wenn es sich herausstellen würde, daß der fragliche Bernardus eine Algorismusschrift verfaßt hat, so könnte dieser Umstand ein Ausgangspunkt für weitere Nachforschungen über den Verfasser des *Algorithmus demonstratus* werden. Es wäre ja nicht besonders auffällig, wenn es sich zuletzt erweisen würde, daß Gernardus nur eine Verketzerung von Bernardus sei (vgl. in betreff einer ähnlichen Verketzerung Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **17**, 1884, S. 781).

Hat man irgendeinen Anlaß zu vermuten, daß Bernardus de Villacampi eine Algorismusschrift verfaßt hat? G. Eneström.

134. Über das „Quadripartitum numerorum" von Johannes de Muris. Es ist bekannt, daß Johannes de Muris in der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts eine Arbeit mit dem Titel *Quadripartitum numerorum* verfaßte, die noch im 15. Jahrhundert in hohem Ansehen stand, und von der mir fünf Handschriften bekannt sind, nämlich: Cod. Paris. anc. fonds 7190, Cod. Paris. anc. fonds 7191, Cod. Paris. fonds latin 14736 (früher fonds St. Victor 671), Cod. Vindob. 4770 und Cod. Vindob. 10954; daß es noch viele andere Handschriften der Arbeit gibt, geht aus einer Angabe von M. Curtze (Centralbl. für Bibliothekswesen **16**, 1899, S. 286) hervor. Über diese Arbeit bringen die gewöhnlichen mathematisch-historischen Handbücher sehr unvollständige Aufschlüsse. In den Cantorschen *Vorlesungen* wird nur angegeben (2^2, S. 124), daß das *Quadripartitum* „unter Anderem auch das Rechnen mit ganzen Zahlen gelehrt zu haben scheint", und als Beleg wird auf eine Abhandlung von Nagl verwiesen, wo zwei Kapitel aus dem zweiten Buche der Arbeit zum Abdruck gebracht worden sind. Etwas bessere Auskunft über den wesentlichen Inhalt derselben bietet Chasles, der angibt, daß sie ein vorzügliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra ist (siehe Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] **13**, 1841, S. 511). Die zwei ersten Kapitel des dritten Buches scheinen den sogenannten „Algorithmus de additis et diminutis", d. h. Rechnung mit algebraischen Ausdrücken, zu enthalten (siehe E. Wappler, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert,* Zwickau 1887, S. 31).

Es wäre sehr erwünscht, genauere Auskunft über den wesentlichen Inhalt des *Quadripartitum numerorum* zu bekommen. G. Eneström.

Rezensionen.

R. Meier. De Heronis aetate. Dissertatio inauguralis. Leipzig 1905. 8^0, 42 + (2) S.

Diese Abhandlung enthält eine Übersicht der Ansichten in betreff der Lebenszeit des Heron nebst Kritik der Gründe dieser Ansichten. Zuerst bemerkt der Verfasser, daß man nicht berechtigt ist, auf Grund gewisser Angaben Heron als einen Schüler des Ktesibios oder als einen Zeitgenossen des Filon von Byzanz zu betrachten. Ebenso unhaltbar findet Herr Meier die übrigen Versuche zu beweisen, daß Herons Lebenszeit vor der zweiten Hälfte des zweiten oder nach dem Ende des ersten vorchristlichen Jahrhunderts anzusetzen ist. Selbst ist er der Ansicht, daß Heron nach Hipparchos aber vor Geminos und Vitruvius gelebt hat.

Mit den meisten der kritischen Ausführungen des Herrn Meier bin ich wesentlich einverstanden. Beispielsweise hat er meines Erachtens mit Recht ein paar Annahmen von Paul Tannery als willkürlich hervorgehoben, nämlich (S. 25), daß in Griechenland Kommentatoren mathematischer Arbeiten erst dann auftraten, als die Zeit der Entdeckungen vorüber war, und (S. 26—29) daß, wenn zwei Lösungen ein und desselben Problems vorhanden sind, die von einem gewissen Gesichtspunkte aus bessere Lösung als die spätere betrachtet werden soll. Ebensosehr billige ich Herrn Meiers Bemerkung, daß ein Verfasser, der ohne weiteres „Poseidonios" zitiert, gar nicht zu einer Zeit gelebt haben muß, wo nur eine Person mit diesem Namen in Betracht kommen konnte. Um so mehr verwundere ich mich, daß Herr Meier selbst einen ähnlichen Fehler begeht, als er (S. 29) behauptet: „Si post Menelaum Hero floruit quaeque ille hac de re exposuerat, manibus tenuit — neque fugere eum poterat illius opus, quia uterque Alexandriae scripsit — vix licuit ei scriptoris nomen silentio premere neque in dubio relinquere, utrius opus vellet intelligi". Es handelt sich hier um die zwei Stellen, wo Heron in seinen *Metrika* (S. 58 und 62 der Ausgabe von H. Schöne) den Ausdruck ἐν τοῖς περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν benutzt, und aus dem Umstande, daß Heron hier keinen Verfasser nennt, folgert Herr Meier, daß Heron zu einer Zeit gelebt hat, wo es nur eine Schrift mit dem fraglichen Titel gab, also vor Menelaos, weil sonst Herons Verweis undeutlich gewesen wäre. Aber in Wirklichkeit ist diese Schlußfolgerung durchaus unberechtigt; meines Erachtens kann man ἐν τοῖς περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν am besten durch „in den Chordentafeln" wiedergeben, und Heron hatte keinen besonderen Grund, einen Verfassernamen hinzuzufügen, da die für seine Berechnungen nötigen Angaben, nämlich ch $\frac{360^0}{9} \sim \frac{1}{3} d$ und ch $\frac{360^0}{11} \sim \frac{7}{25} d$, sicherlich aus jeder Chordentafel zu entnehmen waren. Auf ganz dieselbe Weise sagt man noch heute, daß aus den Logarithmentafeln für log 2

der Wert 0.30103 erhalten wird, obgleich es ja eine außerordentlich große Anzahl von Logarithmentafeln gibt. Übrigens ist es meiner Ansicht nach nicht durchaus unmöglich, daß Heron selbst eine Chordentafel verfertigt hat, und in diesem Falle ist es augenfällig, warum kein Verfassername hinzugefügt wurde.

Wie ich schon erwähnt habe, setzt Herr Meier Herons Lebenszeit nach Hipparchos aber vor Geminos und Vitruvius an. Den „terminus post quem" folgert er aus der oben besprochenen Tatsache, daß Heron auf Chordentafeln verweist, zusammengestellt mit dem Umstande, daß Hipparchos der älteste uns bekannte Verfasser solcher Tafeln ist. Ich bin auch der Ansicht, daß Heron nach Hipparchos gelebt hat, aber da Heron ausdrücklich Archimedes zitiert und da es eigentlich nicht von großem Belang ist, besonders festzustellen, daß Heron nicht zwischen Archimedes und Hipparchos gelebt hat, bin ich persönlich geneigter zu sagen, daß Heron sicher nach Archimedes, fast sicher nach Apollonios und höchstwahrscheinlich nach Hipparchos gelebt hat. Weniger einverstanden bin ich mit Herrn Meiers Ansicht in betreff des „terminus ante quem". Daß Heron seine mechanischen Arbeiten vor Geminos verfaßt hat, schließt Herr Meier daraus, daß bei Proklos eine Stelle vorkommt, wo Heron als Mechaniker genannt wird, und welche Stelle aus gewissen Gründen aus Geminos entnommen sein muß. Aber J. G. van Pesch hat darauf hingewiesen (*De Procli fontibus*, Leiden 1900, S. 71), daß Proklos sehr oft die von ihm herangezogenen Schriften älterer Verfasser mehr oder weniger frei benutzt, und da Proklos hier nicht ausdrücklich bemerkt, daß er Geminos zitiert, so ist es sehr wohl möglich, daß Proklos selbst Herons Namen in den ursprünglichen Bericht des Geminos (z. B. statt des Namens eines älteren Mechanikers) eingesetzt hat. Ebensowenig entscheidend ist meines Erachtens der Grund, warum Herr Meier Heron vor Vitruvius ansetzt, nämlich daß bei Heron gewisse Vorrichtungen unvollständiger als bei Vitruvius behandelt werden. Dies Verhältnis kann auf verschiedene Weise erklärt werden, z. B. dadurch, daß sich Heron für diese Vorrichtungen nicht besonders interessierte oder dadurch, daß Vitruvius für dieselben eine besondere Vorlage zur Verfügung hatte. Hierzu kommt noch, daß es bekanntlich eine Vitruvius-Frage ebensowohl als eine Heron-Frage gibt, und der Umstand, daß ein Teil der Arbeit *De architectura* aus dem ersten vorchristlichen Jahrhundert zu entstammen scheint, beweist gar nicht, daß nicht gewisse Abschnitte der Arbeit ein paar Jahrhunderte jünger sein können.

Durch Herrn Meiers Abhandlung besitzen wir also eine dankenswerte Zusammenstellung und Kritik der verschiedenen Ansichten über Herons Lebenszeit, aber einen weiteren Schritt zur Lösung der schwierigen Heron-Frage bringt sie meines Erachtens nicht. Sicher ist nur in betreff des „terminus ante quem", daß Heron vor Pappos gelebt hat.

Stockholm. G. Eneström.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 8°. [1

25 (1907).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2

8_3 (1907): 1.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [3

36 (1905): 1. — Die Seiten 1—78 enthalten Referate der im Jahre 1905 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, D. J. Korteweg, W. Kapteyn, J. C. Kluyver, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [4

15: 2 (octobre 1906—avril 1907).

Eneström, G., Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete. [5

Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 1—12.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik = 1^3 (1907). [Rezension:] Deutsche Literatur 28, 1907, 2100—2102. (A. von Braunmühl.) — [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 61—80. (G. Eneström, G. Junge.) = 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 80—91. (G. Eneström, A. Sturm, H. Bosmans.) = 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 91—96. (G. Eneström, A. Sturm, C. Grönblad.) [6

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von M. Cantor. Dritte Lieferung. Trigonometrie, Polygonometrie und Tafeln. Von A. von Braunmühl. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Von V. Kommerell. Perspektive und darstellende Geometrie. Von G. Loria. Leipzig, Teubner 1907. [7

8°, S. 403—642. — [7 M.]

Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Neudruck (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 273—274. (S. Günther.) [8

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al medio evo (1907). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 506—509. (D. E. Smith.) [9

Sageret, J., La génèse des mathématiques. [10

Revue scient. 7_5, 1907, 577—585.

Schmidt, M. C. P., Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik (1906). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 99—102. (H. Suter.) [11

Васильевъ, А. В., Историческій очеркъ анализа безконечно-малыхъ. Казань 1905. [12
8°, 70 S. — WASILIEFF, A., Historische Übersicht der Analysis des Unendlichen.

Bonola, R., La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica (1906). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 18, 1907, 56. (G. K.) [13

Le Cour, P., und Appel, J., Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. Übersetzung von G. SIEBERT (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 276—277. (S. GÜNTHER.) [14

Kistner, A., Geschichte der Physik (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 42. (E. GERLAND.) [15

***Ibel, Th.,** Die Wage bei den Alten. Forchheim 1906. [16
8°, 69 S. — Gymnasialprogramm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 287—288. (H. WIELEITNER.)

b) Geschichte des Altertums.

Amodeo, F., Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nell' evo antico. [17
Giorn. di matem. 45, 1907. 9 S.

Rudio, F., Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes. [18
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 13—22.

***Diels, H.,** Das neuentdeckte Palimpsest des Archimedes. [19
Internationale Wochenschr. 1, 1907.

Tannery, P., Le manuel d'introduction arithmétique du philosophe Domninos de Larissa. Traduction. [20
Revue des études grecques 19, 1906, 359—382.

c) Geschichte des Mittelalters.

Suter, H., Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern. [21
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 23—26.

Wiedemann, E., Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. VI—VIII (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 37—38, 277—278. (S. GÜNTHER.) [22

Vogl, S., Die Physik Roger Bacons (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 43—44. (F. STRUNZ.) [23

Silberberg, M., Ein handschriftliches hebräisch-mathematisches Werk des Mordechai Comtino (15 Jahrhundert). II. Geometrie. [24
Jahrbuch der jüdisch-literarischen Gesellschaft in Frankfurt a. M. 4 (1906), 214—237.

Eneström, G., Über drei bisher fast unbekannte italienische Mathematiker aus dem 15. Jahrhundert. [25
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 96—97. — Anfrage.

Duhem, P., Sur quelques découvertes scientifiques de Léonard de Vinci. [26
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 143, 1906, 946—949.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Benedict, Suzan R., The development of algebraic symbolism from Paciuolo to Newton (1906). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907, 29. [27

Friis, F. R., Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae ex anno 1588 et sequentibus annis. Nunc primum collectae et editae. Fasc. IX. Hauniae, Gad 1907. [28
4°, S. 257—288. — [2 M.]

Favaro, A., Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei. Trent' anni di studi Galileiani. Firenze, Barbera 1907. [29
4°, 29 S. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 168—169. (H. BOSMANS.)

Favaro, A., Regesto biografico Galileiano. Firenze, Barbera 1907. [30
8°, 69 S. — Aus den „Opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale".

Isely, L., Les origines de la théorie des fractions continues. [31
Neuchatel, Soc. d. sc., Bulletin 32, 1903—1904, 72—79.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a. St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung (1907). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 264—268. (H. BOSMANS.) [32

Duhem, P., Sur l'histoire du principe employé en Statique par Torricelli. [33
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 143, 1906, 809—812.

Thirion, J., Les „Essays" de Jean Rey et la pesanteur de l'air. [34
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 230—256.

Eneström, G., Über den französischen Mathematiker Pujos. [35
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 97. — Anfrage.

Geer, P. van, Christiaan Huygens en Isaac Newton. [36
Tijdspiegel 1907. 22 S.

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. III. [37
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 8_2, 1907, 34—62.

Tramer, M., Die Entdeckung und Begründung der Differential- und Integralrechnung durch Leibniz (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 274—275. (S. GÜNTHER.) [38

Isely, L., Leibniz et Bourguet. [39
Neuchatel, Soc. d. sc., Bulletin 32, 1903—1904, 173—214.

Hering, K., Das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2489—2491. (E. GERLAND.) [40

Graf, J. H., Der Basler Mathematiker Leonhard Euler bei Anlaß der Feier seines 200. Geburtstages. Bern 1907. [41
8°, 24 S. — Mit Porträt.

Müller, Felix, Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Enlers aus der reinen Mathematik. [42
Abhandl. aur Gesch. d. mathem. Wiss. 25, 1907, 61—116.

Müller, Felix, Nachtrag zu dem Aufsatze: „Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler". [43
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 423—424.

Ahrens, W., Leonhard Eulers Werke. [44
Mathem.-naturwiss. Blätter 1907.

Stäckel, P., Eulers Verdienste um die elementare Mathematik. [45
Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 300—307.

Stäckel, P., Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen. [46
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 37—60.

Lampe, E., Zur Entstehung der Begriffe der Exponential-Funktion und der logarithmischen Funktion eines komplexen Arguments bei Leonhard Euler. [47
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 25, 1907, 117—137.

Kneser, A., Euler und die Variationsrechnung. [48
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 25, 1907, 21—60.

Valentin, G., Leonhard Euler in Berlin. [49
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 25, 1907, 1—20 + Porträt.

Saalschütz, L., Albert Girard und die Waringsche Formel. [50
Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 205—207.

Bortolotti, E., Carteggio di Paolo Ruffini con alcuni scienziati del suo tempo, relativo al teorema sulla insolubilità di equazioni algebriche generali, di grado superiore al quarto. [51
Soc. italiana, Memorie di matem. 14_3, 1907, 291—325.

Brocard, H., Sur les frères Français. [52
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 98. — Antwort auf eine Anfrage.

Simon, Max, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 180—181. (J. Tropfke.) — L'enseignement mathém. 9, 1907, 333. — Monatsh. für Mathem. 18, 1907; Lit.-Ber. 45—46. [53

Mothé, F., Karl Friedrich Gauss (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 41—42 (O. S.) [54

Gauss, C. F., Werke. Band VII (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 521—522. (E. B. Wilson.) [55

Stäckel, P., Vier neue Briefe von Gauss. [56
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachrichten (Math. Kl.) 1907, 372—373.

Loria, G., Per la storia dei sistemi determinati di infinite equazioni lineari. [57
Palermo, Circolo matem., Supplemento ai rendiconti 2, 1907, 34—35. — Über eine Abhandlung von G. Piola aus dem Jahre 1828.

Lucas de Pesloüan, Ch., N.-H. Abel (1906). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2245—2247. (E. Lampe.) — Wisk. tijdschr. 3, 1907, 163. [58

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2381—2383. (E. Lampe.) [59

Müller, Felix, Karl Schellbach (1905). [Rezension:] Mathesis 7_3, 1907, 155. — Monatsh. für Mathem. 18, 1907; Lit.-Ber. 52. (Schrutka.) [60

Endō, T., [Eine Methode der alten japanischen Schule um den Umfang einer Ellipse zu berechnen.] [61
Tokyo, Sūgaku Butsurigakkwai, Kiji-Gaiyō 3, 1906, 72—74. — Japanisch.

N[euberg], J., Histoire des triangles pseudo-isoscèles. [62
Mathesis 7_3, 1907, 184—185.

***Trautscholdt,** Zur Entdeckungsgeschichte der lichtelektrischen Erscheinungen. Leipzig 1906. [63
4°, 56 S. — Gymnasialprogramm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 218—219. (M. Richter.)

Wieleitner, H., Bibliographie der höheren algebraischen Kurven (1904). [Rezension:] Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 83. (H. Liebmann.) [64

D. Hilbert. [65
Americ. journ. of mathem. 29: 1, 1907. — Nur Porträt.

e) Nekrologe.

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906.) [66
Il nuovo cimento 13_5, 1907, 145—154. (A. Carbasso.)

Ernesto **Cesàro** (1859—1906). [67
Milano, Istit. Lombardo, Rendiconti 39, 1906, 916—920. (E. Pascal.) — Il nuovo cimento 12_5, 1906, 142. — Revue génér. d. sc. 18, 1907, 129—130. — Rivista di fisica (Pavia) 8: 1, 1907, 23—46. (C. Alasia.)

Giacomo **Foglini** (1822—1907). [68
Roma, Accad. pontif. d. N. Lincei, Memorie 25, 1908. Sonderabdruck 43 S. 8° + Porträt. (B. Carrara.)

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [69
Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 181—211.

Samuel Pierpont **Langley** (1834—1906). [70
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 26, 1907, 546—549. (W. Peddie.) — Wiadomości matem. 11, 1907, 189—194. (W. Gorczyński.)

Gaston de **Longchamps** (1842—1906). [71
Durán Loriga, J. J., *Nota necrologica acerca del matematico francés G. de Longchamps.* Coruña 1906.

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [72
Revue génér. d. sc. 18, 1907, 49—50. (J. Réveille.)

Carl Maximilian **von Orff** (1828—1905). [73

München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 36, 1906, 433—439. (C. Voit.)

Jean Abraham Chrétien **Oudemans** (1827—1906). [74

Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verslagen 9, 1906, 459—464. (H. G. van de Sande Bakhuyzen.)

Jakob **Rebstein** (1840—1907). [75

Schweizer. Bauzeitung 1907: I, 152 [mit Porträt].

Moritz **Steinschneider** (1816—1907). [76

Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 391—399. (S. Günther.)

Otto **Stolz** (1842—1905). [77

München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 36, 1906, 477—479. (C. Voit.)

Otto Wilhelm **von Struve** (1819—1905). [78

München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 36, 1906, 439—444. (C. Voit.)

Tobias Robert **Thalén** (1827—1905). [79

Società dei spettroscopisti italiani 35, 1906, 185—202 + Porträt. (B. Hasselberg.)

Joseph de **Tilly** (1837—1906). [80

Bruxelles, Académie de Belgique, Bulletin 1906, 622—629. (P. Mansion.)

f) Aktuelle Fragen.

Bobynin, V., A propos de l'enquête sur la méthode de travail des mathématiciens [Sur l'importance de la lecture dans le domaine de l'investigation mathématique.] [81

L'enseignement mathém. 9, 1907, 389—396.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. IX. [82

L'enseignement mathém. 9, 1907, 306—312.

Klein, F., Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. 1 (1907) [Selbstbericht.] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 467—468. — [Rezension.] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2007—2008. (J. Norrenberg.) — L'enseignement mathém. 9, 1907, 411. (H. F.) [83

[Euler-Feier.] [84

Meier, J., *Festakt der Universität Basel zur Feier des zweihundertsten Geburtstages Leonhard Eulers. Festbericht.* Basel 1907. 4°, 21 S.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdozent M. Abraham in Göttingen zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor R. C. Archibald zum Professor der Mathematik an der „Acadia university" in Wolfville, N.-S.

— E. Bianchi zum Astronomen am „Osservatorio del collegio Romano" in Rom.

— Professor M. Brendel in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Akademie für Sozialwissenschaften in Frankfurt am Main.

— H. A. Clark in Syracuse zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— „Maitre de conférences" J. Clairin in Lille zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor K. Dieterici in Rostock zum Professor der Physik an der Universität in Kiel.

— Professor G. D. Gable in Fairfield zum Professor der Mathematik an der Universität in Wooster, Obio.

— Professor F. Hasenöhrl in Wien zum Professor der theoretischen Physik an der Universität daselbst.

— Professor A. Heydweiller in Münster zum Professor der Physik an der Universität in Rostock.

— Professor J. Horn in Clanstbal zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Darmstadt.

— Professor L. J. Kral in Wien zum Professor der darstellenden Geometrie an der Bergakademie in Prihram (Böbmen).

— „Instructor" O. C. Lester in New Haven zum Professor der Physik an der Universität von Colorado.

— „Maitre de conférences" R. Le Vavasseur in Lyon zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent E. Marx in Leipzig zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— „Instructor" L. E. Moore an der Universität von Illinois in Urbana zum Professor der Mechanik am „Massachusetts institnte of technology" in Boston.

— Professor K. Öatel in München zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Hannover.

— Dr. A. Paraf in Tonlonse zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. D. Pratt in Syracuse zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. F. H. Safford in Philadelphia znm Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— Privatdozent W. Schlink in Darmstadt zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Direktor Ad. Schmidt in Potsdam znm Professor der Geophysik an der Universität in Berlin.

— „Instructor" R. P. Stephens am „Wesleyan university" zum Professor der Mathematik an der Universität von Georgia.

— Dr. A. Turpain in Poitiers zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

Todesfälle.

— Siegfried Czapski, Leiter des Zeiss-Werkes in Jena, geboren in Obra (Posen) den 28. Mai 1861, gestorben in Jena den 29. Juni 1907.

— John Kerr, früher Lehrer der Mathematik am „Free church training college for teachers" in Glasgow, geboren zu Ardrossan den 17. Dezember 1824, gestorben im August (?) 1907.

— Maurice Loewy, Direktor der Sternwarte in Paris, geboren in Wien den 15. April 1833, gestorben in Paris den 15. Oktober 1907.

— Adriano de Paiva, conde de Campo-Bello, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Porto, gestorben den 30. März 1907, etwa 60 Jahre alt.

— George Washington Plympton, Professor der Physik am „Brooklyn polytechnic institute", gestorben den 11. September 1907, 80 Jahre alt.

— Auguste Ponsot, Professor der Physik in Paris, geboren in Dampierre sur Salon den 16. November 1858, gestorben im August (?) 1907.

— Oren Root, früher Professor der Mathematik am „Hamilton college" in Clinton, gestorben den 26. August 1907, 70 Jahre alt.

— Georg Sidler, früher Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität in Bern, geboren in Zug den 31. August 1831, gestorben in Bern den 9. November 1907.

— Hermann de C. Stearns, Professor der Physik an der „Stanford university", gestorben den 21. Oktober 1907.

— Friedrich Vogel, Privatdozent der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule in Berlin, gestorben den 28. August 1907, 51 Jahre alt.

— Hermann Carl Vogel, Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam, geboren in Leipzig den 3. April 1841, gestorben den 13. August 1907.

— Gustav Zeuner, emeritierter Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Dresden, geboren in Chemnitz den 30. November 1828, gestorben den 18. Oktober 1907.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Breslau hat Professor R. Sturm für das Wintersemester 1907—1908 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Heidelberg hat Privatdozent K. Bopp für das Wintersemester 1907—1908 zwei einstündige Vorlesungen, die eine über ausgewählte Kapitel aus der Geschichte der Mathematik, die andere über Lektüre einer klassischen mathematischen Arbeit angekündigt.

— Am Polytechnikum in Zürich hat Privatdozent F. Kraft für das Wintersemester 1907—1908 eine einstündige Vorlesung über die geschichtliche Entwickelung der Mathematik angekündigt.

Vermischtes.

— Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hat auf ihrer Versammlung in Dresden eine Kommission, bestehend aus den Herren A. Krazer, A. Pringsheim und P. Stäckel eingesetzt, die über die Herausgabe von Leonhard Eulers Werken beraten soll.

— Die von der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft beschlossene Euler-Kommission (siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, S. 112) ist jetzt eingesetzt. Der Präsident dieser Kommission, die aus 11 Mitgliedern besteht, ist Herr F. Rudio. Für die geplante Euler-Ausgabe hat schon ein Ungenannter in Zürich Herrn Rudio 12,000 Franken zugesichert.

— Die Herausgabe von Evangelista Torricellis sämtlichen Werken ist jetzt in Angriff genommen. Die Ausgabe wird von seiner Geburtsstadt Faenza bekostet und von Herrn G Vassura in Forli besorgt werden.

— Das „Circolo matematico di Palermo" hat eine Ausgabe von Paolo Ruffinis sämtlichen Arbeiten sowie von seinem Briefwechsel in Aussicht gestellt.

Per la preistoria del principio dei momenti virtuali.

Di G. Vailati a Roma.

Per indicare quella „parte", o, come si direbbe ora, quella componente, del peso di un corpo vincolato, o comunque ostacolato nei suoi movimenti, alla quale è necessario fare equilibrio per impedire che il corpo discenda, è adoperata, negli scritti medioevali di meccanica, facenti capo al trattato *De ponderibus*, attribuito a Giordano Nemorario, la locuzione „gravitas secundum situm", o „gravitas accidentalis". Così, per esempio, un corpo scorrevole lungo un piano inclinato è detto essere tanto meno „grave secundum situm" quanto meno è inclinato il piano sul quale scorre, e, parimenti, un corpo pendente dall'estremo di una leva è detto avere tanto meno „gravitas secundum situm" quanto più l'asta della leva si discosta dalla posizione orizzontale.

Il carattere, prettamente aristotelico, delle suddette due frasi tecniche, potrebbe indurre a ricercare l'origine del corrispondente concetto in qualche antica trattazione greca della meccanica, connessa, o riattaccantesi, alle dottrine peripatetiche.

Questa tesi, che è appunto quella sostenuta dal Duhem nell'opera da lui recentemente pubblicata sulle Origini della Statica[1]), presta tuttavia il fianco a più di una obbiezione.

In nessuno degli scritti aristotelici trattanti di meccanica, pervenuti fino a noi, si trova traccia del termine greco che dovrebbe corrispondere alla suddetta denominazione latina. La parola greca che, per il senso, più si avvicina ad essa è invece *ῥοπή*, la quale, negli scritti di Aristotele, figura soltanto come un termine del linguaggio ordinario, mentre invece assume valore di termine tecnico negli scritti di Archimede, che la adopera appunto per distinguere, dal peso (*βάρος*) di un dato corpo, ciò che ora si chiamerebbe il suo „momento" rispetto a un dato asse di rotazione. Ne abbiamo un esempio nel titolo stesso del principale scritto meccanico di Archimede (*Περὶ ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπιῶν*).

La coincidenza tra il significato attribuito dai meccanici greci alla parola *ῥοπή*, e quello attribuito più tardi alla locuzione „gravitas secundum

1) P. Duhem, *Les origines de la Statique*. 1—2, Paris 1905—1906.

situm" — e più tardi ancora al termine „momento" — si trova del resto confermata anche da Galileo, come risulta, per esempio, dal suo scritto „Delle meccaniche", riprodotto da A. Favaro nelle Memorie dell' Istituto Veneto (26, 1899). Anche il Baliani, nella prefazione al suo trattato *De motu* (1638), definisce il „momento" come „excessus virtutis moventis super impedientia motus".

In un senso affatto identico Stevin si serve della parola „*sacoma*", suggerita forse dalla greca σήκωμα, che si incontra anche nell'operetta aristotelica sulle *Questioni meccaniche*, dove però essa non assume il carattere di termine tecnico.

* * *

Non è senza interesse notare come, dalla suddetta determinazione del concetto di „gravitas secundum situm", risulti chiaro il senso da attribuire alla frase, continuamente adoperata dagli scrittori di meccanica della generazione anteriore al Galilei, che un corpo tanto più velocemente discende quanto più è „grave secundum situm" („Gravia secundum situm velocius descendere"). Questa frase, spesso erroneamente interpretata come significante che i corpi cadano con velocità proporzionali ai loro pesi, è piuttosto da riguardare come una delle più antiche forme sotto le quali sia stato enunciato il principio della proporzionalità tra l'intensità delle forze (staticamente misurate), agenti per un dato tempo su un dato corpo, e le velocità che questo rispettivamente acquista. Essa corrisponde cioè, al principio che, nella trattazione newtoniana, figura indicato come la „seconda legge" della dinamica.

La distinzione tra il peso di un corpo e la sua „gravitas secundum situm" costituisce d'altra parte anche il primo germe di quella che, nell'ordinaria enunciazione del principio cosidetto di d'Alembert, compare indicata coll'opporre le forze „applicate" alle forze „attuali".

Quanto alla questione della uguale, o inuguale, velocità di caduta di gravi diversamente pesanti, recenti ricerche del Wohlwill[1]) hanno posto in chiaro che l'opinione che tali velocità fossero proporzionali ai rispettivi pesi si trova già rigettata come assurda, dieci secoli prima di Galileo, da Giovanni Filopono, in quel Commento al *De coelo* di Aristotele, che è ripetutamente citato e utilizzato, tanto da Galileo come dai suoi avversari, nelle polemiche su tale soggetto.

* * *

È certamentre strano il fatto che, mentre Erone e Pappo, conoscevano e formulavano esattamente, pel caso almeno dei cinque meccanismi elemen-

1) Physikalische Zeitschrift 7, 1905, p. 27—29. Riproduzione di una conferenza tenuta alla „Naturforscher-Versammlung" (Meran) 1905.

tari (δυνάμεις) da loro studiati (leva, asse nella ruota, puleggie, cuneo, vite), quello che ora si chiama il *principio dei momenti virtuali*, non siano venuti nell'idea di applicare questo stesso principio anche alla determinazione degli sforzi necessari per far salire dei pesi lungo piani inclinati.

Il Duhem propende a credere che ciò sia da attribuire alla maggiore difficoltà di fare astrazione, in questo caso, dalla influenza perturbatrice degli attriti.

Le considerazioni tuttavia che nella *Meccanica* di Erone sono dedicate al cuneo e alla vite (concepita da lui come un cuneo attorcigliato, e atto a esser mosso senza urti) provano che, egli almeno, era capace di sollevarsi per questo riguardo a un grado di astrazione non inferiore a quello che corrisponde alle ricerche di Galileo sullo stesso soggetto.

È inoltre da notare che, per il caso appunto considerato da Erone e da Pappo — quello cioè di una sfera o di un cilindro che discenda rotolando lungo un piano inclinato — l'attrito non ha molto più parte di quanta ne abbia, per esempio, nel caso di una leva o di un sistema di puleggie.

La ragione della sopraindicata deficienza dei meccanici greci, sembra a me sia da cercare in tutt'altra direzione. Per essi — colla sola parziale eccezione di Aristotele o, più precisamente, dell'autore dell'operetta già citata sulle *Questioni meccaniche* a lui attribuita — la dipendenza dell'efficacia di una forza, applicata a un dato meccanismo, dal cammino che è necessario far percorrere al suo punto di applicazione per ottenere un dato risultato, era riguardata semplicemente come un *fatto* che l'esperienza permetteva di constatare caso per caso per ciascuno dei meccanismi, o delle combinazioni di meccanismi, da essi prese in considerazione, non mai come un principio abbastanza evidente, o abbastanza saldo, per servire di prova, di spiegazione, o anche solo di mezzo di ricerca, del modo di funzionare di meccanismi di cui non fosse già stato prima, e indipendentemente, analizzato e determinato il modo da agire.

E questa analisi o determinazione era da essi concepita come dovente consistere sostanzialmente in una riduzione, più o meno diretta, al caso della leva, riguardata da essi come la sola macchina tipica ideale. Quì non fa eccezione neppure l'autore delle *Questioni meccaniche*, il quale tenta ridurre al caso della leva perfino quello del cuneo.

* * *

Per trovare traccia di una decisiva emancipazione dal suddetto pregiudizio in favore della leva — pregiudizio che sembra esser stato di non minor danno ai progressi della meccanica di quanto sia stato, per l'astronomia, quello relativo alla „perfezione“ del movimento circolare —

occorre venire fino a un tempo non di molto anteriore a quello in cui, per opera di Galileo, è stata costituita la dinamica moderna.

Dell'importanza da attribuire, a questo riguardo, a quella specie di enciclopedia medioevale della meccanica che, sotto il titolo di „Trattato dei pesi" (*De ponderibus*), è continuamente citata e utilizzata dagli scrittori di meccanica del XIV e XV Secolo — da Biagio Pelacani e Leonardo da Vinci, a Cardano e a Tartaglia — ho già avuto occasione di occuparmi, in una Nota presentata (1897) all'Accademia delle scienze di Torino. Il Duhem arriva ora, indipendentemente, e col sussidio di estese ricerche sui vari manoscritti che di questa opera si trovano alla Biblioteca nazionale di Parigi, a conclusioni in parte conformi a quelle che allora mi era parso di potere formulare in proposito

Ciò che indusse il Duhem a intraprendere le sue indagini in tale direzione fu l'aver constatato le notevoli divergenze che, appunto sul soggetto del piano inclinato, sussistono tra le due diverse redazioni che dello scritto *De ponderibus* furono pubblicate nel XVI Secolo, la prima da Pietro Apiano, a Norimberga (1533), col titolo: *Liber Jordani Nemorarii, viri clarissimi, de ponderibus, propositiones XIII et earundem demonstrationes multarumque rerum rationes sane pulcherrimas complectens*, e l'altra a Venezia, nel 1575, su un manoscritto già appartenente a Tartaglia, da Curzio Trojano, col titolo: *Jordani opusculum de ponderositate, Nicolai Tartaleae studio correctum novisque figuris auctum.*

Nonostante le differenze, alle quali il Duhem ha diretto la sua attenzione, le due redazioni concordano in più di un punto di cui è da segnalare l'importanza.

Ambedue cominciano con una stessa lista di enunciazioni, tra le quali figura quella in cui è precisato il significato della locuzione „gravitas secundum situm", adoperata poi costantemente per designare i diversi sforzi richiesti per sostenere uno stesso corpo a seconda delle condizioni o dei vincoli a cui esso è assoggettato.

Comune pure ad ambedue le redazioni è la convenzione di assumere, come misura del diverso grado di inclinazione („obliquitas") delle linee, lungo le quali i gravi scorrono, le diverse variazioni di livello che *subirebbe* un punto spostandosi di uno stesso tratto su ciascuna di esse („Obliquiorem descensum, in eadem quantitate, minus capere de directo").

Tali due concezioni, della „gravitas secundum situm" e della „obliquitas", sono inoltre applicate, tanto nell'una come nell'altra delle due redazioni, per enunciare la proposizione che la „gravitas secundum situm" di un corpo obbligato a percorrere una data linea di discesa, è tanto più grande quanto minore è la „obliquitas" della linea, cioè — in conformità alla definizione vista sopra — quanto più grande è l'abbassamento, o

innalzamento che il grave *subirebbe* percorrendo un dato tratto rispettivamente sull'una o sull'altra delle linee di discesa in questione.

Sebbene nella proposizione: „gravius secundum situm quanto in eodem situ, minus obliquus descensus", si trovi già implicitamente enunciata la condizione di equilibrio di due gravi che, essendo collegati da un filo scorrevole sopra una puleggia, giacciano su due piani diversamente inclinati, è però soltanto nella seconda delle due redazioni già citate del trattato *De ponderibus* — cioè in quella curata da Tartaglia — che tale proposizione si trova esplicitamente interpretata come applicabile a questo caso. Nell'altra precedente redazione — quella curata da Pietro Apiano — si trovano, invece, soltanto dei tentativi abbastanza confusi, e di cui anzi alcuni assolutamente paralogistici, di far rientrare, sotto lo stesso principio, il caso di due pesi pendenti dai due estremi di una leva, considerando le diverse „obliquitates" degli archi descritti dai loro punti di sospensione.

Ciò induce il Duhem ad avanzare l'ipotesi che soltanto la prima delle suddette due redazioni rappresenti effettivamente le idee di Giordano Nemorario, e che l'altra, invece, corrisponda a una ulteriore elaborazione del contenuto della prima, elaborazione che egli crede sia da attribuire all'intervento di un ignoto commentatore („le précurseur de Léonard"), al quale quindi, secondo il Duhem, spetterebbe il merito di avere per il primo formulata la condizione di equilibrio di un grave scorrevole lungo un piano inclinato.

Il fatto, notato sopra, che, nella parte comune alle due redazioni figurano concetti e proposizioni, alla cui enunciazione e determinazione non è facile assegnare altro scopo che quello che si realizza nella loro applicazione al caso del piano inclinato, rende, a mio parere, assai più probabile l'ipotesi che sia la seconda, e non la prima, delle dette due redazioni, quella che si avvicina di più a una supponibile trattazione originaria da cui ambedue derivino, e che la trattazione originaria abbia subite, nell'edizione pubblicata da Pietro Apiano, o nei manoscritti che le hanno servito di base, delle mutilazioni che accidentalmente sono andate a colpire proprio alcune delle sue parti più vitali.

* * *

La forma sotto la quale la condizione d'equilibrio sul piano inclinato figura enunciata, nella edizione curata da Tartaglia, presenta tuttavia una notevole differenza da quella che si sarebbe condotti ad aspettare in conformità alle definizioni che si trovano in principio alla trattazione.

In essa infatti, per confrontare le „obbliquità" delle linee a cui si appoggiano i due gravi che si controbilanciano, si considera, non il

rapporto delle proiezioni verticali di nno stesso segmento portato sn l'una e snll'altra di esse, ma invece il rapporto fra i tratti delle dne linee che corrispondono a una stessa proiezione verticale („Si, per diversarum obliquitatum vias dno pondera descendant, fiantqne declinationum et ponderum una proportio eodem ordine snmpta, una erit utrinque virtus in descendendo"). Quest'ultima frase è così chiarita da TARTAGLIA: „proportio declinationum dico non angulorum sed linearum ad aequedistantem resecationem, in qua aeqnaliter sumunt de directo".

La differenza meritava di esser notata perchè, sotto questa forma, la proposizione in questione viene, in modo ancora più evidente, ad apparire concordante coll'enunciazione, data più tardi da STEVIN, della condizione d'equilibrio di cui in essa si parla.

L'attitudine, assunta da STEVIN di fronte alla solnzione data, nel trattato *De ponderibus*, al problema dell'equilibrio di gravi scorrevoli lnngo piani inclinati, corrisponde perfettamente a qnella da lui pure assunta di fronte a qnegli antichi tentativi di rendersi ragione delle condizioni di eqnilibrio della leva che (come quelli di cni ci è conservata traccia nell' operetta aristotelica già citata sulle *Questioni meccaniche*) si basavano sulla considerazione e sul confronto dei diversi spostamenti („virtuali") dei punti d'applicazione dei pesi o delle forze.

Il qualificare degli spostamenti „possibili" (cioè non ancora avvenuti) come delle cause di moti, o equilibrii, „effettivi" sembrava a lui — come del resto anche ai suoi contemporanei GUIDUBALDO DEL MONTE e BENEDETTI — qualche cosa di altrettanto assurdo qnanto il credere che una cansa possa essere preceduta da nn suo effetto. Qualunqne relazione tra i pesi, applicati, per esempio, ai due estremi di una leva, e gli innalzamenti, o abbassamenti, che i loro punti d'applicazione snbirebbero, o potrebbero snbire, per un dato spostamento dell'asta, gli sembrava tutt' al più potere essere riguardata come un segno, o un „*sintomo*", dell'equilibrio, non mai come una „*ragione*" o una cansa di esso.

Ora, poichè, per il caso della leva, esisteva, nella trattazione di ARCHIMEDE, basata, come è noto, sul concetto di centro di gravità, una via per arrivare, indipendentemente da ogni considerazione di spostamenti possibili, alla determinazione della condizione di eqnilibrio di due pesi pendenti dai suoi estremi, STEVIN fu naturalmente condotto a domandarsi se, anche pel caso di gravi scorrevoli lungo piani inclinati, non si potesse trovare qualche analoga „dimostrazione".

È noto l'espediente al quale egli per tale scopo ricorse, consistente nel sostituire, ai due pesi, nna collana di pesi tra loro uguali succedentisi a uguali intervalli, e nell'osservare che tale collana non potrebbe mettersi in moto spontaneamente, poichè nessun movimento la porterebbe ad occu-

pare una posizione complessivamente „più bassa“, di quella in cui prima si trovava.

* * *

Per quanto già quasi intravista da Stevin, la possibilità di dedurre la condizione d' equilibrio di due gravi scorrevoli su due piani diversamente inclinati, dalla considerazione del loro centro comune di gravità (come Archimede aveva dedotto la condizione d'equilibrio della leva dalla considerazione del centro comune di gravità dei due pesi pendenti ai suoi estremi) sembra tuttavia essere stata per la prima volta chiaramente riconosciuta da Galileo.

Nell'opera *De motu* (1644) del Torricelli, la condizione di equilibrio di un grave scorrevole lungo un piano inclinato è presentata come una conseguenza del principio generale che, quando due gravi sono così legati l'uno all'altro che, comunque si spostino, il loro centro di gravità non si abbassi, essi restano in equilibrio.

Da questa enunciazione del Torricelli all'altra, dovuta al Wallis (*Mechanica*, 1669), nella quale, come condizione di equilibrio di un sistema composto di un numero qualunque di pesi, è indicata l'eguaglianza tra la „somma delle cadute“, e la „somma dei sollevamenti“ che corrispondono agli spostamenti che il sistema può assumere, il passo era breve.

Wallis considera inoltre anche il caso, più generale, in cui, invece di pesi, si tratti di forze comunque dirette, notando che allora, invece che delle proiezioni verticali degli spostamenti dei punti di applicazione, occorre tener conto delle proiezioni di tali spostamenti sulle direzioni delle rispettive forze.

Per tal via la proposizione relativa alla condizione d'equilibrio del piano inclinato, enunciata, come si è visto, nel trattato *De ponderibus* si è andata gradatamente trasformando e generalizzando fino a diventare, quello che ora si chiama *il principio dei momenti virtuali.*

* * *

Le ulteriori elaborazioni che il principio, formulato dal Wallis, ebbe a subire per opera di Giovanni Bernoulli e di Lagrange, si riferiscono quasi esclusivamente al più conveniente modo di applicare, per la sua enunciazione, e per la sua messa in opera, i procedimenti del calcolo infinitesimale.

Per ciò che riguarda Giovanni Bernoulli è da notare che, col prendere in considerazione le relazioni tra gli spostamenti (virtuali) „infinitamente piccoli“ dei punti d'applicazione delle forse, egli non fece in fondo che applicare ed enunciare, in forma generale, una norma di metodo di cui era stato fatto già frequentemente uso dai suoi prede-

cessori, tra gli altri da Leonardo da Vinci, e da Galileo, nei loro tentativi di dedurre, dal principio della leva, la condizione d'equilibrio relativa al piano inclinato, e di far rientrare in quest'ultimo caso quello di un grave sostenuto da due fili non paralleli. Tale norma è quella che consiste nel riguardare come sostituibili, per quanto riguarda l'equilibrio, due sistemi di vincoli quando essi permettono gli stessi spostamenti „iniziali". Essa, come nota a proposito il Duhem (vol. I, p. 337), si trova anche enunciata, sotto la forma più esplicita, da Descartes in una lettera al padre Mersenne (1638).

Il passo in questione è anche interessante perchè vi figura adoperata, da Descartes, la locuzione „pesanteur relative" per esprimere precisamente quello stesso concetto che, come s'è visto indietro, è designato, nelle trattazioni di statica facenti capo al trattato *De ponderibus*, colla frase „gravitas secundum situm"[1]).

1) «La *pesanteur relative* de chaque corps se doit mesurer *par le commencement* du mouvement que devrait faire la puissance qui le soutient, tant pour le hausser que pour le suivre s'il s'abaissait ... et notez que je dis *commencer à descendre*, non pas simplement descendre, à cause que *ce n'est qu'au commencement qu'il faut prendre garde.*» (*Oeuvres* de Descartes, éd. Tannery 2, p. 253.)

Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers.

Von P. Stäckel in Hannover und W. Ahrens in Magdeburg.

Einleitung.

Der kürzlich veröffentlichte Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und seinem Bruder M. H. Jacobi hat gezeigt, welch' lebhaften Anteil jener an dem Plane der Herausgabe der Werke Leonhard Eulers nahm, dessen Ausführung um die Mitte des vorigen Jahrhunderts der Verwirklichung nahe gerückt zu sein schien. So bittet Jacobi im Sommer 1845 seinen Bruder, ihm mitzuteilen, wie es mit der Ausgabe der Werke Eulers seitens der Petersburger Akademie stehe, und stellt in Aussicht, an den Sekretär der Akademie, den Urenkel Eulers P. H. v. Fuss, mit dem er wegen dieser Angelegenheit bereits in Beziehungen getreten war, einen „ellenlangen Brief" zu schicken. Dieser Brief ist jedoch erst im Oktober 1847 abgegangen, und im April 1848 ist ihm dann ein noch längerer gefolgt. Jacobi schreibt darüber am 25. Januar 1849 an seinen Bruder: „Es wäre sehr schade, wenn die Petersburger Akademie das ruhmvolle und überaus nützliche Unternehmen der Herausgabe der Eulerschen Schriften wieder aufgäbe. Wie nützlich in gewisser Hinsicht für den Augenblick die periodischen Schriften sind, so werden doch die Werke in ihnen begraben, und Euler würde erst dadurch wieder auferstehn. Es ist wunderbar, daß man noch heut jede seiner Abhandlungen nicht bloß mit Belehrung, sondern mit Vergnügen liest . . . Ich habe wegen der großen Nützlichkeit des Unternehmens vergangnen Frühling eine sehr große Arbeit von 6 Wochen daran gesetzt, deren Resultate ich Fuss mitgetheilt, um mich über die zweckmäßigste Anordnung des ungeheuern Stoffes zu orientiren". „Es steckt viel Arbeit darin", sagt Jacobi ein anderes Mal von dem zweiten Briefe, „und es wäre deshalb vielleicht schade, wenn er verloren gegangen wäre."

Leider haben Jacobis vortreffliche Vorschläge für die Verteilung der Eulerschen Abhandlungen auf die einzelnen Bände der Werke nicht benutzt werden können, und erst gegenwärtig, nach 60 Jahren, dämmert die Hoffnung, daß sie doch noch einmal Verwendung finden könnten. Da überdies der Briefwechsel zwischen Jacobi und Fuss viele wertvolle Beiträge zur Biographie und Bibliographie Eulers enthält, schien es angebracht, diejenigen zehn Briefe, die diesen Gegenstand betreffen, allgemein zugänglich zu machen. Herr Geheimrat Viktor Fuss in Petersburg, ein Neffe von P. H. v. Fuss, in dessen Besitz sich die Briefe Jacobis befinden, und Fräulein Margarete Jacobi in Cannstatt, die die Briefe von Fuss an ihren Vater aufbewahrt, haben die Veröffentlichung freundlichst gestattet, wofür ihnen auch an dieser Stelle unser Dank ausgesprochen sei.

Um das Verständnis der Briefe zu erleichtern, sollen einige Bemerkungen über ihre Verfasser und deren Stellung zu Euler vorausgeschickt werden. Hierfür sind, ohne daß dies im Einzelnen angeführt würde, besonders benutzt worden die Vorreden zu den Werken: *Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae*, Petersburg 1849, *Leonhardi Euleri Opera postuma*, Petersburg 1862, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, Petersburg 1843, sowie der *Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi*, Leipzig 1907; in den erläuternden Anmerkungen zu den Briefen werden diese Werke folgendermaßen zitiert: *Comm. ar.*, *Op. post.*, *Corresp.*, *Briefw. Jacobi.*

Der Vater von P. H. v. Fuss, Nicolaus Fuss aus Basel (1755—1826), ein Schüler Daniel Bernoullis, war 1773 nach Petersburg zu Euler gegangen, der den Wunsch ausgesprochen hatte, einen jüngeren, tüchtigen Landsmann zur Unterstützung bei seinen Arbeiten zu haben. Fuss ist bis zu Eulers Tode, 1783, ein eifriger und verständnisvoller Mitarbeiter des großen Geometers gewesen; er hat dem seit 1766 völlig erblindeten Greise jene wertvollen Dienste bei der Ausarbeitung seiner mathematischen Untersuchungen geleistet, ohne die dieser schwerlich eine so ungeheuere Fruchtbarkeit — 355 Abhandlungen in den zehn Jahren von 1773 bis 1782 — hätte entfalten können. Nach Eulers Tode war daher niemand in höherem Grade als der treue Gehilfe berufen, ihm in der Petersburger Akademie die Gedächtnisrede zu halten (23. Oktober 1783). Auch das erste Verzeichnis der Schriften Eulers verdanken wir ihm; es ist nach Zeitschriften und innerhalb der Zeitschriften nach der Zeit geordnet. Mit der Familie Eulers verband Fuss sich jetzt dauernd, indem er eine Tochter von Joh. Albrecht Euler (1734—1800), dem ältesten Sohne Leonhard Eulers, zu seiner Lebensgefährtin machte. Von den Söhnen, die aus dieser Ehe hervorgingen, ist neben Paul Heinrich v. Fuss (1797—1855) dessen jüngerer Bruder Nicolaus v. Fuss (1810—1867) zu nennen.

Der umfangreiche Nachlaß EULERS war nach und nach in den Memoiren der Petersburger Akademie abgedruckt worden, und im Jahre 1830 glaubte man damit fertig zu sein. Doch bald stellte sich heraus, daß man EULERS Fruchtbarkeit noch immer unterschätzt hatte.

Nachdem P. H. v. FUSS als Nachfolger seines Vaters 1825 Sekretär der Petersburger Akademie geworden war, durchforschte er deren Archive und fand einige Pakete aus dem Briefwechsel EULERS, was ihn veranlaßte, dem Briefwechsel des BERNOULLI-EULERschen Kreises seine Aufmerksamkeit zuzuwenden. Seinen Bemühungen verdanken wir die Herausgabe der für die Geschichte der Mathematik im 18. Jahrhundert so wichtigen *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, 2 Bände, Petersburg 1843. Auf Anraten JACOBIS hat FUSS diesem Werke ein systematisch geordnetes Verzeichnis der EULERschen Schriften beigegeben, von dem er schon 1817/18 einen ersten Entwurf hergestellt hatte; während das Verzeichnis seines Vaters von 1783 noch nicht 700 Nummern enthielt, brachte er es auf 756 Stück. Um das Verzeichnis zu vervollständigen, hatte FUSS auch die EULERschen Manuskripte im Archiv der Akademie von neuem durchgesehen und dabei ein noch nicht veröffentlichtes Werk EULERS mit dem Titel: *Astronomia mechanica* entdeckt. Bald darauf fand er auf der Bibliothek zu Paris ein eigenhändiges Manuskript EULERS: *Considérations sur quelques formules intégrales*, das in LAGRANGES Besitz gewesen, von diesem an LACROIX geschenkt und aus dessen Nachlaß verkauft worden war; auch diese Abhandlung war noch nicht abgedruckt. Jetzt entschloß sich FUSS, die lange geplante gründliche Durchsicht des gesamten ihm zugänglichen EULERschen Nachlasses nicht länger zu verschieben, und in der Tat entdeckte er im März 1844 unter den im Familienbesitz befindlichen Papieren einen ganzen Haufen von Manuskripten, die man für bereits abgedruckt gehalten und beiseite gelegt hatte, die jedoch, wie die genauere Prüfung zeigte, noch unbekannte, von EULER eigenhändig geschriebene Abhandlungen waren.

Begreiflicherweise erregte dieser unerwartete Fund das größte Aufsehen. Er bewirkte, daß der in den Kreisen der Petersburger Akademiker schon oft erwogene Plan, eine Gesamtausgabe der EULERschen Schriften zu veranstalten, von neuem auflebte. Einige Vorarbeiten lagen bereits vor: Die Petersburger Akademie hatte 1783 und 1785 je einen Band *Opuscula analytica*, eine Sammlung von 28 Abhandlungen EULERS, herausgegeben. Sie hatte ferner 1794 der *Integralrechnung* EULERS einen *vierten Band* hinzugefügt, der aus teils veröffentlichten, teils bisher unveröffentlichten Abhandlungen bestand. Auf ihre Kosten war endlich 1843 die schon erwähnte *Correspondance* gedruckt worden. Jetzt wurde der Vorschlag FUSSENS, eine Gesamtausgabe aller EULERschen

Schriften zu veranstalten, von der Akademie beifällig aufgenommen und der Plan durch ein Schreiben vom 6. April 1844 dem Minister für Volksaufklärung, Grafen Uwaroff, unterbreitet. Das Riesenwerk war auf 25 Bände zu je 80 Bogen veranschlagt; für das Sammeln und Ordnen des Materials nnd die Überwachung des Druckes hatten P. H. v. Fuss und sein Bruder Nicolaus v. Fuss ihre Kräfte unentgeltlich zur Verfügung gestellt.

Der Minister beschied die Akademie dahin, daß er es für ratsam halte, die Ausführnng des Planes auf eine günstigere Zeit zu verschieben. Als jedoch nach zwei Jahren keine günstigere Zeit eingetreten war und das gelehrte Publikum über die Verzögerung Klage führte, beschloß die Akademie auf den Antrag von Fuss, von dem Wiederabdruck der selbständig erschienenen Schriften abzusehen und sich auf die Herausgabe der Abhandlungen zu beschränken. Von diesen *Opera minora collecta Leonhardi Euleri* sollten, wobei ein Brief Jacobis den Ausschlag gab, die arithmetischen Abhandlungen sogleich auf eigene Kosten der Akademie herauskommen; man hoffte, daß, wenn sich erst die Bedeutung und Nützlichkeit des Unternehmens gezeigt hätte, Unterstützung von anderer Seite nicht ausbleiben würde. So erschienen denn, herausgegeben von P. H. v. Fuss und seinem Bruder, 1849 die zwei starken Bände der *Commentationes arithmeticae collectae.* In ihnen sind auch die ziemlich umfangreichen zahlentheoretischen Arbeiten aus den von Fuss 1844 gefundenen Manuskripten abgedruckt worden; ein systematisches Verzeichnis aller dieser Inedita findet man in der Vorrede. Diese enthält auch noch Ergänzungen zu der Liste in der Correspondance, mit denen die Gesamtzahl der Nummern auf 809 steigt.

Mit den *Commentationes arithmeticae* war ein verheißungsvoller Anfang gemacht worden. Jacobi wünschte, daß nun einige Bände *Comm. algebraicae* und *Comm. geometricae* folgen sollten, und wenn er länger gelebt hätte, würde er gewiß deren Herausgabe wirksam unterstützt haben. Nach seinem Tode (1851) hat sich von den westeuropäischen Mathematikern niemand der Eulerschen Werke angenommen, und auch die Berliner Akademie hat nichts für den großen Mathematiker getan, der ihr 25 Jahre lang angehört hatte. Da die Petersburger Akademie allein aus eigenen Mitteln das Unternehmen nicht fortsetzen konnte, verzichtete man schließlich auf die Ausführung des Planes von 1844 und entschloß sich, als eine Nachlese aus den Manuskripten Eulers die *Opera postuma mathematica et physica anno 1844 detecta* herauszugeben. P. H. v. Fuss hat die Vollendung dieses Werkes nicht mehr erlebt, das erst 1862 herauskommen konnte; Nicolaus v. Fuss ehrte sein Andenken, indem er den zweiten Band mit dem Bildnis des Bruders schmückte.

Zu C. G. J. Jacobi, dem jungberühmten Mathematiker der Königsberger Universität, war P. H. v. Fuss zu Anfang des Jahres 1836 in Beziehungen getreten. Die russische Regierung hatte nämlich einige Zöglinge des Petersburger pädagogischen Instituts nach Königsberg geschickt, wo sie sich vorwiegend unter Jacobi in der Mathematik und unter F. E. Neumann in der Physik ausbilden sollten. Ein Schreiben, das P. H. v. Fuss in dieser Angelegenheit an Jacobi richtete, eröffnet ihren Briefwechsel. In der Folge bildete ein persönliches Bindeglied zwischen beiden Jacobis älterer Bruder Moritz, der Erfinder der Galvanoplastik, der seit 1837 in Petersburg lebte und in seiner Eigenschaft als Akademiker in beständigem Verkehr mit Fuss stand. Der Vermittelung von Moritz Jacobi hat sich Fuss vermutlich bedient, als er das Blatt aus Eulers Papieren an Jacobi sandte, das in dem Eingange der hier abgedruckten Briefe erwähnt wird. Dieses Geschenk bildete den Ausgangspunkt für eine inhaltreiche Korrespondenz, die beide über die Herausgabe der Eulerschen Werke geführt haben. Verehrte Fuss in Euler den großen Ahnen, so hat ihn Jacobi mit Pietät und Dank als den Schöpfer seines mathematischen Daseins angesehen.

Schon als Primaner hatte sich Jacobi, wie Dirichlet in seiner Gedächtnisrede berichtet, während die übrigen Schüler mühsam erlernte Elementarsätze hersagten, mit Eulers *Introductio* beschäftigt und als Student seine mathematische Ausbildung nicht durch den Besuch von Vorlesungen, sondern durch eifriges Studium der Werke von Euler und Lagrange erhalten. In der Tat sind die Untersuchungen dieser beiden großen Meister die Grundlage, auf der fast alle Arbeiten Jacobis beruhen; nur Gauss und Legendre wären daneben zu nennen. In eingehender Analyse darzulegen, wie Eulers Gedanken auf Jacobi eingewirkt haben, ist jedoch hier nicht der Ort, so reizvoll dieser Gegenstand auch sein mag. Es ist ein sehr sympathischer Zug bei Jacobi, daß er es niemals vergißt, die Anregungen zu erwähnen, die ihm Eulers Arbeiten gegeben haben, und daß er sich immer freut, wenn er Eulers Entdeckungen der Vergessenheit entreißen und ins rechte Licht setzen kann.

Ein glücklicher Zufall machte das Band zwischen Jacobi und Fuss noch enger. Auf einer Schweizerreise traf jener in Bern mit diesem und seinem Bruder Nicolaus zusammen, die in Paris gewesen waren, und sie machten nun die Fahrt durch das Berner Oberland bis Zürich gemeinsam (August 1843). „Mein Reisegefährte“, schreibt Jacobi aus Zürich am 28. August 1843 an seine Frau, „Staatsrath v. Fuss war sehr liebenswürdig“, und umgekehrt fand dieser an Jacobis Gesellschaft und Unterhaltung so viel Gefallen, daß er seiner nach der Rückkehr in die Heimat

„mit vieler Verehrung und Liebe gedachte“, wie Moritz Jacobi dem Bruder aus Petersburg berichtet.

Auf dieser Reise ermunterte Jacobi den russischen Mathematiker, das große Werk der Euler-Ausgabe aufs eifrigste zu betreiben, und nahm ihm das feierliche Versprechen ab, die Akademie hierzu anzufeuern. Wie die folgenden Briefe zeigen werden, hat er selbst diese Bestrebungen, so viel wie er nur konnte, gefördert. Zum Beispiel machte er 1842 in Paris bei Libri die Briefe Eulers an Lagrange ausfindig und erwirkte für Fuss die Möglichkeit, sie zu benutzen. Später durchforschte er die Schriften, Manuskripte und Sitzungsprotokolle der Berliner Akademie und gab von allem, was sich auf Euler bezieht, seinem Korrespondenten Mitteilung; er hat sich sogar der mühsamen Arbeit unterzogen, die auf seine Veranlassung hergestellten Abschriften noch ungedruckter Eulerscher Abhandlungen Wort für Wort mit den Originalen zu vergleichen. Schließlich wurde er selbst Redakteur und entwarf in eingehender und gründlicher Arbeit die Grundlinien für Plan und Disposition der zu veranstaltenden Ausgabe der *Opera minora*. Mit Recht durfte Jacobi daher seine Bemühungen um die Herausgabe der Eulerschen Werke in einem amtlichen Berichte (1849) über die Art und den Umfang seiner akademischen Tätigkeit erwähnen.

Zur Zeichenerklärung. Mit Sternen (*) eingeleitete Anmerkungen rühren von den Briefschreibern selbst her, während die Anmerkungen der Herausgeber mit Ziffern (1, 2 usw.) bezeichnet sind. Runde Klammern () gehören den Briefschreibern an, geschweifte Klammern {} bedeuten Zusätze von P. H. v. Fuss, eckige Klammern [ ] Zusätze der Herausgeber.

C. G. J. Jacobi an P. H. v. Fuss, Königsberg, den 28. Februar 1841.

Hochgeehrtester Staatsrath,

Ich kann Ihnen nicht genug für die große Freude danken, welche Sie mir durch das kostbare Geschenk mit dem Blatte aus den Papieren Ihres Urgroßvaters bereitet haben. Ich werde es mit Andacht unter den Heiligthümern meiner Bibliothek bewahren. Mein Bruder schrieb mir[1]), daß Sie eine werthvolle Briefsammlung von Bernoulli (doch wohl Jacob) an Euler besitzen. Sollten diese nicht in den Petersburger Memoiren publiziert werden können; so haben wir in den Berliner Memoiren für 1757 eine Briefsammlung von Leibnitz an Hermann, welche sehr interessant ist. Euler stand mit einem Gewürzkrämer Gordack in Tilsit[2]) in Corre-

1) Der betreffende Brief M. H. Jacobis ist nicht erhalten.

2) Johann Daniel Gordack war Seidenhändler und Senator in Tilsit. Auf der Königlichen und Universitätsbibliothek zu Königsberg sind jetzt aus Gordacks Nachlaß nur noch zwei Folianten vorhanden, die u. a. Auszüge aus Werken Eulers enthalten. Die Briefe Eulers an Gordack müssen nach dem Katalog der Gordackschen Samm-

spondenz, dessen Antworten an Euler sich hier auf der Kön. Bibliothek finden, welcher dieser Gordack seine Bücher vermacht hat. Wir sehen aus einer Antwort daß Euler bei seinem Abgange nach Petersburg ihn aufgefordert sein Nachfolger in der Berliner Akademie zu werden, welches aber der Mann ablehnt weil sein Handel ihm etwa 1000 ℛ jährlich bringe, was für seine Bedürfnisse ausreiche; auch, schreibt er, kann es keinen laden Dein Nachfolger zu werden, qui solus totum mathematicorum chorum repraesentasti*).

Es wäre wohl eine große Wohlthat, welche die Petersburger Akademie der mathematischen Welt erwiese und ein Rußland ehrendes und seiner Größe angemessenes Unternehmen, wenn sie die Abhandlungen Eulers nach ihren Gegenständen geordnet herausgäbe. Eigentlich wäre es nur eine Vervollständigung für andere Theile der Mathematik, was die Akademie bereits für die Integralrechnung durch Hinzufügung eines 4ten Theiles gethan hat. Ich weiß nicht, aber es ist mir nicht ganz wahrscheinlich, ob dieser 4te Theil vollständig die Eulerschen Abhandlungen über Integralrechnung, welche seine *Institutiones* ergänzen können, enthält; sonst könnte vielleicht die Akademie noch einen fünften hinzufügen. Und dann über unendliche Reihen, über Algebra, einige Bände über Zahlentheorie und hauptsächlich die noch heute sehr werthvollen Arbeiten über Mechanik (feste Körper, Hydrodynamik, elastische Körper, alles nach den verschiedenen Materien geordnet) u. s. w. Die beiden Bände *Opuscula analytica*, welche glaube ich die Akademie gleich nach seinem Tode aus seinen Abhandlungen zusammenstellte, sind gar nicht mehr zu haben, wie viel Mühe ich mir auch gegeben. (Dagegen ist der Band *Opuscula varii argumenti*[1]) noch häufig zu haben.) Eine Hauptfrage wäre, ob die Akademie sämmtliche Eulersche Abhandlungen auch aus anderen akademischen Schriften mit aufnähme, wofür ich natürlich sehr wäre. Dann müßte ein Plan für das Ganze gemacht werden die Anordnung nach dem Inhalte und die verschiedenen Bände betreffend, was allerdings eine schwierige Arbeit ist. Die Kategorien der Einteilung müßten aus dem Inhalt selbst entnommen werden und es scheint mir diese Arbeit so groß, daß sie gewiß unter mehrere vertheilt werden müßte. Dann könnte allmählig an die Ausführung gegangen werden und wenn man es auf eine Reihe von Jahren vertheilt, würden die Kosten

*) Die Eulerschen Briefe sind leider nicht vorhanden.

lung ursprünglich auch dort vorhanden gewesen sein, sie waren jedoch schon im Jahre 1820, als Bessel eifrig nach ihnen suchte, nicht mehr aufzufinden und sind jedenfalls als verloren zu betrachten (Brief von Bessel an P. H. v Fuss vom 11. April 1843).

1) Es gibt drei Bände *Opuscula varii argumenti*, die Berlin 1746, 1750, 1751 erschienen sind.

gar nicht einmal so bedeutend sein. En attendant würden Sie gewiß etwas vielen sehr willkommnes thun, wenn Sie die Liste, welche Ihr Vater der Biographie beigefügt hat, wieder ediren, indem Sie die nach 1783 publicirten Abhh. unter die verschiedenen Jahrgänge der Akad., denen sie angehören, einregistriren, wobei die ebenfalls in dem Tom. IV der *Inst. C. I.* und in den *Opp. Analyt.* befindlichen etwa noch mit Asterisken zu bezeichnen wären. Ich habe dies für meinen Privatgebrauch selber thun müssen.

Nehmen Sie nochmals meinen großen Dank für Ihr schönes Geschenk und behalten Sie ein geneigtes Wohlwollen

K. d. 28. Febr. 1841.

Ihrem ganz ergebenen Diener
C. G. J. Jacobi.

Sollten Sie nicht die Ak. bewegen können, wenn sie Besseln ein Exemplar ihrer herrlichen Abhh. schickt, ein dito für mich beizulegen?

P. H. v. Fuss an C. G. J. Jacobi, St. Petersbnrg, den 7./19. März 1841.

St. Petersburg d. 7./19. März 1841.

Verehrter Herr Professor

Ihr freundlicher Brief vom 28. Februar hat mich in mehrfacher Hinsicht erfreut und erquickt. Ich gehe allerdings damit um, eine Sammlung unedirter Briefe berühmter Mathematiker an Euler, an deren Studium ich mich in den letzten Monaten wahrhaft gelabt, und in denen ich höchst interessante Aufschlüsse über manche anziehende Punkte der Geschichte der Wissenschaft gefunden habe, herauszugeben. Es sind darunter nicht weniger als 14 Briefe Johann Bernoulli's des Aeltern[1]), des Lehrers unseres Euler, von 1728 bis 1746, also bis zwei Jahre vor seinem Tode, gegen 60 Briefe (1733—1753) von Daniel Bernoulli (dem Sohne Johanns)[2]), ferner manches Interessante von Clairaut, Poleni[3]), Naudé[4]), 7 Briefe von Ihrem Lambert u. manches andere. Joh. Bernoullis Briefe sind sämmtlich lateinisch, bis auf einen über Eulers Musikwerk[5]), der, weil

1) Die Sammlung der in der *Corresp.* t. II veröffentlichten Briefe Joh. Bernoullis an Euler ist durch G. Eneström um drei Nummern vermehrt worden; dieser hat den ganzen Briefwechsel zwischen beiden, soweit er noch vorhanden ist, herausgegeben. Bibl. math. (3) 4 (1903), p. 344—388, 5 (1904), p. 248—291, 6 (1905), p. 16—87.

2) Abgedruckt in der *Corresp.* t. II.

3) Giovanni Poleni (1683—1761) war seit 1719 als Nachfolger Nicolaus Bernoullis Professor der Mathematik an der Universität Padua.

4) Philipp Naudé d. J. (1684—1747) war Lehrer der Mathematik am Joachimsthalschen Gymnasium und Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

5) Dieser Brief vom 11. August 1731 (*Corresp.* t. II, p. 8—11) betrifft Eulers damals schon fast vollendetes Werk: *Tentamen novae theoriae Musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*, das erst 1739 herausgekommen ist.

er nichts specielles enthält u. durch Ton und Gegenstand ein größeres Publicum interessiren konnte, von mir in der Petersburger Zeitung abgedruckt wurde. Wenn Sie ihn nicht schon gelesen, so wird der beiliegende Abdruck Ihnen vielleicht willkommen sein. Daniel Bernoulli schreibt leider nur in dem gräulichen Deutsch jener Zeit; deshalb sind seine Briefe, der Form nach, weniger anziehend; enthalten aber doch fast lauter wissenschaftlich interessante Dinge. Dass ich unter Eulers Papieren nicht eine Zeile von Lagrange[1]) finde, läßt mich vermuthen, dass ich bei weitem nicht die ganze Sammlung habe. Vielleicht befindet sich noch Manches in den Händen anderer Mitglieder der Familie, wie mir denn noch vor Kurzem, nach dem Tode eines Oheims, ein ganzer Band (57) Briefe Friedrichs des Grossen an Euler[2]) zufiel, welcher jetzt auch in dem akademischen Archiv deponirt ist*).

Was nun Ihren Vorschlag zu einer neuen Edition sämmtlicher Eulerscher Schriften in systematischer Ordnung betrifft, so ist uns, wie Ihnen bekannt seyn wird, eine Gesellschaft in Brüssel zuvorgekommen, die außerdem auch noch die nicht französischen Sachen ins Französische übersetzt u. bis jetzt, soviel mir bekannt, fünf Bände herausgegeben hat[3]). Ein Unternehmen also, wie dasjenige, welches Sie vorschlagen, möchte mit jenem collidiren und bei unserer Entfernung vom Mittelpunct des literarischen Verkehrs, sich schwer halten können. Es war öfter zwischen Ostrogradsky und mir die Rede von einer *Auswahl* der Eulerschen Werke in einer neuen Auflage, aber ehe wir zum Schluß kamen, waren Jene

*) Auch diese Briefe geben interessante Auskunft darüber, wozu Euler, außer seiner akademischen Wirksamkeit, von dem großen König gebraucht wurde, während der 25 Jahre, die er in Berlin verlebte. Einer charakterisirt auf eine ergötzliche Weise den Geist der damaligen kriegerischen Zeit. Eine Abschrift desselben folgt hiebei.

1) Elf Briefe Lagranges an Euler hat Boncompagni 1877 veröffentlicht; sie sind wieder abgedruckt in den *Oeuvres*, t. 14, Paris 1892.

2) Von den 57 Briefen Friedrichs des Grossen an Euler sind 22 in den *Oeuvres de Frédéric le Grand*, tome 20, Berlin 1852, p. 199—212 abgedruckt worden; über die nicht abgedruckten vgl. *Avertissement de l'éditeur*, p. XXII; Stellen aus diesen Briefen finden sich übrigens auch schon in der *Gedächtnisrede* von Nic. Fuss, 1783. In den *Oeuvres de Frédéric* sind auch drei Briefe Eulers an Friedrich abgedruckt worden (vgl. dazu *Avertissement*, p. XXIII), und zu ihnen sind in den *Op. post.* t. I noch zwei Briefe Eulers gekommen.

3) *Oeuvres complètes en français de L. Euler, éditées par l'association des capitaux intellectuels pour favoriser le développement des sciences physiques et mathématiques*, Brüssel 1838, 1839. Als Herausgeber werden genannt die belgischen Mathematiker: Dubois, Drapiez, Moreau, Weiler, Steichen und Ph. Vandermaelen. Es sind fünf Bände erschienen, die sich alle auf der Bibliothèque Royale in Brüssel vorfinden. Auf deutschen Bibliotheken scheinen Bd. IV und V gänzlich zu fehlen; die Bände I, II und III sind auf der Universitätsbibliothek in Königsberg vorhanden.

schon mit ihrer ersten Lieferung herausgerückt, und — sie machen's nicht einmal gut; denn sie nehmen sich heraus den Meister zu meistern, u. ist doch kein bekannter Name unter ihnen.

Sie schreiben ferner, daß Sie meines Vaters Liste der Eulerschen Schriften neu edirt wünschten mit Hinweisung auf diejenigen Sammlungen, wo die damals noch nicht edirten Sachen abgedruckt worden sind. Dies brachte mich auf eine Arbeit, die ich vor 20 u. einigen Jahren zu meinem eignen Gebrauch machte[1]), nämlich auf ein streng systematisches Verzeichniß der sämmtlichen Schriften Eulers mit Hinweisung auf den Ort, wo jede derselben zu finden, u. Angabe des Jahrs ihres Entstehens. Ein solches systematisch-chronologisches Verzeichniß erleichtert offenbar das Aufsuchen dessen, was man gerade braucht, unendlich. Bei den Abhandlungen, deren Titel zu vag sind, ist eine kurze Erläuterung des Inhalts hinzugefügt. Dieses Verzeichniß nun nahm ich wieder vor, ergänzte, wo nöthig, u. will es, wenn Sie es gut heißen, der Briefsammlung vorausschicken, nebst einer Nachricht über Eulers Schriften. Es haben sich nämlich unter den in meines Vaters Liste als unedirt angeführten Schriften, einige wenige gar nicht vorgefunden; andere, u. zwar in größerer Anzahl, die seitdem gedruckt sind, fehlen in der Liste; noch andere (ein halbes Dutzend etwa) sind im Manuskript vorhanden u. vorsätzlich nicht edirt worden, zum Theil, weil sie von meines Vaters Hand als „supprimenda" bezeichnet, zum Theil, weil sie apocryph sind. Endlich aber gibt mir mein systematisches Verzeichniß ein Mittel an die Hand unter dem Vorrath Eulerscher Manuskripte, die theils im akademischen Archiv, theils (bis dato noch) in meinem Privatbesitz sich befinden, mit Leichtigkeit bestimmen zu können, was wirklich noch unedirt ist (denn die in meines Vaters Liste als unedirt aufgeführten Abhandlungen sind nur solche die durch Euler selbst bereits der Akademie vorgelegt waren). Eine akademische Commission (an der Ostrogradsky u. Struve bereit sind Theil zu nehmen) mag dann entscheiden, was etwa davon noch gedruckt werden mag; denn darüber will ich natürlich mir allein kein Urteil anmaaßen. Wenigstens glaube ich jetzt schon, vorläufig, ein ziemlich starkes, sauber von Eulers eigner Hand geschriebenes, also nicht aus den allerletzten (aus den Funfziger) Jahren datirendes Fragment unter dem Titel: *Astronomia mechanica* als unedirt bezeichnen zu können, dessen Inhaltsverzeichniß ich für Sie hier beilege. Erst nach vollendeter Sichtung werde ich darüber mit Bestimmtheit mich aussprechen können. — Viele die Integralrechnung betreffende Abhh., die nach der ersten Auflage der *Institutiones C. I.* geschrieben sind, befinden sich nicht im 4ten Bande der zweiten Auflage dieses Werkes, und es

1) Vgl. *Corresp.* t. I, p. XLVII.

ließe sich allerdings wenigstens noch ein 5ter Band daraus bilden. Darüber mag jene Commission einst entscheiden.

Die Akademie hat Ihnen mit Vergnügen ein Frey-Exemplar der *Mémoires, sciences mathématiques* u. der *Savants étrangers* bewilligt, das ich Ihnen nächstens frey pr. Post zu schicken gedenke. Der beste Dank dafür wäre — wenn Sie aus dem reichen Vorrath Ihrer trefflichen Untersuchungen hin u. wieder uns Etwas zutheilen wollten, was unserm *Recueil des savants étrangers* zu Ruhm u. Zierde gereichen würde. — Aus Ihrem Briefe scheint es, als fehlten *Ihnen selbst* die *Opuscula analytica*. Ist dem so, so lassen Sie es mich gefälligst wissen u. ich werde mir ein Vergnügen machen Ihnen ein Exemplar beizulegen.

Ich freue mich eine Beschäftigung gefunden zu haben, durch welche ich Etwas dem mathematischen Publicum Willkommnes liefern kann und die auch bei den steten lästigen Unterbrechungen u. der Zeitzersplitterung, die mein Amt mit sich bringt, allmälig gefördert u. zum Schluß geführt werden kann, da man hier immer den Faden wieder findet. Zu eigentlich wissenschaftlichen Arbeiten komme ich fast gar nicht mehr. Ob die Welt dabei verliert, weiß ich nicht u. bescheide mich gern es nicht zu glauben; die Geschäfte der Akademie aber gewinnen dabei, wenn denn mir auch das Opfer ein wirklich schweres, schmerzhaftes u. auch jetzt noch, nach 15 Jahren, nicht zu verwindendes ist. Einigermaßen tröstlich ist's für mich, daß ein Besserer, als ich, mein Vater, auch zu produciren aufhörte, da er das Sekretariat übernahm. Seine Collectaneen zeigen mir, daß alle seit 1801 gelesenen Abhh. Conceptionen früherer Jahre u. nur später redigirt waren. Er war 46 Jahr alt, ich 27, bei Uebernahme des Sekretariats u. die Wirksamkeit der Akademie nach Außen hat sich seitdem verzehnfacht.

Mit ausgezeichneter Hochachtung verharre ich

Ihr ergebenster
Fuss.

C. G. J. Jacobi an **P. H. v. Fuss**, Königsberg, den 3. Mai 1841.

Königsberg, d. 3n Mai 1841

Hochgeehrtester Herr Staatsrath,

Wie soll ich Ihnen genug für Ihren reichen, inhaltsschweren Brief danken? In der Freude meines Herzens theilte ich ihn Bessel mit, der sich mit mir an dem Genusse labte, den uns alles gewährt, was mit Euler zusammenhängt. Der wunderschöne Brief Johann Bernoullis, den Sie mir mitzutheilen die Güte hatten, hat uns höchst erfreut; der deutsche Styl ist darin so vortrefflich, wenn man von den zufälligen veralteten

Formen abstrahirt, daß man gar nichts besseres lesen kann und wirklich bedauert, daß die übrigen 13 Briefe, auf die dieser sehr begierig macht, nicht auch deutsch geschrieben sind. Sollte denn sein Sohn Daniel so viel schlechter deutsch geschrieben haben, wie aus Ihren Andeutungen hervorzugehen scheint? Alles was von diesem großen Talente herrührt muß uns um so mehr interessiren, da wir verhältnißmäßig wenig von ihm haben; er scheint, wie mir vorkommt, nachdem er von Petersb. nach seiner Vaterstadt zurückkehrte um eine Professur der Medicin zu übernehmen — sie waren fast alle Mediciner, Jakob ausgenommen, der Prediger war — nichts oder wenig mehr für die Wissenschaft gethan zu haben. Er ist sehr berühmt dafür, daß er zuerst eine willkürliche Function in seinen Tonarbeiten durch eine Sinusreihe dargestellt hat, was die Basis der neueren mathematischen Physik geworden ist. Da er den einzelnen mitklingenden Tönen die einzelnen Terme der Reihe entsprechen läßt, so hat er die Entwicklung gewissermaßen gehört. Aber es scheint mir kaum weniger wichtig, daß er zuerst das Princip der lebendigen Kraft in seiner ganzen Allgemeinheit für ein System sich gegenseitig anziehender Punkte aufgestellt hat, während Euler dies nur für die Anziehung nach *festen* Punkten kannte. Dies verhinderte Euler in seiner *Nova methodus inven. l. c. etc.* aus dem von Maupertuis sogenannten principe de la moindre action schon allen Vortheil zu ziehen, den hernach Lagrange daraus zog, der bei seinem ersten Auftreten in den Turiner Memoiren das verallgemeinerte Princip der leb. Kraft zum Grunde legte und hierdurch mit einem kühnen Wurfe die *Mécanique Analytique* gründen konnte. Obgleich Euler an diese Verallgemeinerung, die uns jetzt so einfach scheint, glaubt, so meint er doch, eine gesunde Metaphysik müsse hierbei den Calcul suppliren[1]). Diese Metaphysik besteht dann darin, daß „wegen der Trägheit die Kräfte in der Natur die kleinste Wirkung hervorbringen". Wunderbares Mißverständniß! Der Sinn des Princips soll sein, daß die Natur einen bestimmten Effect mit der kleinsten Action, der kleinsten Thätigkeit, dem kleinsten Kraftaufwande hervorbringt, mit ihren Kräften öconomisirt. Die deutsche Übersetzung „Princip der kleinsten Wirkung" ist ganz unsinnig; ebenso ist der mathematische

1) In der *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne et Genevae 1744, *Additamentum* II *de motu projectorum*, p. 320 sagt L. Euler: Cujus ratiocinii vis, etiamsi nondum satis perspiciatur; tamen, quia cum veritate congruit, non dubito quin, ope principiorum sanioris Metaphysicae, ad majorem evidentiam evehi queat; quod negotium aliis qui Metaphysicam profitentur, relinquo. „Dies zeigt weder eine gesunde, noch überhaupt irgend eine Metaphysik", bemerkt Jacobi hierzu in den von A. Clebsch herausgegebenen *Vorlesungen über Dynamik* (Werke, Supplementband, p. 43—44), „und in der Tat ist Euler nur durch Mißverständniß des Namens 'kleinste Wirkung' zu diesem Ausspruch veranlaßt worden".

Ausdruck höchst verworren, selbst bei LAGRANGE und POISSON, der dagegen nur in EULERS Originalabhandlung untadlig ist. Die Abhandlung von D. B[ERNOULLI] über die lebendige Kraft, die also z. B. zuerst das eine Integral in dem Problem der 3 Körper giebt, steht sonderbarer Weise in den Schriften der Berl. Ak. unter „speculativer Philosophie".

Daß Sie keinen Brief von LAGRANGE an EULER haben, bedauere ich sehr. LAGRANGE war auf zwei Dinge sehr eifersüchtig, auf seine Frau, was man einem der im 70ten Jahre heirathet, nicht übelnehmen kann[1]), und daß niemand die Brouillons zu seinen Arbeiten zu sehen bekäme. Er mag sich daher im Grabe herumgedreht haben, als seine Frau nach seinem Tode heirathete, und alle seine Papiere, wie sie es fand, in einen Kasten warf und diesen dem Institut für einige Tausend Francs verkaufte. Unter diesen Sachen finden sich jedoch zwei oder drei Briefe EULERS, von denen LEGENDRE im 2ten Theil der neusten Ausgabe seiner *Zahlentheorie* S. 142 uns den Inhalt giebt: 1) eine Lösung des Problems, fünf rationale Zahlen a, b, c, d, e zu finden so daß die 10 Producte $ab+1$, $ac+1$ u. s. w. Quadrate sind[2]); 2) Ein Beispiel zu dem Problem, 16 in ein Quadrat geordnete Zahlen zu finden, so daß die Quadrate der 4 Zahlen in jeder Horizontalreihe, jeder Verticalreihe und den beiden Diagonalen eine gleiche Summe geben und dass, wenn a, b, c, d; e, f, g, h irgend zwei Horizontal- oder Verticalreihen sind, man immer hat $ae+bf+cg+dh=0$. LEGENDRE sagt: EULER remarque qu'il y a une infinité de manières de satisfaire à ce problème et qu'il en possède la solution générale. L'analyse de ce problème n'a point été publiée et il est fort à désirer qu'elle le soit, si on peut la trouver parmi les manuscrits de l'auteur, non encore imprimés; car on voit qu'il serait fort difficile de la restituer. Nun können Sie uns aus der Not helfen? Oder fände sich die Lösung doch vielleicht schon unter den gedruckten Sachen, wie Sie aus dem von Ihnen angelegten Verzeichniß müssen entscheiden können[3]).

LEGENDRE bemerkt nicht, daß die Bedingungen für die Horizontalreihen von selbst aus denen für die Verticalreihen folgen, ganz wie bei den ähnlichen Gleichungen bei der Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raum; es sind daher nur 11 Bedingungen zwischen den 16 Zahlen und nicht 22, wie LEG. meint.

---

1) LAGRANGE, 1736 geboren, heiratete 1792 in zweiter Ehe die Tochter des Astronomen LEMONNIER.

2) Vgl. V. BOUNIAKOWSKY et P. TCHEBYCHEW, *Index systématique et raisonné des mémoires arithmétiques de LÉONARD EULER*, *Comm. ar.* t. I, p. LVI—LVII.

3) EULER hatte seine Lösung in der Tat schon 1771 in den Nov. Comment. t. XV, p. 75 veröffentlicht, vgl. auch das Referat von LEBESGUE, Nouv. ann. de math. 15 (1886), p. 403.

Es hat in früherer Zeit gewiss auch ein Briefwechsel zwischen Euler und d'Alembert Statt gefunden[1]); später scheint ihr Verhältniß bitter geworden zu sein, so daß Euler die Aufnahme der d'Alembert schen Abhandlungen gegen ihn in die Schriften der Berliner Akad. verhinderte. Er sagt einmal, „wenn Herr d'Alembert dieses liest, wird er sagen, er sei jetzt zu beschäftigt um mir zu antworten, in einigen Jahren würde er eine Abhandlung schreiben und mich darin widerlegen". Diesen Scherz nimmt dann d'Alembert in einem Briefe an Lagrange sehr übel. Es zeigt dies übrigens Eulers unabhängigen Charakter, da d'Alembert von Friedrich so begünstigt worden. Es ist merkwürdig daß es ganz unmöglich ist, heute noch eine Zeile von d'Alembert hinunterzuwürgen, während man die meisten Euler schen Sachen noch mit Entzücken liest, und sie starben doch in demselben Jahre. D'Alembert scheint seine ganze Eleganz in der Belletristik absorbirt zu haben. —

Die Correspondenz zwischen Euler und Lagrange von Berlin und Turin aus scheint ziemlich lebhaft gewesen zu sein; außer dem Briefe Eulers[2]) im 2. Bande der Miscell. Taurin., der anfängt „Depuis ma dernière lettre" findet sich ein locus classicus im 4. Bande, wonach die Correspondenz 1755[3]) begonnen zu haben scheint (comme il paroit par les différentes lettres qu' Euler m' a écrites sur ce sujet, et que je conserve encore (warum hat er sie nicht länger verwahrt). Dans une de ces lettres datée du 2 Octobre 1759 etc.).

Euler hat auch von Petersburg aus in Correspondenz mit Beguelin gestanden, einem Philosophen und talentvollen Liebhaber der Mathematik in der Berl. Ak. Es findet sich ein Brief von Euler und ein Brief von Ihrem Vater an diesen in den Berl. Mem. für 1776.[4])

Die mir von Ihnen gegebene Notiz über die Brüsseler Ausgabe von Eulers Werken war mir gänzlich neu, woraus Sie sehen, wie entfernter vom Centrum des litterarischen Verkehrs wir hier leben, wozu gewiß

1) Bekannt sind sechs Briefe Eulers an d'Alembert aus den Jahren 1747 1749, die Charles Henry 1886 veröffentlicht hat [Bullet. di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche 19 (1886), p. 136—148].

2) *Lettre de M. Euler à M. de la Grange*, Misc. Taurin. 2, 1760—1761; der Brief ist datiert 1. Jan. 1760; in dem Verzeichnis der veröffentlichten Schriften Eulers, das Fuss 1843 in der *Corresp.* gegeben hat, ist dieser Artikel der Misc. Taur. unter Nr. 507 angeführt.

3) Wie die von Boncompagni veröffentlichten Briefe zeigen, hat der Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler wahrscheinlich schon 1754 begonnen, siehe *Oeuvres* t. 14, Paris 1892, p. 135.

4) Nicolas de Beguelin (1714—1789) war Direktor der phys. Klasse der Berliner Akademie; die im Text angeführten Briefe finden sich in den Nouv. Mém. de Berlin, année 1776 (1779), p. 337—339 und p. 340—346.

die mangelnde Dampfschiffcommunication beiträgt. Ich weiß daher nicht, ob die erschienenen fünf Bände die größeren Werke wiedergeben, was ein weniger dringendes Bedürfniß wäre als die Abhandlungen. Es müßte herrlich sein, die Abhandlungen EULERS über Zahlentheorie und ganz vorzüglich auch die noch immer unentbehrlichen über die Mechanik systematisch geordnet zu besitzen. Hat doch noch neulich, als SCHULTÉN eine Stelle in LAGRANGES *Méc. An.* angriff, die POISSON vertheidigen wollte, EULER den schiedsrichterlichen Ausspruch gethan[1])

In meiner Vaterstadt Potsdam ist bei Sanssouci ein Hügel, auf dem sich die Trümmer einer für Sanssouci bestimmten Wasserleitung befinden, wovon der Hügel der Ruinenberg heißt; nach einer Tradition soll die Wasserleitung von EULER herrühren; wahrscheinlich findet man etwas darüber in den Briefen FRIEDRICHS. Der interessante Brief, den Sie mir als Probe mittheilen, dient als Beleg für die ihm oft vorgeworfenen unangenehmen Seiten seines Characters; diese perfide Härte mag wenig zu EULERS offenem und einfachem Character gestimmt haben[2]).

Sie würden gewiß Ihre Leser verbinden, wenn Sie den Briefen eine Biographie der Briefsteller, wenigstens soweit sie zum Verständniß der Briefe wünschenswerth ist, oder in der Ausdehnung, die Sie für zweckmäßig halten, vorausschicken. Auch könnten Sie gewiß aus Familientraditionen noch manches zu EULERS Leben hinzufügen. Namentlich möchte ich gern näheres über die Art seiner Arbeiten wissen, nachdem er auf den Gebrauch beider Augen verzichten mußte, so daß er also wie es scheint nicht mehr selber lesen und schreiben konnte.[3]) Gleichwohl scheint daß von da an seine allerfruchtbarste Periode sich datirt. Hat er

1) N. G. AF SCHULTÉN (1794—1860), Professor der Mathematik an der Universität Helsingfors, hatte sich 1829 gegen eine das Gleichgewicht eines elastischen Fadens betreffende Stelle der *Mécanique analytique*, 2. éd. t. I, p. 151—159, gewandt (Astr. Nachr. 7, Nr. 155, siehe auch Quarterly journal of science, literature and art 1829, January to June, p. 400). POISSON, den der Herausgeber der Astr. Nachr., H. C. SCHUMACHER, um eine Meinungsäußerung gebeten hatte, begnügte sich damit, Astr. Nachr. 7, Nr. 162, auf EULERS Abhandlung: *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum*, Nov. Comment. 15 ad ann. 1770 (1771), p. 381, zu verweisen; man vergleiche jedoch auch POISSONS Äußerungen in der Correspondance sur l'École polytechnique, t. 3, p. 355 und die Anmerkungen J. BERTRANDS zu dieser Stelle der *Mécanique analytique* (Ausgabe vom Jahre 1853, t. I, p. 143, 148), sowie dessen Note am Schlusse des Bandes, p. 401—405.

2) Vielleicht ist der Brief 16. Juni 1765 gemeint (*Oeuvres de FRÉDÉRIC*, t. 20, p. 208).

3) Diesen Wünschen ist P. H. v. FUSS in der *Corresp.* nachgekommen, wo sich t. I, p. XXVI—XXXIV biographische Angaben über die BERNOULLI und GOLDBACH und p. XLIII—XLV über die Arbeitsweise des erblindeten EULER finden; vgl. auch *Briefw. JACOBI*, p. 96.

immer dictirt und das alles im Kopfe gerechnet, was unmöglich ist, oder hat Ihrem Vater oder Lexell[1]) oder Schubert[2]) gesagt, was sie ausrechnen sollten, was mir das wahrscheinlichste ist. Wahrscheinlich mußten sie ihm auch über die Abhandlungen z. B. von Lagrange berichten und stellenweise vorlesen.

Vielleicht ließe es sich machen, dass Sie in Ihrem Inhaltsverzeichnisse, welches eines der wichtigsten Werke für die Geschichte der Mathematik sein wird, jeder Abhandlung ein Paar Worte über den Inhalt beifügten, oder ihr Hauptresultat. Es wäre dies freilich eine sehr große Arbeit, die indessen vielleicht durch die in den Memoiren vorn befindlichen Auszüge etwas erleichtert würde. Wenn Sie sich wollten helfen lassen, so würden Sie gewiß an Socoloff dabei Unterstützung finden, der wenn auch kein erfinderischer Kopf vielleicht doch einen seltnen Eifer besitzt, das was andere gemacht haben zu verschlingen[3]). Auf mein Andringen sich selber zu versuchen antwortete er immer, wie er das könne, da er noch so vieles nicht gelesen habe; was mir vorkommt, als ob einer der heirathen soll sagt, wie kann ich heirathen, da ich noch nicht alle Mädchen kenne. Sollte das Inhaltsverzeichniß — was es dann wirklich würde — zu groß werden, so könnten Sie es ja auch besonders herausgeben und auch das hätte seine Vorzüge, um es handlicher zu machen. Sie müßten auch ein Portrait Eulers zu den Briefen beifügen; Sie haben gewiß in der Familie mehrere und es wird sich gewiß die Tradition erhalten haben, welches das ähnlichste ist; ceteris paribus bin ich immer für diejenigen Portraits am meisten eingenommen, die ihren Gegenstand in größter Jugend darstellen, wo der Mensch doch eigentlich allein das ist was er ist. Ich kenne von Euler nur das Bild, das Legendre dem 2. Theil seines *Traité d. F. E.* beigefügt, und das, da es in meinem Exemplar zufällig fehlt, mir meine Frau abgezeichnet hat.

Ihre großmütige Offerte mir die beiden Bände *Opuscula Analytica* zu schenken nehme ich mit Enthusiasmus an, da in der That alle meine bisherigen Bemühungen deshalb fruchtlos waren. Ich sah sie zuerst vor zwei Jahren bei Crelle und entdeckte gleich etwas was Dirichlet und ich bisher für unser Eigenthum gehalten hatten; anderes, indem es alte Ideen

1) A. J. Lexell aus Åbo (1740—1784) kam 1768 nach Petersburg und wurde 1783 Eulers Nachfolger. Dieser ließ sich von Lexell, Krafft und seinem ältesten Sohne Joh. Albrecht Euler bei seinen Arbeiten helfen. Seit 1773 aber hat Fuss bei weitem die Mehrzahl der Eulerschen Abhandlungen redigiert; vgl. *Corresp.* t. I, p. XLI—XLIV.

2) Fr. Th. Schubert aus Helmstädt (1758—1825) ist erst 1780 als Hauslehrer nach Petersburg gekommen, er wurde später Mitglied der Akademie.

3) Iwan Dmitriewitsch Sokoloff (1812—1873) war 1836 von der russischen Regierung zu seiner wissenschaftlichen Fortbildung nach Königsberg geschickt worden; vgl. über ihn *Briefw. Jacobi*, p. 61, 64.

von mir befruchtete, kann mich vielleicht zu einer interessanten Entdeckung führen die Entwicklung der Quadratwurzeln in periodische Kettenbrüche auf analoge periodische Algorithmen für Kubikwurzeln und dergleichen auszudehnen; doch habe ich mich bis jetzt, da meine Arbeiten darüber unterbrochen wurden, mit Beispielen begnügt. Sehr erfreut hat mich auch das Anerbieten Ihrer Akademie mir die *Mémoires sciences mathématiques* und die *Savants étrangers* zu übersenden und bitte ich Sie dringend der Akademie dafür meinen wärmsten und aufrichtigsten Dank abzustatten. Was Ihre Aufforderung betrifft der Akademie selber etwas zur Aufnahme in die *Savants Étr.* zu schicken, so erlaube ich mir darüber, obgleich [ich] wohl für die erste Zeit kaum Gelegenheit haben dürfte davon Gebrauch zu machen, folgende Bemerkungen. Ich war immer der Meinung, die Ehrenmitglieder Ihrer Akademie entsprächen dem was andere Akademien Associé oder auswärtiges Mitglied nennen; ein solches aber ist wirkliches Mitglied, das sich nur an einem anderen Orte aufhält, so wie es aber dahin kommt, an allen Rechten z. B. des Votirens Theil nimmt und das wenn es seinen Aufenthalt dauernd an dem Orte der Akademie nimmt, mit den übrigen Mitgliedern von dem Datum seines Ernennungspatents rangirt, wie dies z. B. der Fall wäre wenn ich nach Berlin käme. Hieraus folgt von selbst daß die von den Associés eingeschickten Abhandlungen nicht in die *S. Étr.*, sondern wie die der wirklichen Mitglieder in die *Mémoires* selber kommen, wie z. B. eine Abhandlung von Lagrange als er noch in Berlin war in die *Pariser Mém.* selber, nicht in die *S. E.* aufgenommen wurde. Das Wort *Étranger* bezieht sich keineswegs auf Ausländer, sondern auf solche die der Akademie fremd sind. Nun würde ich aber, wenn ich etwas der Akademie würdiges und noch nicht zu etwas anderem bestimmtes hätte, durch solches Einrücken in die *S. E.* ungern anerkennen daß ich als Ehrenmitglied der Akademie fremd und so fremd wie jeder andere wäre.

Es wäre eigentlich ein nothwendiges Supplement zu den Werken Eulers, wenn Sie die Werke Ihres Vaters herausgeben, die zu jenen in so inniger Beziehung stehen und viel zu wenig bekannt sind. Wer weiß z. B. daß er zuerst die jetzt so viel behandelten sphärischen Kegelschnitte eingeführt hat[1]). Eine schöne Abh. von ihm über Polygone die einem Kreise ein-, einem andern umgeschrieben sind, hat mir selbst früher einmal Gelegenheit zu einer merkwürdigen Construction des Fundamentaltheorems der Elliptischen Transcendenten gegeben[2]). Die dort von Ihrem

1) Nova Acta Petrop. 2 ad 1784 (1788), p. 70—83; 3 ad 1785 (1788), p. 90—99.

2) N. Fuss, Nova Acta Petrop. 13 ad 1795—96 (1802), p. 166—189; C. G. J. Jacobi, J. für Math. 3 (1828), p. 376 = *Werke*, Bd. I, p. 277—293.

Vater gegebenen Zahlenbeispiele sollen Pfaff, wie mir Möbius sagte, zu einem in seinen hinterlassenen Papieren befindlichen merkwürdigen Theorem über den Inhalt solcher Polygone geführt haben. Es würden nur eine mäßige Zahl Bände geben und [man] hat nicht einmal ein Inhaltsverzeichniß, sondern findet nur eine geringe Aushülfe etwa durch Reuss *Repertorium*.

Daß Sie bei den vielen Geschäften, denen Sie so ruhmvoll vorstehen zum Heil Ihrer Akademie, zu eigentlich wissenschaftlichen Arbeiten wenig kommen können, glaube ich Ihnen gewiß, der ich um irgend etwas zu machen, die ganze volle, ungestört vor mir liegende Zeit bedarf. Ich habe daher meine amtlichen Geschäfte auf 5 Stunden Vorlesungen wöchentlich beschränkt, und diese Muße entschädigt mich hinlänglich für eine sonst ziemlich klägliche Stellung. Es ist keine Frage daß auch Ostr. noch ganz andere Dinge leisten würde, wenn ihn nicht, wie ich höre, mehrere Ämter öfters abhielten.

Und nun bitte ich um Entschuldigung für den zu langen Brief, und danke nochmals für Ihr Schreiben, das dabei übersendete und das versprochne. Behalten Sie ferner in geneigtem Andenken

Ihren ganz gehorsamen Diener

C. G. J. Jacobi.

C. G. J. Jacobi an **P. H. v. Fuss**, Königsberg, den 16. April 1842.

Hochgeehrtester Herr Staatsrath

Euer Hochwohlgeboren bitte ich ganz ergebenst, der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften meinen Dank für die Übersendung ihrer *Memoiren* und der *Savants Etrangers* auszudrücken. Zugleich statte ich Euer Hochwohlgeboren meinen Dank für die Vermittlung dieses kostbaren Geschenkes ab. Mit großer Freude habe ich aus Ihrem Berichte[1]) an die Akademie die Nachricht von Ihrem Funde der 100 Eulerschen Briefe vernommen. Ich hoffe Sie werden uns auch aus Paris die beiden an Lagrange verschaffen. Von den Briefen Joh. Bernoullis steht vielleicht einer in Beziehung zu einem Briefe Eulers an diesen, welcher sich ohne Datum in dem Vol. IV der *Opp. Omnia* v. Johannes Bernoulli abgedruckt findet und welchen ich in dem Verzeichniß Ihres Vaters vermisse. Ich kann Ihnen gar nicht sagen, wie sehr ich mich auf das von Ihnen versprochene Werk freue. Aber für noch wichtiger halte ich daß Sie den Gedanken einer Gesammtansgabe von Eulers Werken wiederaufnehmen. Das Belgische Unternehmen scheint todtgeboren, die Herausgeber unwissende Schulmeister, die nicht wußten, was sie vorhatten; in 2 Jahren sollten die

1) Bull. scientif. publié par l'Acad. de St. Pétersbourg, **9** (**1842**), col. 283—286, Sitzung vom 24 9./6. 10. 1841.

25 Bände heraussein und bis jetzt sind nur drei Bände erschienen, die alles zu enthalten scheinen was die Herren von Eulerschen Schriften verstehen konnten. In Berlin hatte kein Mensch von dem Unternehmen Kunde und ohne Sie würde auch ich nie davon gehört haben. Es scheint mir wirklich daß Sie deshalb Ihren großen Plan nicht aufgeben dürfen. Denken[1]) Sie wie sehr er gerade an Ihre Person geknüpft ist und daß er wohl nie ins Leben tritt wenn es nicht durch Sie geschieht. Ich habe in der letzten Zeit wieder ein anhaltendes Studium aus Eulers *Integralrechnung* gemacht und mich aufs neue gewundert wie frisch sich dieses Werk erhalten hat, während der gleichzeitige d'Alembert ganz unmöglich zu lesen ist. Die Eulerschen Beispiele spielen nicht so beiher und erläutern bloß, sie erschöpfen den ganzen Inhalt den die allgemeine Proposition zu der Zeit hat. Der Satz tritt aus seiner absoluten Allgemeinheit heraus, er bekommt einen wirklichen Inhalt, und hierin scheint mir das vorzugsweise Lehrreiche der Eulerschen Schriften zu liegen und warum wir immer wieder zu ihnen zurückkehren müssen. Freilich gehörte um uns diese Totalität des Inhaltes eines Satzes geben zu können auch Eulers allumfassende Wissenschaft. Es ist fast eine Entdeckung, zu den Eulerschen Beispielen eines hinzufügen zu können.

Ihr Versprechen mir Eulers *Opuscula Analytica* zu schenken ist mir zu wichtig als daß ich Sie davon entbinden könnte.[2]) Wenn Sie doch die Muße finden könnten einmal wieder mit einigen Zeilen zu erfreuen

Euer Hochwohlgeboren

ganz gehorsamen Diener

Kön. d. 16. April 1842. C. G. J. Jacobi.

C. G. J. Jacobi an P. H. v. Fuss, Paris, den 11. August 1842.

Paris d. 11ten August 1842.

Hochgeehrtester Herr Staatsrath

Bei einem neulichen Besuche bei Libri[3]), welcher auf das Leidenschaftlichste seltene Msc. und Briefe sammelt zeigte er mir auch eine Sammlung Briefe von Euler an Lagrange.[4]) Es sind Copien, welche

1) Von hier bis zum Ende des Absatzes ist dieser Brief nach einem Konzepte vom 14. April 1842 aus dem Nachlaß Jacobis abgedruckt bei L. Koenigsberger, *C. G. J. Jacobi*, Leipzig 1904, p. 284.

2) Jacobi hat die *Opuscula analytica* zusammen mit der *Corresp.* im Jahre 1843 von Fuss erhalten; siehe *Briefw. Jacobi*, p. 97.

3) Im Sommer 1842 hatte Jacobi zusammen mit Bessel an der Versammlung englischer Naturforscher in Manchester teilgenommen. Die Rückreise ging über Paris, wo sich Jacobi einige Zeit aufhielt.

4) Diese Briefe Eulers an Lagrange sind in den *Op. post.* t. I, p. 555—588 abgedruckt worden. Sie finden sich auch in den *Oeuvres de Lagrange*, t. 14, Paris 1892.

Arbogast, als er Conventsmitglied war, genommen hat und wurden nach seinem Tode in Metz wo er starb mit vielen anderen kostbaren Msc. nach dem Gewicht verkauft an einen dortigen Antiquar Levi von dem sie Libri hat[1]). Es sind:

Briefe von Berlin

vom 6. Sept. 1755	lateinisch	27. Oct. 1759	9. Nov. 1762
24. April 1756[2])		1. Januar 1760	16. Febr. 1765
2. October 1759		24. Juni 1760	3. Mai 1766

Diese Briefe sind wie bemerkt im Original alle von Eulers Hand. Die Petersburger sind von fremder, einige von der Hand seines Sohnes Joh. Albert.

Briefe von Petersburg

vom 9. Jan. 1767 a. St.	vom 9./20. März 1770	vom 24. Sept./5. Oct. 1773
5./16. Febr. 1768	20./31. Mai 1771	Ein Theorem was Euler überschickt und worauf bemerkt ist reçu le 26 Janvier 1775, repondu le 10 Févr. Lagrange.
16./27. Jan. 1770	5. März 1772. Dieser Brief ist von Lexell.	vom 23. März 1775.

Bei mehreren Briefen ist das Datum bemerkt wann Lagrange geantwortet hat. Ich habe die Briefe bei mir zu Hause mit großem Interesse durchgelesen und sie scheinen mir durchaus ächt. Libri ist bereit sie Ihnen für Ihre Ausgabe der Briefe zu überlassen unter der Bedingung wörtlichen Abdrucks. Es findet sich ein interessantes Dokument über Eulers Plan Lagrange mit sich nach Petersburg zu ziehen den er der Kaiserin bereits vorgelegt[3]). Sie mögen nun Gebrauch davon machen wollen oder nicht, so glaube ich daß die Notiz falls Sie sie noch nicht haben Ihnen interessant sein wird. Im ersten Fall würden Sie sich in unmittelbare Correspondenz mit Libri setzen, der auch eine große Menge anderer Sachen z. B. von Daniel Bernoulli hat die Sie interessiren würden. Er hat wie er sagt 50000 Briefe gesammelt. Ich habe auch eine sehr interessante und große Sammlung Briefe von d'Alembert an Lagrange[4]) mir von ihm zum Durchlesen schicken lassen, wo natürlich sehr viel von Euler die Rede ist. Libri würde wenn Sie die Briefe haben wollen später einmal um eine Kopie von Kepplerschen Briefen bitten die sich in St. Petersburg finden sollen.

1) Vgl. Bull. de Férussac, t. 1 (1823), p. 494, Journ. des savants 1839, p. 558.

2) Hier fehlt die Angabe eines kurzen Briefes vom 2. Sept. 1756, *Op. post.* t. **1**, p. 557.

3) Brief vom 3. Mai 1766, *Oeuvres de Lagrange*, t. 14, p. 209.

4) Diese Briefe sind abgedruckt in den *Oeuvres de Lagrange*, t. **13**, Paris 1882, p. 1—377.

Ich schicke Ihnen diesen Brief von Paris, von wo ich den 15. abreise, da es wohl noch 3—4 Wochen dauern wird ehe ich nach Königsberg zurückkehre. Ich habe hier auch erfahren daß das Belgische Unternehmen von der Gesammtausgabe von Euler sich gänzlich zerschlagen hat. Es war bloß eine Speculation um ein Rechenbuch herauszugeben. Grüßen Sie meinen Bruder und sagen Sie ihm daß ich ihm gleich nach meiner Rückkehr eine Reisebeschreibung schicken werde.

Mit der ausgezeichnetsten Hochachtung

Ihr ganz gehorsamer Diener
C. G. J. Jacobi.

Abschrift[1]) des Protokolls der Sitzung der mathematischen Klasse der Königl. Societät der Wissenschaften, zu Berlin am 6. Sept. 1742.

Praes. Herr Professor Euler, Herr Professor Naudé, Herr Director Frisch, Herr Doctor Lieberkühn, Herr Professor Wagner, Herr Professor Grisohau.

Neue Fortsetzung der Miscellaneorum. Da seit geraumer Zeit wegen der noch anhaltenden Unpäßlichkeit des Hrn. Directoris Des Vignoles und anderer Hinderungen die Mathematischen Classe sich nicht versammlet, man aber itzo im Stande ist eine neue Fortsetzung der Miscellaneorum drucken zu lassen, indem verschiedene Mitglieder der Societät und sonderlich der anwesende berühmte Professor *Matheseos* Herr Euler, den S. Majestät aus der Petersburgischen Academie anhero berufen, ihren Beytrag theils überreichet theils annoch bald zu überreichen versprochen; so ist dieserwegen die heutige Versammlung veranlasset und zuvörderst den Herrn Euler und Lieberkühn, welche derselben zum ersten Mahl beywohnen, bezeuget worden, wie sehr die ganze Societät sonderlich aber gegenwärtige Mitglieder sich freuen, daß die Herren sich zu der Mathematischen Abtheilung bekennen wollen, und man sich von ihnen alle Hülfe, Rath, Beystand und Freundschaft zur Ehre und zum Besten der Societät gewiß verspreche, welche sie denn auch nach Möglichkeit zu leisten gütig zugesaget. — Hierauf hat

Hrn. Eulers Beytrag. Herr Euler angezeiget, dass seit seiner Ankunft in Berlin er folgende Stücke ausgearbeitet die er den Miscellaneis gewidmet:

1° *Determinatio orbitae cometae qui mense Martis hujus anni 1742 [potissimum] fuit observatus.* [665.]

2° *Theoremata circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli.* [205.]

---

1) Die Abschrift ist durch Vermittelung von M. H. Jacobi an P. H. v. Fuss gesandt worden, siehe *Briefw. Jacobi*, p. 148.

3⁰ *De Inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur.* [222.]

4⁰ *De Summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum.* [175.]

5⁰ *De Integratione aequationum differentialium altiorum graduum.* [261.]

6⁰ *De proprietatibus quibusdam sectionum conicarum in infinitas alias lineas curvas competentibus.* [345.]

7⁰ *De resolutione Aequationis* $dy + ayy\,dx = bx^m\,dx$. [268.]

Weil aber die fünf ersten Stücke schon einen großen Raum füllen werden, so ward beliebet die beyden letzten zu einer andern Fortsetzung zu ersparen[1]).

Hrn. Naudés Beytrag. Herr Naudé meldet, daß er vorangezeigete Mathematische Abhandlungen des Herrn Professors Euler gesehen und selbige nicht genugsam anrühmen könne. Seinen Orts hätte er das vorgelegte Stück unterm Titel *Conspectus Trigonoscopii Continuatio cum adjectis curiosis nonnullis problematis [algebraicis]* ausgearbeitet, welches er dem Herrn Euler gezeiget, der es gutgeheißen, und daher itzo zu den Miscellaneis abgegeben wird

---

Dies ist das Protocoll der vorletzten Sitzung, über welche sich in dem Archiv der Akademie etwas findet. Dann kommt eine große Lücke bis zum Jahre 1746, von wo die Protocolle in franz. Sprache geführt sind und von Euler nur kurz bemerkt ist, welche Abhandlung er gelesen. Die große Menge handschriftlicher Aufsätze von Euler, die aber wohl alle gedruckt sind, werde ich nächste Woche genauer durchsehen und dann darüber berichten. Berlin d. 12. Febr. 47.

C. G. J. Jacobi.

C. G. J. Jacobi an **P. H. v. Fuss**, Berlin, den 24. Oktober 1847.

Berlin d. 24. Oct. 1847.

Hochgeehrtester Freund und Gönner

Die Frage, die Sie einst an mich richteten, ob sich nicht in den Archiven der Berliner Akademie die Originale der Eulerschen Abhandlungen befinden, von denen im 1. Bande ihrer Memoiren seit ihrer Erneuerung unter Friedrich II. nur Auszüge publicirt sind — schon D. Bernoulli hat hierüber in einem Briefe[2]) seine Verwunderung ge-

1) Die ersten fünf Stücke sind in der Tat abgedruckt Misc. Berol. 7 (1743), p. 1—242, das sechste Stück aber in französischer Übersetzung in den Mém. de Berlin 1, année 1745 (1746), p. 53, 71, und das siebente Stück Nov. Comment. Petrop. 9 ad 1762—1763 (1764), p. 154.

2) Hier und an anderen Stellen erwähnt Jacobi sonst nicht bekannte Briefe von Daniel Bernoulli; vgl. auch p. 300, Fußnote 2.

äußert — hat mich veranlaßt, unsere Archive in Bezug auf Eulersche Papiere vollständig und gründlich zu untersuchen, und ich bin so frei das Resultat dieser Arbeit zugleich als ein Zeichen meiner persönlichen Verehrung und zum Andenken und der Wichtigkeit welche ich auf jeden noch so geringfügig scheinenden Umstand, welcher Euler betrifft, lege, Ihnen anbei zu übersenden. Zur Franzosenzeit sind die Archive der Akademie, als diese selbst während 10 Jahren suspendirt war, umhergestreut gewesen, und erst in der jetzigen Zeit sind die Trümmer wieder gesammelt worden. Wie die von mir angefertigte Liste ergiebt befinden sich unter dem Geretteten die lateinischen Originale ziemlich vieler Abhandlungen von Leonhard und J. A. Euler, von denen französische Übersetzungen publicirt sind. Von viel größerem Interesse sind aber Arbeiten Eulers, welche im Msc. eine ganz andere Gestalt haben, als welche er ihnen später gegeben hat, so daß man sieht, daß er keineswegs so wie man glauben möchte die Publication seiner Arbeiten übereilt hat, sondern sie bisweilen lange liegen ließ und mehrfach umarbeitete. Von vorzüglichem Interesse schien mir aber auch aus den alten Protocollen die Liste der Abhandlungen zu entnehmen, die er in den verschiedenen Sitzungen gelesen hat, da dieses das beste Bild seiner Thätigkeit giebt, indem er in der Regel auch die in Ihren Commentarien abzudruckenden unserer Akademie vorgelegt hat. Der Vergleich dieser Liste mit der Ihrigen hat mir viel Vergnügen gemacht. Bei dieser Gelegenheit habe ich auch einen für die Geschichte der Mathematik ungemein wichtigen Tag gefunden, an welchem unsere Akademie Euler auffordert das von Fagnani ihr übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser antwortet. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Functionen entstanden.

Je wichtiger Ihre Liste ist und je häufigeren Gebrauch ich davon gemacht habe, desto mehr kann ich sie nur für die Grundlage einer vollständigern Arbeit halten. Denn sie ist noch nicht so beschaffen, daß man darin die Abhandlungen finden kann, in welchen Euler über einen gegebenen Gegenstand geschrieben hat. Aber die Vervollständigung der Liste müßte nach und nach geschehen; zunächst wohl könnte die billige Forderung erfüllt werden, daß wo man auch nicht ungefähr aus dem Titel die Gegenstände der Abh. errathen, dieselben angedeutet würden, was wenigstens nicht immer geschehen ist[1]). Dies ist besonders dann nöthig, wenn die Abh. in seltenen und wenig zugänglich[en] Werken. So glaubte ich neulich in einer meiner Abh. das vollständige Verzeichniß der Abhandlungen zu geben, in denen Euler die Gleichung

1) Diese Wünsche Jacobis sind bezüglich der arithmetischen Abhandlungen erfüllt worden in dem *Index systématique*, vgl. Anmerkung 2, S. 245.

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots\ldots = 1-q-q^2\ldots$$

und ihre Folgerungen behandelt. Wie konnte ich aber denken, daß die Abh. Ihrer Liste *Decouverte d'une loi extraordinaire des nombres* im Journal litteraire d'Allemagne 1751 Janvier et Février (die nach meiner Liste am 22. Juni 47 gelesen ist und von der das lateinische Original vorhanden) denselben Gegenstand und zwar am frühesten behandelt? Ich bemerke noch, daß Abh. 129 *Dem. gem.* etc. unter die Rubrik *Théorie des équations* wohl besser als unter die *Séries* gehört; daß die Branche *combinatorische Analysis* ganz fehlt; endlich daß die Abh. *De la controverse etc. sur les logar.* in Ihrer Liste ausgelassen ist, die im Archiv in gänzlich verschiedner Gestalt im Msc. vorhanden ist. Auch die Abh. im 8. Bande der Comment. *„Curvarum maximi minimive"* etc. scheint in Ihrer Liste zu fehlen*). Es wäre wohl gut gewesen, wenn Sie aus der übergroßen Classe *Courbes des ordres supérieurs* die ausgeschieden hätten die zur *Theorie des Größten und Kleinsten*, welche Überschrift jetzt ganz fehlt, oder zur Variationsrechnung und diejenigen welche zur Mechanik gehören, so daß die bloß geometrisches Interesse darbietenden zurückgeblieben wären.

Wäre ich stolzer Besitzer der N. Comm., Acta und N. Acta (ich habe nur die alten Comm.), so würde ich mir allmählig in Mußestunden zu meinem Privatgebrauche Ihre Liste in Bezug auf den Inhalt der Abhandlungen vervollständigen.

Ich habe mit großem Interesse vernommen daß der Druck des ersten Bandes der *Arithmetica* bald vollendet ist. Ich bin sehr neugierig, welchen Plan Sie in Bezug auf die Anordnung angenommen haben. Aber ich beschwöre Sie, wenn es nicht schon geschehen ist, die Abh. 321—27, welche sich unglücklicher Weise unter Geometrie verirrt haben, mit aufzunehmen, welche durchaus zu den Diophantischen Problemen gehören[1]). Denn diese zusammen zu haben, ist eine wesentliche Annehmlichkeit.

Ich muß noch ausdrücklich bemerken, daß in dem hier beifolgenden *paper* ich nur diejenigen handschriftlich noch vorhandenen [Abhandlungen] hervorgehoben habe, bei welchen etwas von besonderem Interesse zu bemerken war. Von vielen anderen unverändert abgedruckten sind in den angegebenen Convoluten die Msc., die bisweilen im Titel eine interessante Variation geben So ist in der Abh. 385 *„Methodus inveniendi curvas isoperimetricas communi proprietate praeditas"* vor *communi* im Msc. das Wort *aliave* eingeschoben.

*) {Nein, sie steht darin, aber am unrechten Orte pg. XVII oben. [196.]}

1) Die sechs Abhandlungen (Nr. 324 ist mit 321 identisch) sind in der Tat in die *Comm. ar.* aufgenommen worden; in dem *Index systématique* haben sie die Nummern 72, 74, 70, 73, 81, 75.

Ich hatte Ihnen mit Hrn. v. Struve einen Zettel mitgetheilt über eine ungeheure Correspondenz, welche das tägliche Privatleben Ihres mütterlichen Großvaters betrifft, welches den von aller Arbeit am weitesten entfernten und im Zerstreuungswirbel untergehenden, aber sehr wohlwollenden und besonders streng kirchlichen Gelehrten zeigt. Von seinem Vater nur, daß er bei ihm zu Abend gegessen. Er muß sehr liebenswürdig gewesen sein. Vielleicht kommt es später interessanter, denn ich habe mich erst durch etwa den vierten Theil hindurchgearbeitet. Er schreibt einmal, seine Frau sei vergangne Woche zweimal ausgewesen und er drei Tage zu Hause geblieben, und man habe sich gestritten, was merkwürdiger sei[1]).

Ein besonderes Verdienst Ihrer Liste ist noch, daß Sie bei den Schriften der Petersb. Ak. das Jahr in welchem die Abhh. präsentirt wurden dem Jahre, in welchem der Band gedruckt erschien substituirt haben. Dadurch, daß Ihr Vater immer nur das letztere Jahr angegeben, hat er seiner Liste die Hälfte ihrer Branchbarkeit genommen.

Leben Sie wohl und lassen Sie mir einmal ein Zeichen Ihres Andenkens zukommen. Verzeihen Sie diesen flüchtig geschriebenen Brief.

Ihr treu ergebener

C. G. J. Jacobi.

[Beilage.]

I. Aus dem Jahre 1747 hat sich ein Band erhalten, welcher die Copien der in diesem Jahre gelesenen Abhandlungen enthält. Von den für den Druck in's Französische übersetzten Abh. hat man hier das Original. Das Gleiche gilt für II und III. Hervorzuheben sind:

Eine ungedruckte Abh. von Walz (gel. d. 9. Febr.): *Solutions de quelques problèmes qui ont rapport à la rectification des courbes.*

NB. Aus einem Briefe von J. A. Euler an Formey sehe ich, daß Walz jung in Dresden gestorben ist; er beklagt ihn sehr wegen seines Talents und seiner persönlichen Eigenschaften.

1. Die Abh. von Euler *De numeris amicabilibus.* Sie ist gänzlich von derjenigen verschieden, die in *Opp. V. A.* abgedruckt ist. Sie bietet ein schönes Beispiel, wie E. seine Abh. oft umgearbeitet hat, ehe er sie

1) Über das „Tagebuch" Joh. Alb. Eulers schreibt Jacobi am 11. Juni 1847 an seinen Bruder Moritz (*Briefw. Jacobi*, p. 153): „Ich habe Fuss sehr viel Euleriana zu schreiben, komme aber zu nichts. Ich kann ihm sagen, wo sein Großvater mütterlicher Seite jeden Tag in Petersburg gegessen hat, und kann in alle seine Familiengeheimnisse dringen. Denn J. A. Euler hat seinem Onkel Formey ein regelmäßiges Tagebuch geschrieben, welches jetzt die Formeyschen Erben der hiesigen Königlichen Bibliothek geschenkt haben, von der ich die Briefe bei mir habe, sie aber noch nicht habe durchstudiren können."

zum Druck bestimmt. Eine dem Msc. angehängte Tafel, wo die Factoren von $1 + p^n$ angegeben sind, wenn p eine Primzahl ist, findet sich auch im Text der gedruckten Abh. Krafft hatte nicht unlängst eine Abh. über diesen Gegenstand der Ak. eingesandt, die vielleicht die Beschäftigung Eulers mit demselben veranlaßt hat.

2. Die am 7. Sept. gelesene Abh.: *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* ist hernach im **5**. Bande der B. M. *in einer gänzlich verschiedenen Redaction* erschienen, sodaß sie als eine besondere Abh. angesehen werden kann. Sie scheint in der systematischen Liste zu fehlen.

II. Enthält aus dem Jahre 1748 die in den Sitzungen gelesenen Abhandlungen.

3. Das *lateinische Original* der im **4**. B. der B. M. abgedruckten Abh. *sur la vibration des cordes.* (Die am 12. Sept. gelesene *Réflexions etc. über die letzte Sonnenfinsterniß* befindet sich nicht in dem Volumen.) {Wahrscheinlich ist sie französisch concipirt.}

4. Das *lateinische Original* der im **4**. B. der B. M. gedruckten Abh.: *Sur l'atmosphère de la Lune etc.* (gel. den 5. Dezember).

III. Ein dicker Folioband von in der B. Ak. zu sehr verschiedenen Zeiten gelesenen Abh., die an verschiedenen Orten gedruckt sind.

5. *Recherches pour servir à la perfection des lunettes*, gel. den 25. Juni 1755. Diese Abh. scheint nicht gedruckt zu sein, ist aber vielleicht eine Vorarbeit zu der im **13**. B. der B. A. gedruckten. Sie enthält *fünf* Sectionen; die erste giebt die allgemeinen Formeln, die 2[te] bis 5[te] respective die auf 2, 3, 4, 5 Gläser bezüglichen Untersuchungen.

6. *De motu fluidorum in genere*, gel. den 31. Aug. 1752; ob dieselbe wie die Abh. *Principia motus fluidorum* im **6**. Bande der N. C. v. J. 1761 habe ich nicht vergleichen können, da ich den Band nicht bei der Hand hatte; diese letztere wird in der Abh. *Principes généraux du mouvement des fluides* citirt, die den 4. Sept. und 2. Oct. 1755 gel. und im **11**. B. der B. M. gedruckt ist.

7. *Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum.* In dieser Abh., welche den 17. Juli 1751 gelesen ist, kann Euler, wie er sagt, noch nicht beweisen, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate ist. Der Beweis hiervon beginnt die Abh. *Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum primum formae $4n + 1$ esse summam duorum quadratorum*, die im **5**. B. der N. C. v. J. 1761 gedruckt ist. Diese Abh. findet sich ebenfalls im Msc., aber auf den Gegenstand, den der Titel angiebt, beschränkt und ohne die angehängte Abh. über die qu. Reste und die Zerfällung in 4 Quadrate. Da sie mit den Worten

beginnt: daß der Vf. in der *neulich* gelesenen Abh. den Beweis noch nicht habe finden können, so ist sie wahrscheinlich eine den 9 Sept. 1751 gelesene Abh., die bloß als *sur un problème d'Arithmétique* in den Protocollen bezeichnet ist[1]). Aus diesen beiden am 17 Juli und 9 Sept. 1751 gelesenen, im Msc. noch vorhandenen Abh. ist die Abh. im 5. B. der Novi Comm. v. J. 1761 entstanden. In dem Auszug vorn im Bande der Geschichte der Akad. steht, daß S. 13 der Abh. eine neue ohne besonderen Titel angefügt sei; diese ist die Abh. *D. th. F. o. n. sive i. sive fr.* etc., aus welcher nur das auf jenen noch fehlenden Beweis bezügliche fortgelassen ist. Sie ist die Hauptabh. über die Elemente der quadratischen Reste, und enthält den Satz, wie *das Product zweier Summen von vier Quadraten wieder diese Form hat.*

8. *De Draconibus volantibus,* Abh. v. Euler Sohn, die er den 16. Dec. 1757 [p. 265: 4. Nov. 1756] gelesen. Sie ist von einer Abh. des Vaters der Form und dem Stil nach nicht zu unterscheiden. Die franz. Uebers. ist in den B. M. abgedruckt: *Sur le cerf volant* v. J. 1756.

IV. Ein Convolut Msc. in 4, welche sämmtliche in den B. M. v. 1759—61 (B. 15, 16, 17) abgedruckten Abh. von Euler Vater und Sohn, von ihrer eigenen Hand geschrieben, enthält. Es sind die Msc., von denen der Abdruck geschehen, wie aus den Rothstiftzeichen des Druckers erhellt.

V. Eine Abh. v. d'Alembert Msc.:

Observations sur deux Mémoires de Mr. Euler et Daniel Bernoulli, inserés dans les Mémoires de 1753. (Die 4 Figuren, auf die Beziehung genommen wird, fehlen.) Auf diese in den B. Mém. nicht gedruckte Abh. bezieht sich der folgende in den B. M. T. XI. S. 401 gedruckte

Extrait d'une lettre de M. d'Alembert à M. Formey du 4 Fevr. 1757. J'ai eu l'honneur d'envoyer à l'A. une réponse aux deux Mém. de Ms. Bernoulli et Euler, imprimés dans le volume d. 1753. M. Euler a bien voulu me communiquer *en manuscrit* la réplique qu'il y a faite quant à ce qui le regarde; mais bien loin que cette réplique m'ait convaincu, elle m'a fourni, j'ose le dire, de nouvelles preuves de mon sentiment. Cependant, Monsieur, comme M. Euler parait désirer que cette controverse n'aille pas plus loin dans vos Mémoires, je consens volontiers que ma réponse ne paraisse pas dans ce Volume, auquel elle était destinée, sauf à publier ailleurs, si je le juge à propos, les remarques importantes que je crois avoir faites sur cette matière. Je suis etc.

1) Diesen ganzen Absatz hat Jacobi später in wesentlichen Punkten berichtigt; lies ferner statt „17. Juli 1751": „17. Juni 1751"; s. S. 262, 289, 291, 293.

Die Ak. erklärt hierauf, die Nichtaufnahme der d'Alembertschen Abh. in ihre Mem. sei nicht auf den Privatwunsch Eulers geschehen, sondern weil sie aus ihren Schriften alle Gegenstände des Streites entfernen wolle (tous les sujets de controverse!!); sie würde übrigens gern sehen, wenn Hr. d'Alembert seine Abh. auf anderem Wege publicirte, da sie nicht zweifele, daß diese Disciplin viel zum Fortschritt der Wissenschaft beitragen würde (!).

Die Abh. von d'Alembert ist nicht gedruckt worden, aber bei einer Abh. im 1. Theil der *Opusc.* benutzt.

VI. Ein Convolut handschriftlicher Abh. der verschiedensten Autoren. Es sind eigenhändige Msc.

Das *lat. Original* der in den B. M. v. J. 1761 gedruckten Abh. von J. A. Euler: *Disqu. de lentibus objectivis* etc. zugleich mit der fr. Uebers.

Die 3 von Euler im 21. Bande (1765) publ. Abh.; mit den Druckerzeichen. (Wahrscheinlich ist hier auch das Originalmsc. von einer Abh. v. Lagrange über die Tautochronen, d. 4. März 1763 gel.)

VII. Zwei eigenhändige Gutachten von Euler.

1) über eine Quadratur des Kreises eines Hr. Pöschel, v. 21 Dec. 1754, eine Seite; 2) ein sehr großes von 7 Seiten über eine Abh. von Gerdil mit Experimenten an der Luftpumpe und mit Capillarröhrchen; er bestreitet die Adhäsion. Euler nimmt Partei dafür, die Attraction durch einen zusammendrückenden Aether zu erklären.

Ein drittes Gutachten über Spiegelteleskope, die ein Père la Borde vorgeschlagen, besitzt die Königliche Bibliothek. Es scheint aber nach den Protocollen der Ak. von Castillon verfaßt zu sein, obgleich es Eulers Unterschrift trägt, was dadurch erklärt werden kann, daß es von ihm als Director dem la Borde im Namen der Akademie mitgetheilt wurde, wobei das Mitglied, welches im Auftrage der Ak. das Gutachten abgefaßt hat, nicht angegeben wird.

Abhandlungen, die Euler vom Jahre 1746 an in der Berliner Akademie d. W. gelesen hat.

1746.

23. Juni. *De trajectoriis reciprocis* {389}.
6. Juli. *De machinis in genere* {556}.
22. Sept. *De promotione simplici* {N. B.}.
27. Oct. *De seriebus divergentibus* {125}.
10. Nov. *Theoremata de radicibus aequationum imaginariis* {108}.

1747.

12. Jan. *Demonstratio gemina th. Neut. in quo traditur relatio inter coeff. cuiusvis aequ. alg. et summas pot. radd. eiusdem* {129}.

23. Febr. *De numeris amicabilibus* (2).
23. März. *Theoremata circa divisores numerorum* (7).
8. Juni. *Recherches sur les mouvements des corps célestes en général* (605).
22. Juni. *Découverte d'une propriété extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* (ist das Nr. 3 meiner Liste?).
20. Juli. *De reductione linearum curvarum ad arcus circulares* (414).
7. Sept. *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* (NB befindet sich in Mém. de Berlin V. 1749 und fehlt in meiner Liste.)[1])
21. Sept. *Méthode de trouver les vrais moments tant des nouvelles que des pleines lunes* (650).
12. Oct. *Sur une contradiction apparente dans la théorie des lignes courbes* (344).
26. Oct. *Sur le point de rebroussement de seconde espèce de Mr. le M. de l'Hospital* (428).
23. Nov. *Sur la force des rames* (600).
6. Dec. *Sur la parallaxe de la Lune etc.* (647).

1748.

18. Jan. *Suite d'un mém. préc.: sur le nombre des points où deux lignes d'ordre quelconque peuvent se couper* (343).
1. Febr. *Réflexions sur l'espace et le tems* (746).
16. Mai. *De vibratione cordarum* (520).
4. Juni. *Sur la friction des corps solides* (549).
12. Sept. *Réflexion sur la dernière eclipse de soleil arrivée le 25 Juillet 1748* (670).
27. Sept. *Sur la perfection des verres objectifs des lunettes* (714).
24. Oct. M. Euler a communiqué diverses relations des eclipses de cette année qui ont été envoyées par MM. Marinoni, Pohlack, Weidler, Bose etc. Après quoi il a lu un mémoire de sa façon *Sur l'accord des deux dernières eclipses avec son calcul* (651).
5. Dec. *De atmosphaera lunae ex eclipsi solis evicta* (648).
19. Dec. *Recherches de maximis et minimis dans les actions des forces* (534).

1749.

6. Febr. *Réflexions sur quelques lois générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques* (533).
20. Febr. *Sur la diminution de la résistance du frottement* (550).
20. März. *De numeris qui sunt aggregata duorum quadratorum* (59).
17. April. *Sur l'inégalité du mouvement des planètes* (NB).
5. Juni. *Sur la véritable cause du mouvement progressif des aphélies des planètes* (NB).

1) „Ist da, unter Nr. 189", sagt Fuss in dem S. 276, Anm. 1 erwähnten Handexemplare.

19. Juni. *Consideratio quarundam serierum quae singularibus proprietatibus sunt praeditae* {156}.
28. Aug. *Conjectura physica de propagatione soni et luminis* {502}.
11. Sept. *Animadversiones in rectificationem ellipsis* {355}
23. Oct. *Sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite* {574}.
20. Nov. *Discussion plus particulière des diverses manières d'élever l'eau* {583}. [Vgl. dazu: 1751, 18. Nov.]
4. Dec. *De perturbatione motus planetarum ab eorum figura [non] sphaerica oriunda* {619}.

1750.

5. Febr. *Maximes pour arranger le plus avantageusement les machines destinées à élever l'eau par le moyen des pompes* {584}.
5. März. *Recherches sur la précession des équinoxes* {677}.
19. März. *Emendatio laternae magicae ac microscopii solaris* {727}.
3. Sept. *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* {444}.
1. Oct. *Réflexions sur les forces en général* {NB}.
15. Oct. *De numeris qui sunt aggregata duorum quadratorum* (s. 20. März 1749) {59, wohl identisch mit jener}. [S. jedoch p. 293 ad 2.]
12. Nov. *De motu corporum coelestium a viribus quibuscunque perturbato* {608}.
26. Nov. *Elementa doctrinae solidorum* {318}.

1751.

7. Jan. *De methodo Diophanteae analoga in analysi infinitorum* {80}.
14. Jan. *Sur le problème isopérimétrique* {NB}. [S. p. 293 ad 4.]
4. März. *Réflexions sur les divers degrés de lumière du soleil et des autres corps célestes* {673}.
22. April. *Theoria motus lunae* {639}.
6. Mai. *Recherches sur le mouvement des rivières* {571}.
17. Juni. *Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum* {NB fehlt unter diesem Titel}. [S. jedoch p. 294 ad 17.]
9. Sept. M. Euler a lu 2 mémoires dont le premier concernait *un théorème d'arithmétique*, et le second *un théorème de Stéréométrie* {NB}. [S. p. 294 ad 16 und für die 2. Abh. ad 14.]
7. Oct. Beginn der Verh. über Koenig.
21. Oct. *De cochlea Archimedea* {581}.
18. Nov. *Réflexions sur la machine de M. Mayer pour élever l'eau* {NB Vielleicht No. 583}.
2. Dec. *Tentamen theoriae de frictione fluidorum* {575}.

23. Dec. M. le Président présente un ouvrage de géométrie en italien en 2 volumes in 4°, que M. le Marquis DE FAGNANO son Auteur envoie à l'Académie. M. EULER prendra la peine de l'examiner, avant qu'on fasse réponse. (Von dieser Zeit an datiren die durch dieses Werk hervorgerufenen Arbeiten EULERS über die Addition der elliptischen Integrale.)
Großer Brief von KOENIG an MAUPERTUIS.

1752.

27. Jan. *Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium.* Die Frucht der Lectüre des Werkes von FAGNANO; das Fundamentaltheorem über die Addition der Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ {423}.

10. Febr. *Nouvelle méthode pour éliminer les inconnues des équations* {106}.

9. März. *Subsidium doctrinae sinuum* {329}.

23. März. *De aptissima rotarum dentibus figura tribuenda* {560}.

13. April liest EULER seinen *lateinischen* Bericht, worin er beweist, daß die von KOENIG als aus einem LEIBNITZschen Briefe citirte Stelle an sich verdächtig sei, und durch die Umstände ihm Falschheit offenbar werde. Der Curator der Ak., Hr. v. KEITH, sammelt einzeln die Stimmen, und die anwesenden Mitglieder fällen einstimmig ihr berüchtigtes Urtheil, worin sie den Conclusionen, die EULER am Schlusse seines Berichtes zieht, beipflichten. Diese Spiegelfechterei — denn von allen Mitgliedern war EULER der einzige, der ein Urtheil über die Sache haben konnte — verwickelte die Akademie in einen Privatstreit ihres Präsidenten, den EULER nur dadurch vertheidigen konnte, daß er durch ein Quiproquo eine große Entdeckung, die er selbst gemacht, dem Wischiwaschi von MAUPERTUIS substituirte. Der große blame, den in ganz Europa diese Sache erhielt, hatte die gute Folge, daß das unwürdige Abhängigkeitsverhältniß, in dem die Ak. von MAUPERTUIS stand, der nach einer Cabinetsordre vom 12. Mai 1746 ganz allein dem König die Vorschläge über die Gehalte der Akademiker zu machen hatte, mit dessen bald erfolgtem Tode erlosch, da der König sich scheute, einen neuen Präsidenten zu ernennen {449}.

22. Juni. *Sur la réfraction de la lumière* {= 691?}.

6. Juli. KOENIG schickt der Ak. das Diplom als Correspondent zurück, was sie sehr übel nimmt.

20. Juli. *Recherches sur la véritable courbe que décrivent des corps jetes dans l'air ou dans un fluide quelconque* {390}.

31. August. *De motu fluidorum in genere* {564? oder 566?}.

28. Sept. *Sur l'application de la machine hydraulique de M. Segner* {579}. Der Artillerielieutenant Jacobi wird zum Mitglied (associé ordinaire) erwählt.

12. Oct. *De formulis differentialibus* {N B}.

21. Dec. *Examen dissertationis Cl. Prof. Koenig Actis Erud. Lips. insertae pro mense Maio 1751* {447. 448}.

21. Dec. überreicht Euler die *Théorie de la lune* von Clairaut.

1753.

18. Jan. *Principes de trigonométrie sphérique, tirés de la méthode des plus grands et des plus petits* {332}.

22. Febr. *Sur le principe de la moindre action* {446}.

8. März. *Calcul des probabilités dans les jeux de hazard* {299?}.

12. April. *Exposition physique de la cause des couleurs des feuilles très minces* {= 698?}.

3. Mai. *Resolutio aequationum cuiusvis generis* {114}.

21. Juni *Specimen novae methodi quadraturas curvarum inveniendi* {= 424?}.

5. Juli *De problematis indeterminatis quae videntur plus quam determinata* {55}.

13. Sept. *Théorie plus complette des machines qui agissent par la réaction de l'eau* {580}.

11. Oct. *Principes généraux de l'état de l'équilibre d'un fluide* {562}.

22. Nov. *Specimen de usu observationum in mathesi pura* {4}.

1754.

17. Jan. *Sur les scies* {582}.

31. Jan. *De numeris* {NB das ist doch zu wenig bezeichnend}.

25. April. Un mémoire relatif aux deux pieces de D. Bernoulli lues le 28 Févr. et le 14 Mars: *Sur les vibrations des cordes tendues et sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones* {521}.

9. Mai. *Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum* etc {73}.

22. Aug. *Examen de la controverse sur la loi de la réfraction des rayons de diverses couleurs* {695}.

11. Sept. *Élémens de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits* {soll wohl heißen *sphéroidique* 336}.

31. Oct. *Exposition de quelques paradoxes dans le calcul intégral* {278}.

15. Nov. *Réflexions sur un problème de géométrie traité par quelques géomètres et qui est néansmoins impossible* {362}.

Un mémoire allemand sur le projet que M. l'architecte Buchte a proposé pour la perfection des moulins (N B).

12. Dec. *Recherches physiques sur la diverse refrangibilité des rayons de lumière* (692).

1755.

9. Jan. *Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi* (352).

13. Febr. *Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta* (8).
Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Erud. Lips. propositorum (348).

27. Febr. *Sur l'avantage du banquier au jeu de pharaon* (298).
Solutio problematis de tribus numeris etc. (61?).

24. Apr. *Sur la variation de la latitude des étoiles et l'obliquité de l'eclipse* (672).

12. Juni. *De integratione aequationum integralium* (254 N B).

26. Juni. *Recherches pour servir à la perfection des lunettes* (713?).

4. Sept. *Principes géneraux du mouvement des fluides* } (564 [und 565]).
2. Oct. *Continuation* }

10. April. M. Euler fils: *de tempore descensus corporis, ad centrum virium in ratione reciproca distantiarum attracti.*
20. Aug. }
27. Nov. } „ „ *theoria inclinationis acus magneticae experimentis confirmata.*

1756.

15. Jan. *Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent* (586).

26. Febr. *Principia theoriae machinarum* (558).

8. Apr. *Dilucidationes circa resistentiam fluidorum* (576).

1. Juli. *Règles générales pour la construction des microscopes et des télescopes* (720 oder 722?).

15. Juli. *Recherches sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets renversés* (706).

9. Sept. *Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum* (197).

16. Sept. *Elementa calculi variationum* (289).

21. Oct. *De integratione aequationum differentialium* (254?).

16. Dec. *De aequationibus differentialibus secundi gradus* (257).

4. Nov. M. Euler fils: *De draconibus volantibus.*

1757.

17. Febr. Erklärung der Ak., warum sie zwei Abh. von d'Alembert nicht aufgenommen. Sie wollen keine Streitschriften! Aber die Eulerschen gegen Koenig!?

23. Juni. M. Euler a communiqué à l'Ac. un écrit envoyé par M. le Marquis de Fagnano. C'est un mémoire italien de Géométrie.

25. Juni. *Expériences pour déterminer la réfraction de toutes espèces de liqueurs transparentes* (697).

21. Juli. *Specimen algorithmi singularis* {92}·
1. Sept. *Sur la force des colonnes* {588}·
29. Sept. *Recherches sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée* {740? da steht aber *la déclinaison!* [S. jedoch p. 288.] Vgl. 1765 Nov. 7}·
24. Nov. *De modo quo lentes in catinis poliuntur* {699}·
17. Febr. J. A. Euler *Problema: data altitudine coni determinare figuram basis ut conus inter omnes alios eiusdem superficiei maximam habeat soliditatem!*
10. Mai. *De motu plani a vento abrepti.*
13. Oct. } 10. Nov. } Euler fils: *sur la cause physique de l'électricité.*

1758.

12. Jan. *Sur le mouvement diurne des planètes* {618}·
2. Febr. *Sur la plus avantageuse construction des lunettes à trois verres qui représentent les objets debout* {708}·
2. März. *Solution d'une question curieuse qui ne parait soumise à aucune analyse* {84}·
16. März. *Recherches sur la transformation des formules intégrales* {NB}·
27. April. *Recherches sur l'effet du frottement dans l'équilibre* {551}·
8. Juni. *Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata* {27}·
6. Juli. *Recherches sur la connaissance* (construction!) *mécanique des corps* {440}·
20. Juli. *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem* {315}·
Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon {298 s. oben 1755 Febr. 27}·
21. Sept. *De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros* {62}·
Sur la perfection des lunettes astronomiques qui représentent les objets renversés {707}.
9. Nov. *Constructio aequationis differentio-differentialis* {276}·
Du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe variable {477}. [478, s. p. 294 ad 20 und p. 289, Z. 7 v. u.]
23. Nov. *De progressionibus arcuum circularum quorum tangentes secundum certam legem procedunt* {147}·
Recherches des forces dont les corps sont sollicités, entant qu'ils ne sont pas sphériques {NB}· [Als Abh. J. A. Eulers gedruckt, s. p. 303 und p. 272: 1765. 7. Nov.]
5. Oct. } 21. Dec. } M. Euler fils: *Recherches des mouvements d'un globe sur un plan horizontal.*

1759.

18. Jan. *Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes* {606}·
22. Febr. *Réflexions sur le mouvement de libration de la lune* {NB}·

8. März. *Investigatio functionum ex data differentialium conditione* {279}. *Détermination de la figure de la terre par les observations de la lune* {NB}.
5. April. *De motu corporis ad duo centra virium attracti* {538}.
3. Mai. *Sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets debout* {708 s. oben 1758 Febr. 2}.
5. Juli. *Cogitationes de aggeribus construendis* {592}.
30. August wird MAUPERTUIS Tod angezeigt, mit einem Brief seiner Frau und JOHANN BERNOULLIS, bei dem er starb; auch wird ein Brief von DE LA GRANGE TAURINUS (wie er immer geschrieben wird) an den verstorbenen MAUPERTUIS mitgetheilt.
20. Sept. *Du mouvement des apsides des satellites de Jupiter* {656}.
4. Oct. *De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae* {207}.
1. Nov. *Sur la propagation du son* {503}.
15. Nov. *De motu vibratorio fili flexilis corpusculis onerati* {523}.
13. Dec. *Supplément aux recherches sur la propagation du son* {504 [und 505]}.
19. Juli. EULER fils: *Recherches sur le dérangement du mouvement d'une planète par l'action d'une autre planète ou comète.*

1760.

21. Febr. *De motu vibratorio chordarum inaequaliter crassarum* {516}.
10. Juli. *Conjectures sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* {530}.
8. Sept. M. EULER a lu un petit discours latin à l'occasion de la mort de M. le Conseiller privé et directeur ELLER {NB}.
25. Sept. *Tentamen de sono campanarum* {528}.

Il a été résolu de demander à S. M.

pour M. SÜSSMILCH ℔ 150

pour M. MECKEL ℔ 200

pour M. EULER ℔ 200

en qualité d'astronome[1]). M. le Marquis D'ARGENS présentera ces demandes à S. M. lorsqu'il sera appellé auprès d'Elle.

20. Nov. / 4. Dec. } M. EULER fils: *Sur le mouvement d'un globe sur un plan horizontal.*

1761.

8. Jan. Le Secrétaire a lu la lettre qu'il a reçue de la part de M. le Marquis D'ARGENS.

Monsieur

Je me suis acquitté de toutes les commissions dont l'Académie m'avait fait l'honneur de me charger. S. M.

1) Vermutlich ist hier JOH. ALB. EULER gemeint, dem der König die Anstellung als Astronom versprochen hatte.

le Roi m'a dit qu'il n'avait pas répondu à la lettre que je lui avais écrite par ordre de Mss. les Académiciens, puisqu'il n'avait point reçu cette lettre; mais qu'il était d'ailleurs très content qu'on se fut conformé à ses ordonnances, qu'il connaissait la réputation de M. Marggraff, qu'il en approuvait le choix, et qu'il devait jouir de tous les privilèges, droits, pensions, attachés à son emploi de Directeur.

Quant aux autres commissions dont j'étais chargé, S. M. m'a fait l'honneur de me dire, que voulant à la paix prendre Elle-même un soin tout particulier de l'Académie, réformer les abus qui s'y sont introduits, et donner à ce corps une nouvelle vigueur, Elle ne jugeait pas à propos de disposer pour le présent d'aucune pension de quelque sorte qu'elle soit. La volonté du Roi est de laisser pour le présent les choses dans l'état où elles sont, les grandes affaires dont il est occupé ne lui permettant pas de s'occuper de celles de l'Académie, *qu'il réglera à la satisfaction de tous les académiciens dès que la guerre sera finie.*

J'aurai l'honneur de Vous dire, Monsieur, que S. M. a paru étonné de ce que nous trouvons tant de difficultés pour imprimer nos Mémoires. Elle exhorte les membres des quatre différentes Classes à travailler avec assiduité, et à donner par la diversité des Ouvrages et des matières une nouvelle vie à ces Mémoires, que quelques unes des Classes paraissent avoir trop negligés, quoique ça ne soit pas la faute des Académiciens qui composent ces Classes, mais celle de quelques abus, que le Roi se propose de réformer à la Paix.

Je Vous prie, M., de vouloir lire ma Lettre dans la première Assemblée de Mss. les Académiciens pour qu'ils voient que je me suis acquitté avec le plus grand zèle des commissions dont ils m'ont fait l'honneur de me charger. Je suis avec une respectueuse considération, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur

à Leipzic
ce 25 Dec. 1760

Le Marquis d'Argens.

22. Jan. *De motu vibratorio tympanorum* {527}.

12. Febr. *Demonstratio theorematis Bernoulliani, quod ex evolutione cuius-*

cunque curvae rectangulae (?) *in infinitum continuatae tandem cycloides nascantur* {366}.

12. März. *Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro* {701}.

18. Juli. M. Euler a lu la réponse qu'il a écrite à M. Bonnet au sujet de son *essai analytique sur l'âme* {NB}.

3. Sept. *De insigni promotione methodi tangentium inversae* {410}.

15. Oct. *Considérations des difficultés qu'on rencontre dans les verres objectifs délivrés de toute confusion* {704}.

12. Nov. *De telescopiis quatuor lentibus instructis quibus objecta situ erecto repraesentantur eorumque perfectione* {721}.

26. Nov. *Recherches sur les microscopes simples et les moyens de les perfectionner* {725}.

9. April. Euler fils: *Disquisitio de lentibus objectivis ex aqua et vitro parandis.*

18. Juni. „ „ *Pensées sur la nature du milieu dans lequel les planètes se meuvent.*

1. Oct. Euler fils: *Expériences sur la quantité de réfraction des fluides.*

1762.

4. Jan. *Recherches sur les microscopes à trois verres et sur les moyens de les perfectionner* {726}.

25. Febr. *Recherches sur les télescopes à réflexion et sur les moyens de les perfectionner* {730}.

22. April. *Considerationes de motu corporum coelestium* {607}.

24. Juni. *Sur les moyens de procurer aux télescopes à reflexion un plus grand champ. Recherches sur une autre construction des télescopes à réflexion* {731}.

8. Juli. *Nouvelle méthode de déterminer les dérangements dans les Corps Célestes causés par leur action mutuelle* {611}.

2. Sept. *Sur la confusion que cause dans les instruments de Dioptrique la diverse réfrangibilité des rayons* {705}.

16. Sept. *Considérations sur les nouvelles lunettes d'Angleterre de M. Dollond et sur le principe qui en est le fondement* {709}.

14. Oct. *Supplementum de figura dentium rotarum* {561}.

28. Oct. *Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique* {537}.

25. Nov. *Disquisitiones de vera lege refractionis radiorum diversicolorum* {694}.

9. Dec. *De usu functionum discontinuarum in analysi* {169}

6. Mai. Euler fils: *Von dem Verhältniß der Kräfte, welche auf den Mond wirken, zu seiner mittleren Bewegung, wie auch seiner mittleren Entfernung von der Erde.*

7. Dec. M. Euler fils présente à l'Ac. une Dissertation *sur la résistance de l'éther* qu'il a fait imprimer.

1763.

20. Jan. *De phaenomenis Coeli per segmenta sphaerica diaphana spectati* {711}.

10. März. *Réflexions sur une espèce singulière de Lotterie nommée Lotterie Genoise* {N B davon besitze ich das Original}.

24. März. *Investigatio accuratior phaenomenorum motus diurni terrae etc.* {629}.

5. Mai. *De telescopiis quatuor lentibus instructis eorumque perfectione* {721 s. 1761 Nov. 12}

31. Mai. Bericht von Euler über eine Preisabhandlung über das Gehör {N B}.

14. Juli. Un mémoire latin: *sur le mouvement d'un corps attiré vers deux centres qu'on suppose fixes* {539}.

8. Sept. *Recherches sur la courbure des surfaces* {433}.

22. Sept. *Proprietates triangulorum quorum anguli inter se certam teneant rationem* {305}

20. Oct. *Recherches sur la construction des Lunettes à cinq ou six verres et sur leur perfection ultérieure* {710}.

1. Dec. *De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis junctorum* {461}.

15. Dec. *Réflexions sur les différentes manières dont on peut représenter le mouvement de la Lune* {644}.

Den 31. Dec. 1763 zeigt auf des Königs Befehl die Akademie vor einer sehr glänzenden Versammlung dem türkischen Internuntius Achmed Effendi ihre Künste; er wird unten am Wagen von Euler etc. empfangen. Marggraff zeigt Chemie, Meckel und Sulzer Physik, besonders die Luftpumpe, Euler Sohn Electricität, Gleditsch Naturaliencabinet.

10. Febr. Euler fils: *Réflexions sur un problème qu'on trouve dans l'Astronomie nautique de M. Maupertuis.*

30. Juni. Euler fils un mémoire allemand: *Résolutions de quelques problèmes qui regardent la quantité des figures des nombres.*

3. Nov. Euler fils: *De promotione navium sine vi venti.*

15. März 64. } Second mém.
24. März „ }

1764.

Copie d'une lettre de M. le Marquis d'Argens au Secrétaire.

Monsieur

S. M. Le Roi non seulement approuve les sujets qu'on a reçus et qu' Elle a proposés Elle-même, mais Elle est charmé que l'Académie ait suivi ses intentions. Quant aux autres sujets proposés l'année 1751 (?) S. M. ne juge pas à propos d'approuver à présent leur réception. Son

intention est qu'on ne reçoive à l'Académie aucun Membre jusqu' à ce qu'il ait nommé un Président, *le Roi se réservant à présent le droit de nommer lui seul jusqu' à ce tems les Membres que l'Académie recevra.* Je suis etc.
Berlin le 6 Janvier 1764 Le M. D'ARGENS

19. Jan. *De motu fluidorum a diverso gradu caloris oriundo* {569}.

10. Mai } 24. Mai. } *Construction des objectifs composés de deux différentes sortes de verre, qui ne produisent aucune confusion, ni par leur ouverture ni par la différente réfrangibilité des rayons, avec la manière la plus avantageuse d'en faire des Lunettes* {716}.

18. Oct. M. EULER présente le projet d'un Ouvrage sur l'Artillerie intitulé: *Norma rationalis et experimentalis der zur Artillerie angewandten Mechanik* {NB}

1. Nov. } 22. Nov. } *Sur le vrai caractère de la Musique moderne* {531}.

1765.

17. Jan. *Réflexions sur la manière d'examiner la réfraction des verres par le moyen des prismes* {696}.

23. Febr. M. EULER a lu une lettre de M. le Marquis D'ARGENS, concernant la manière dont le Roi a disposé des pensions académiques.

7. März. *Sur l'intégration de quelques équations* } *Considérations sur quelques formules intégrales* } {NB ungenügend}.

5. Juli. Le Secr. a lu le Mémoire envoyé par le Père LA BORDE où il expose ses *Nouvelles vues sur la construction des télescopes et des microscopes.*

18. Juli. *Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie* {519}.

23. August. M. le Prof. DE CASTILLON a fait rapport de la Pièce du Père LA BORDE. Il a en même tems été autorisé par l'Ac. à faire des expériences ultérieures à ce sujet.

19. Sept. } 26. Sept. } *Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'Écho* {506}.

11. Oct. Lettre du Père LA BORDE avec un Supplément à son Mém.

7. Nov. M. EULER a mis sur le Bureau, afin qu'on en prît note, deux Mémoires

1. *Théorie générale de la Dioptrique* {690? Das Original besitze ich}.
2. *Corrections nécessaires pour la théorie de la déclinaison magnétique, proprosée dans le XIII. Volume des Mémoires de l'Académie* {741}.

4. Dec. M. Bernoulli a lu un Mémoire de M. le Directeur Euler intitulé *Considérations sur le problème des trois corps* (540).

20. Sept. Euler fils: Neue Prüfung der Theorie von der Bahn und Bewegung der Geschützkugeln.

1765.

10. Jan. M. le Directeur Euler a proposé par ordre de S. M. M. Lambert pour Membre ordinaire de l'Académie; à quoi il a été sur le champ très humblement acquitté.

18. April. } 9. Mai. } Euler fils: *Nouvelles Expériences relatives à la construction des fournaux.*

7. Nov. Euler fils: *Recherches des forces dont les corps célestes sont sollicités entant qu'ils ne sont pas sphériques.* [Vgl. p. 266: 1758. 23. Nov.]

1766.

13. Febr. M. Bernoulli a lu un Mémoire de M. Euler: *Essai de Dioptrique* (N B).

21. Mai. M. Euler père et fils ont pris congé de l'Académie. Le Secrétaire leur a répondu et leur a témoigné combien l'Académie était sensible à leur perte.

P. H. v. Fuss an C. G. J. Jacobi, St. Petersburg, den 8./20. Nov. 1847.

St. Petersburg d. 8./20. November 1847.

Mein innig verehrter Freund u. College

Ihren freundlichen Brief vom 24. October, — so reich für mich an Inhalt, ob er gleich nur von Einem Gegenstande handelt, — habe ich erhalten u. studirt. Empfangen Sie meinen besten Dank für die große u. für mich unschätzbare Mühe, die Sie sich gegeben. Eine der Ihrigen ganz gleiche Arbeit hatte ich schon vor längerer Zeit in Bezug auf die Protokolle unserer Akademie ausgeführt, u. wenn dies vor der Herausgabe der Correspondance geschehn wäre, hätte meine Liste wesentlich dadurch gewinnen müssen. Keiner kennt besser als ich die großen Mängel u. Auswüchse dieser Liste, u. wenn Sie sich darüber so schonend aussprechen, so erkenne ich darin nur ein neues Zeichen Ihrer freundlichen Gesinnung. Und doch hat diese Liste, wie sie da ist, mir Mühe u. Arbeit genug gemacht u. einem wesentlichen Bedürfniß abgeholfen, da doch bei weitem in der Mehrzahl der Fälle das Gesuchte ohne große Mühe darin zu finden ist, was bei der Liste der *Lobrede* unendlich schwierig war, ganz abgesehn davon, daß die meinige gegen diese bedeutend vervollständigt ist. Meine erste Sorge nach Empfang Ihres Verzeichnisses war eine sorgfältige Vergleichung desselben mit dem meinigen. Interessant war es mir zu finden, daß so viele Petersburger Abhandlungen

aus jener Zeit der Berliner Akademie vorgelegt wurden. Dadurch habe ich für mehrere doppelte Exhibitionsdaten erhalten u. eine genaue Zeitbestimmung nicht nur vieler Berliner Abhandlungen, sondern selbst mancher Petersburger, über die unsere Protokolle mich im Zweifel ließen. Wie wichtig aber, grade bei der Masse der Eulerschen Arbeiten, diese chronologischen Daten sind, davon überzeuge ich mich eben jetzt bei Herausgabe der *Op. arithmetica.* Ich habe nämlich (u. ich glaube, Sie werden dies billigen) die streng chronologische Reihenfolge gewählt, als die natürlichste, ja ich möchte sagen die einzig mögliche, da man bei jedem andern System einzelne Abhh. hätte zerreissen müssen. Das ist noch himmelweit verschieden von Libri's alberner Zumuthung (in seiner Recension der *Correspondance* im Journ. d. Sav.) bei der *Gesammt*ausgabe der Eulerschen Schriften, dieselben ohne Rücksicht auf den Gegenstand, also pêle-mêle, nach der Zeit zu ordnen; für die einzelnen Doctrinen dagegen, oder wenn man will, deren Unterabtheilungen, ist die chronologische Reihenfolge die rationellste und instructivste. Zur Erleichterung des Nachsuchens kann man ja systematische Inhaltsverzeichnisse, selbst alphabetische Register oder sonstige Hülfsmittel beifügen, wobei man ja nicht allein auf die Abhandlung, sondern auf Paragraph u. pagina hinweisen kann. Jetzt ist der 62te Bogen unter der Presse; das ganze wird ziemlich genau 140 Druckbogen also zwei Bände von je 70 Bogen füllen. Nicht nur die problemata Diophantea geometrica, sondern auch sonst noch ein Paar Abhh. aus andern Sectionen meiner Liste, die nähere Beziehung auf die Zahlenlehre haben, sind mit aufgenommen. Mein Bruder steht mir treulich bei, u. die Ausgabe wird nicht nur sauber u. würdig, sondern auch correkt. Im Text haben wir uns mit Hinweisungen auf *frühere* Abhandlungen begnügen müssen, die auch schon Mühe genug kosteten, weil Euler sich selbst immer nur nach dem Gedächtniß, nie genau citirt. Es wird Ihnen, nicht weniger als mir selbst, darum zu thun sein, daß diese Sammlung möglichst vollständig werde u. Sie werden gewiß gern die Hand dazu bieten mir zu dem Besitz dessen zu verhelfen, was mir etwa noch fehlen mag. In dem beiliegenden Verzeichniß der Abhandlungen Ihrer Liste, die, wenigstens unter den angegebenen Titeln, in der meinigen fehlen, sind auch einige arithmetische enthalten, die genau darauf untersucht werden müßten. Besonders überraschte u. erfreute mich die endliche Auffindung der *Découverte d'une loi (propriété) extraordinaire des nombres*, die zu finden ich Himmel u. Erde in Bewegung gesetzt hatte. Voss in Leipzig[1]), ein Dr Grässe in Dresden, Stern in

1) Leopold Voss, Buchhändler der Petersburger Akademie in Leipzig; Fuss ist mit ihm auch wegen der Gesamtausgabe der Eulerschen Werke in Verbindung getreten, die auf eigene Gefahr zu übernehmen Voss jedoch ablehnte.

Göttingen hatten nach dem in der Lobrede citirten Journal littéraire de l'Allemagne gesucht, bis der treffliche Gauss mit einem Eifer, der mich wirklich rührte, in einem so betitelten, längst verschollenen Buche jene *anonyme* Abhandlung Eulers über die Summe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen auffand*) u. eigenhändig für mich copirte[1]). Sie fehlte wirklich in meiner Liste. Ich betrachtete also von nun an die N. 3 meiner Liste als *nicht existirend;* u. nun sprechen Sie davon, als von einer Abh. die Sie *gelesen* (ob gedruckt, oder im Manuskript, ersehe ich nicht) u. worin Sie zuerst einen Satz angeführt finden, der Sie eben interessirt. (Wenn dies die Reihe ist

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

wo die Exponenten der x Zahlen von der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ sind, so finde ich sie auch u. zwar zuerst in der Abh. *De partitione numerorum* (N. Comm. III p. 125) angewandt, die vom J. 1750 (26. Januar) ist). Sie werden demnach begreifen, wie begierig ich auf Ihren Fund bin. Ist die Abh. ein Ineditum, so könnte sie mit vielen andern an den Schluß meines zweiten Bandes kommen[2]); ist sie aber gedruckt, so gehört sie doch jedenfalls in die *Op. arithm.* u. wenn ich auch längst über d. J. 1747 hinweg bin (ich bin nämlich schon bei 1772), so wird sie jeder doch lieber als Nachzügler sehn, als ganz vermissen Bei der bekannten Liberalität der wissenschaftlichen Institute in Berlin u. der Reciprocität die zwischen jenen u. den unsrigen obwaltet, wird es, denke ich, keine Schwierigkeit haben Manuskripte dieser Art u. zu solchem Zweck nach Petersburg geliehen zu erhalten. Sollten Sie dennoch dergleichen befürchten, so glaube ich nicht zu viel zu wagen, wenn ich Sie bitte, es auf Ihr Risico zu thun. Schon diese Zumuthung zeigt, daß ich unbedenklich ein Gleiches für Sie thäte u. Ihr Vertrauen gewiß nicht mißbrauchen würde. — Nun zu einigen Specialitäten zu denen mich die interessanten Bemerkungen veranlassen die Ihr Beiblatt enthält u. deren jede für mich ein Goldkorn ist. Da

*) Sie ist übrigens aus den ersten Vierziger Jahren. Weder der Jahrgang 1751 noch irgend ein anderer desselben Journals (unter etwas verändertem Titel) enthält aber, nach Gaussens ausdrücklicher Versicherung, eine Abhandlung Eulers.

1) Siehe P. Stäckel, *Vier neue Briefe von Gauss*, Gött. Nachr. 1907, p. 372 und *Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*, Bibl. math. (3) 8 (1907), p. 37. Die Abhandlung steht in dem Journal littéraire de l'Allemagne, t. II, 1. partie, Haag 1743, p. 115—127.

2) Sie findet sich dort p. 639, vgl. dazu t. I, p. XVIII ad 57 und p. LXXXI.

weiß ich nur nicht, womit beginnen u. ob, wenn einmal begonnen, ich ein Ende finde. Der Gegenstand ist wirklich unerschöpflich.

Ihre Bemerkung bei Gelegenheit der numeri amicabiles, daß Euler nämlich sorgfältig feilte u. umarbeitete habe auch ich oft Gelegenheit gehabt zu machen. Seine beiden Specimina über Vergleichung transcendenter Größen, die den VII. Bd. der Nov. Comm. eröffnen*), besitze ich in einer ganz netten Reinschrift von seiner Hand, jedoch in so verschiedener Redaction, daß ich sie lange für unedirt hielt. Wo nahm der Mann die Zeit her zum Forschen, Redigiren, Copiren, — wo den Muth zum Verwerfen, Umarbeiten desselben Gegenstandes u. Wiedercopiren, — denn so lange das Auge diente, ist ja alles von seiner Hand! — Die französischen Uebersetzungen seiner ersten Abhandlungen in Berlin machte er selbst mit *sehr* ungeübter Feder. So besitze ich die meisten der Abh. die der erste Bd. der Berl. Mém. nur im Auszuge gibt. Eine fremde Hand hat Stylkorrektionen hineingeschrieben. Interessant war mir die Abhandlung, womit er seine Sonnentafeln begleitete; sie ist, so viel ich weiß, nirgend gedruckt, die Tafeln aber fehlen mir. Viel Dioptrisches, durchaus druckfertig u zum großen Theil unedirt, findet sich im Nachlasse. Es ist alles französisch (worin sein Aufenthalt in Berlin ihm später eine große Fertigkeit verschaffte), die große lateinische *Dioptrik* aber erschien in den letzten Jahren, u. es mag daher vieles da hinübergezogen sein. Das Vergleichen aber ist nicht leicht u. erfordert Zeit, die mir knapp zugemessen ist. Die *Théorie générale de la Dioptrique* besitze ich (1765 Nov. 7 Ihrer Liste); sie ist vom *Précis* in den Pariser Mém. verschieden. Was ist das aber für ein *Essai de Dioptrique* (1766 Febr. 13)? Ich vermuthe daß ich auch diesen (ein starkes Mskpt. ohne Titel) in meiner Sammlung habe. Wie glücklich wäre ich diese einmal Ihnen zeigen zu können. — Sie erwähnen der Abh. 385 m. L. als im Manuskript vorhanden, in Ihrer Liste aber ist sie nicht erwähnt. Sollte sich nicht dennoch das Exhibitionsdatum ausmitteln lassen; ich finde es nicht in unsern Protokollen. Ihre Winke über eine zweckmäßigere Anordnung u. Eintheilung der Materien in meiner Liste, sind mir sehr willkommen; Manches habe ich mir schon selbst gesagt. Die wirklich fehlende Abh. über die Logarithmen negativer u. imaginärer Größen[1]) paßt ja sogar in keine der von mir angenommenen Rubriken. Die andere von Ihnen vermißte Abh. aber *Curvarum maximi minimive etc.* steht nur am unrechten Orte. Uebrigens steht noch der ganze Satz der Liste zum Behuf einer Separatausgabe, zu welcher ich mich aber nicht eher entschließen möchte als nach sorgfältiger Vergleichung alles gedruckten u. handschriftlichen Materials. Aber — welche Arbeit! u. wie langsam rückt

*) NNo. 424 u. 352 meiner Liste.

1) Vgl. jedoch p. 261, Anm. 1.

sie vor[1]). Sehr interessant wäre es endlich auch für mich die unedirte Kritik d'Alemberts u. das Gutachten Eulers über Gerdil's Abh. u. seine Erklärung der Attraction zu lesen.

Ich komme noch einmal auf jenen Satz zurück, den Sie als in der *Découv. d'une loi extraord. etc.* zuerst angeführt bezeichnen. Ich finde ihn noch einmal benutzt in der *Observatio de summis divisorum* (gel. d. 6. Apr. 1752 N. Comm. V) mit dem Zusatz: Aequalitas harum duarum formularum jam est id ipsum, quod solida demonstratione confirmare non possum.

Für den dritten Band der *Correspondance* habe ich ein ziemlich reichliches u. interessantes Material zusammengebracht u. erwarte einen vieljährigen Briefwechsel zwischen Euler u. Delisle der im Dépôt de la marine in Paris aufbewahrt wird u. mir versprochen worden ist. Libri aber hat seine Zusage nur halb erfüllt indem er mir nur eine nachlässige Abschrift von Eulers Briefen an Lagrange, den d'Alembert-Lagrange'schen Briefwechsel aber gar nicht geschickt hat. — Und nun komme ich zum endlichen Schlusse noch auf dasjenige, womit ich hätte anfangen sollen: auf meinen besten u. wärmsten Dank für das schöne Geschenk des ersten Bandes Ihrer Abhandlungen. Ich hatte schon die Hoffnung aufgegeben u. mir das Buch bestellt, denn es genügte mir nicht Ihre Arbeiten in Crelles J. zerstreut zu besitzen. Als Geschenk von Ihnen selbst haben sie mir natürlich noch einen doppelten Werth. Wenn mein langer Brief Sie langweilt, so schreiben Sie sich's selbst zu; Ihre so dankenswerte Arbeit gab mir den reichlichen Stoff u. wie viel hätte ich noch zu sagen, wenn mir Ihre Zeit nicht zu lieb wäre. — Ich bewundere die Geduld, mit der Sie sich der Lectüre des Tagebuchs meines Großvaters unterziehen; ich bewahre aus dunkeln Erinnerungen meiner frühesten Kindheit das Bild eines liebenswürdigen heitern Greises; es ist das seinige. Sorglos u. lebensfroh — suchte er in der Geselligkeit den Genuß, verlebte mehr als er hatte u. hinterließ seinen Kindern, besonders meinem armen Vater, die Sorge sich mit den Gläubigern abzufinden. Was Sie in diesem Tagebuche suchen, werden Sie kaum darin finden. Für mich hätte es allerdings Interesse. — Leben Sie wohl, mein verehrter Freund u. behalten Sie lieb Ihren dankbar ergebnen

Fuss.

---

1) Fuss ist nicht dazu gekommen, eine verbesserte Ausgabe seines Verzeichnisses erscheinen zu lassen; einige Nachträge und Verbesserungen enthalten die *Comm. ar.* und die *Op. post.* Sein Handexemplar des Verzeichnisses mit vielen Eintragungen ist jetzt im Besitz von Herrn Geheimrat Viktor Fuss in Petersburg.

P. H. v. Fuss an **C. G. J. Jacobi**, St. Petersburg, den 9./21. Jan. 1848

St. Petersburg d. 9/21. Jannar 1848.

Mein verehrter Freund

Mit meinen besten Wünschen zum angetretenen nenen Jahre, schicke ich Ihnen hente p. Post den eben fertig gewordenen ersten Band der *Opera arithmetica*. Titelblatt nnd Vorrede fehlen, weil ich diesen Band noch nicht zu emittiren gesonnen bin. Sie aber haben ein Recht darauf ihn früher als Andere zn besitzen u. werden mir Ihre etwaigen Bemerkungen darüber nicht vorenthalten, besonders solche, die mir bei dem Druck des zweiten Bandes noch zn Statten kommen könnten. Dieser wird 47 Abhandlungen, die schon früher gedruckt waren, (aus den Jahren 1773—1782) chronologisch geordnet enthalten, n. dann die Inedita, bestehend aus *drey* in unserm Archiv befindlichen Abhh., wozu auch die *propriété extraord. des nombres* gehört, vorausgesetzt, daß sie unedirt ist (ich erwarte sie mit Ungeduld), *zwey* ungedruckten Abhh., deren Alter unbekannt, n. den sechzehn Capiteln des *Tractatus de numerorum doctrina*[1]). Dies alles gibt noch einen eben so starken Band. — Sie erinnern sich daß, als die Aussicht auf eine Unterstützung vom Staate zn einer *Gesammt*ansgabe von Eulers Schriften, zwar der Akademie nicht benommen, aber doch ins Unbestimmte hinausgeschoben war u. man geduldig abwarten zu wollen schien, ein Brief von Ihnen den Ausschlag gab u. die Akademie veranlaßte ans eigenen Mitteln wenigstens zu beginnen. Sie hatten Zahlenlehre n. Mechanik als am wünschenswertesten bezeichnet; man fing also mit der erstern an. Ein Setzer wurde angewiesen; der Druck sollte zwar nnausgesetzt fortgehn, aber nicht übereilt werden, damit die Unkosten sich auf ein Paar Jahre vertheilen. Nach dem ursprünglichen Anschlag, wo auf außerordentliche Mittel gerechnet wurde, sollten vier Setzer gleichzeitig beschäftigt werden, u. selbst da bedurfte es 10 Jahre zur Vollendung des Ganzen. Begreiflicherweise würde also mehr als ein Menschenalter daranf gehn, wenn man auch annehmen wollte, daß die Akademie aus eignen Kräften so fortführe, wie sie begonnen. Man hofft also von der Herausgabe der *Op. arithm.* Veranlassung nehmen zu können zur Erneuerung des Gesuchs an die Regierung. Wenn man sich nun vorher von dem Grad der Theilnahme des Publicums an dem Unternehmen vergewissern könnte, wäre vielleicht viel gewonnen. Überlegen Sie sich doch die Sache. Vielleicht wäre eine Anzeige des ersten Bandes in den mathematischen Zeitschriften Deutschlands, Frankreichs, Englands, Italiens angemessen, nebst Eröffnung einer Subskription. Vielleicht rathen Sie selbst, den ersten

1) *Comm. ar.* t. 2, p. 503—575; vgl. auch t. 1, p. XI und LVII—LVIII.

Band gleich zu emittiren; dann wäre Titel u. Umschlag bald gedruckt, wenn dann auch die Vorrede erst mit dem zweiten Bande ausgegeben würde. Man sähe doch wie es geht. — Jedenfalls werde ich nach Vollendung der *Op. arithm.* den Versuch machen die Akademie zu vermögen allmälig fortzufahren bis Hülfe kommt. Bleiben Sie denn dabei, daß die *Mechanik* an die Reihe komme? Das Fach ist weitschichtig. Die zwei großen Werke abgerechnet, zähle ich nicht weniger als 160 gedruckte Abhh. Hier lassen sich Unterabteilungen machen u. sind selbst nöthig. Wie weit sollen diese aber gehn, bis die chronologische Ordnung eintritt? Ich könnte, wenn ich Ihre Ansichten kennte, allmälig das Material ordnen. Das starke unedirte Mannskript *Astronomia mechanica*, so wie überhaupt was sich auf Mechanik des Himmels bezieht müßte wohl zur Astronomie gehören, dagegen kämen die mechanischen Curven, die in meiner Liste unter *Géométrie anal.* stehen, wohl zweckmäßiger unter die Abtheilung Mechanik. Ich möchte nicht gern alles allein vertreten, u. bin doch hier ziemlich rathlos. Sie, mein verehrter Freund, haben ein so warmes u. thätiges Interesse für das Unternehmen an den Tag gelegt u. sind unaufgefordert auf Detailfragen eingegangen, daß Sie sich's selbst zuzuschreiben haben, wenn ich nun voll Zutrauen meinen Recurs an Sie nehme. Antworten Sie mir nach Bequemlichkeit, wie es Ihre Zeit gestattet, an die, ich weiß es ja, die Wissenschaft höhere Ansprüche hat. Ich grüße Sie freundschaftlichst u. bitte Sie mein Andenken bei Ihrer Frau Gemahlin, so wie bei denen Ihrer Berliner Collegen, die sich meiner erinnern (das Ermansche Ehepaar, Encke, Crelle) zu erneuern.

Fuss.

N. S. Die scheinbar so unverhältnißmäßig erhöhete Productivität Eulers im letzten Decennium seines Lebens, auf die ich in der Notice im ersten Bde der *Correspondance* hinweise u. die ich nur durch die Hülfe erklären kann, die er an meinem Vater hatte, spricht sich durchweg in allen Theilen der Mathematik aus. Auch der 1. Bd. der *Op. arithm.* enthält 41 Abhh. aus 40 Jahren; etwa 4/5 des 2ten Bdes werden 47 Abhh. aus 10 Jahren enthalten! Aber die *Qualität* ist sichtbar im umgekehrten Verhältniß. Die Arbeiten des Blinden sind kurz u. fragmentarisch, wenn gleich zahlreich. Das Beste stammt immer aus der goldenen Zeit der vollen Manneskraft. Daher lege ich aber, u. ich glaube nicht mit Unrecht, einen großen Werth auf die größern unedirten Fragmente, die alle aus jener Zeit datiren, in sich vollendet u. eigenhändig mundirt sind.[1])

1) Ein Teil dieses Briefes ist bereits von L. Koenigsberger, *C. G. J. Jacobi*, Leipzig 1904, p. 446 abgedruckt worden.

C. G. J. Jacobi an **P. H. v. Fuss**, März/April 1848.

Hochverehrter Freund

Wenn ich Ihnen erst jetzt auf Ihre drei Briefe[1]) antworte, so müssen Sie dies mit längerem Unwohlsein, einem Umzuge, endlich damit entschuldigen, daß die Beanwortung Ihres ersten längere Muße erforderte, die mir erst jetzt zu Theil wird.

Nun zuerst meinen großen Glückwunsch Ihnen und der Petersburger Akademie zu dem ersten Bande der Eulerschen Abhandlungen, welcher auf mich und meine Freunde durch die Würdigkeit der Ausstattung, die ohne jeden überflüssigen Luxus dem reichen Inhalte angemessen ist, einen lebhaften Eindruck gemacht hat. Es ist dies ein Nationalunternehmen, welches Rußland zu hoher Ehre gereicht, und so gewiß es ohne Ihre jahrelangen, unausgesetzten Bemühungen nicht zu Stande gekommen wäre, so gewiß können Sie des Dankes sein, den Ihnen die mathematische Welt dafür darbringen wird. Ich kann Ihnen noch besonders den meinigen für das kostbare Geschenk abstatten, das Sie mir mit diesem ersten Bande gemacht haben, und insbesondere dafür, daß Sie mir denselben ohne Verzug noch vor der Publication mitgetheilt haben.

Soll ich aber nun nicht Gegenstand zu großen Neides werden, so würden Sie gleich diesen ersten Band schon publiciren, ohne den zweiten abzuwarten. Es wird jeder damit zufrieden sein, die Vorrede zu der ganzen arithmetischen Abtheilung .beim zweiten nachgeliefert zu erhalten. Besonders ist dies der lebhafte Wunsch meines Freundes und Ihres Correspondenten Dirichlet, der nicht nur die höhere Arithmetik selbst so bedeutend erweitert hat, sondern auch ein tiefes Studium aus ihrer Geschichte gemacht hat, und fortwährend macht, wo er denn die Erscheinung dieses Werkes mit doppelter Theilnahme begrüsst, und ungern bis auf das Erscheinen des 2. Bandes warten möchte.

Irgend etwas noch zu wünschen, wüsste ich nicht Nur wäre es vielleicht gut, wenn Sie auch ein kleines Verzeichniss am Ende hinzufügten, wo nach der Reihenfolge *die Bände der ak Schriften angegeben sind, aus denen die Abhandlungen entnommen sind*[2]); damit wenn in anderen Schriften ein Band Ihrer Commentarien citirt wird, man sogleich nach dem Verzeichniss die betreffende Abhandlung in den *Opp. Ar.* auffinden kann. Auch citirt Euler oft selbst seine früheren Abhandlungen nach dem Bande, so dass man dann in dem Werke selbst sogleich das Citat auffinden könnte. Es scheint dies um so wünschenswerter, als oft

1) Nur die beiden hier abgedruckten Briefe sind erhalten.

2) Das ist in den *Comm. ar.* t. **1**, p. LXXX nachgeholt worden; vgl. dort auch p. XXI.

die Titel der Abh. nicht citirt werden, sondern eben nur der Band der Memoiren. Es müßten aber auch die Seitenzahlen der Bände, wo die Abh. stehen, in dem Index angegeben sein. Später einmal könnte bei Beendigung des Ganzen ein ähnlicher Generalindex gegeben werden.

Von einem aus 16 Kapiteln bestehenden Werke *De doctrina numerorum* hatten Sie mir früher nie etwas gesagt, und bin ich den Inhalt zu kennen begierig.

Wenn die Zeitverhältnisse günstiger wären, ließe sich aus der gleichzeitigen Ausführung aller Ihrer Ideen eine hinreichende Unterstützung erwarten, um das Werk mit Kraft weiter zu führen. Es müßten dabei meiner Meinung nach zuerst die größeren Werke Eulers, wenigstens die noch bequem zu haben sind, ganz ausgeschlossen werden. Denn das Hauptbedürfniß ist auf die einzelnen Abh. gerichtet, und es darf nicht das Bessere der Feind des Guten werden. Von dieser Ansicht aus müßten Sie eine neue, bloß auf die Abh. gerichtete Veranschlagung entwerfen, wobei ja unbenommen bleibt, später die größeren Werke einmal hinzuzufügen. Es würde sich hierdurch die Summe von 80000 Rubel doch namhaft ermäßigen. Dann müßten Sie sehen, daß die Akademie eine feste jährliche Summe auswirft, die hauptsächlich dazu dient, daß das Unternehmen nie in Stocken geräth. Diese Summe müßte durch einen jährlichen vielleicht gleichen Beitrag vom Staat erhöht werden. Gleichzeitig müßten diese Anzeigen erfolgen, von denen Sie sprechen[1]), und mehrere wissenschaftliche Journale, wie das Crellesche, Liouvillesche, Schumachersche, London and Edinb. Philos. Mag., das Dublin and Cambridge Mathem. Journ. etc. etc. Subscriptionen annehmen. Es müßte dann noch an die Akademien geschrieben werden und an einzelne Leute, welche die Subscription für die *öffentlichen* Bibliotheken veranlassen könnten. Die Berliner Ak. glaube ich bestimmt, würde 20 Ex. subscribiren. Was hieraus und aus dem sonstigen Verkauf einginge, müßte nicht als Compensation der gemachten Ausgaben angesehen, sondern verwendet werden, um den Weiterdruck kräftiger zu beschleunigen. Wenn nun auch die Zeiten jetzt hiezu ungünstig sind, so glaube ich doch, daß diese Maßregeln selbst jetzt nicht ganz erfolglos sein würden. Sie könnten vielleicht selbst aus Amerika Subscriptionen erhalten.

1) *Nachricht über eine Sammlung unedirter Handschriften Leonhard Eulers und über die von der Akademie begonnene Gesammtausgabe seiner kleineren Schriften*, Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Académie de St. Pétersbourg, 7 (1849), col. 337—368; diese Übersetzung des *Prooemiums* und der *Supplementa prooemii* aus den *Comm. ar.* ist auch als Broschüre erschienen und von dem Verleger L. Voss in Leipzig für 1½ Silbergroschen verkauft worden, weil er „damit eine zweckmäßigere Verbreitung zu erzielen glaubte als durch völlige Gratislieferung“ (Brief an Fuss vom 17. Juli 1849).

Eine sehr wichtige Frage wäre wohl, ob nicht die Arbeiten von J. Albert auch aufgenommen werden müßten, da sich annehmen läßt, daß alles bis auf die Ausarbeitung vom Alten ist. Es wäre gut dieses besonders ebenfalls zu veranschlagen.

Die Idee, die Sie haben, es wäre möglich, einmal einen Sachindex zu geben, der womöglich sich auf die einzelnen §§ der Abh. bezöge, ist großartig. Es würde dadurch etwas Ungeheures geleistet, aber wenn auch die Mühe gegen die Wichtigkeit der Sache gering ist, wer sollte diese Arbeit unternehmen? Sie müßte vielleicht unter mehrere jüngere Gelehrte, die dafür honorirt würden, vertheilt werden, etwa wie die Berliner Sterncharten.

Von Libri dürfen Sie jetzt wohl nichts mehr für den 3. Theil Ihrer *Correspondance* erwarten. Er gehört zu der Klasse Menschen, von denen jeder die Präsumtion hat, daß sie Spitzbuben sind, die aber in der Regel bis zu ihrem seligen Ende durchkommen, weil jeder die Mühe der Beweisführung scheut. Ich denke wir werden ihn aus der Liste der Correspondenten unserer Akademie streichen.

Ich komme jetzt zu den für die fernere Herausgabe von Ihnen zu treffenden Dispositionen.

Die *Mechanik*, die ich folgen zu sehen wünschte, würde sich allerdings schlecht an die *Zahlentheorie* anschließen. Indessen könnte man von der Ordnung, in welcher die Disciplinen in dem ganzen Werke auf einander folgen sollen, für jetzt abstrahiren, so daß derselben die Ordnung, in welcher die Schriften gedruckt werden, nicht zu entsprechen brauchte. Man könnte dann am Ende des Ganzen besondere Titel drucken, welche die Stelle jedes Bandes in demselben bezeichnen. Indessen spräche für einen spätern Druck der Mechanik 1) daß bei dem großen Umfange derselben und der Schwierigkeit der Disposition es vielleicht zweckmäßig wäre, durch den Druck kleinerer Disciplinen mehr Erfahrungen zu machen, und 2) damit das Ende abzusehen wäre, mit der Mechanik zu warten, bis kräftigere Mittel zur Disposition stünden.

Wenn diese und vielleicht andere Gründe Sie bewegen sollten, zunächst Gegenstände von nicht so großem Umfange anzuschließen, so würde ich dazu *Geometrie* und *Algebra* vorschlagen. Leider kann ich den Umfang nicht beurtheilen, da Sie in Ihrer Liste nur die Anfangspagina, aber nicht die Endpagina der Abhandlungen angeben. Auch kann ich, da mir von den Petersb. Mem. nur die 14 Bände der alten Comment. erb- und eigenthümlich gehören, nicht bei allen Abh. wissen, wo sie aufzunehmen sind. Von dem Umfange aber müßte zum Theil abhängen, welche Ausdehnung man jeder der beiden Rubriken zu geben hätte.

Man müßte glaube ich bei den zu machenden Eintheilungen weniger nach dem Namen oder dem Stoffe als nach einem Prinzip gehen. Die reine Mathematik müßte in zwei große Abtheilungen, von denen die erste alles ausschließt, wozu Integralrechnung nöthig ist[, getheilt werden]. Die einfachen, jetzt zu den Elementen zu rechnenden Prozesse des Differenziirens anszuschließen, wäre vielleicht Pedanterie. Es könnten gleichwohl die drei Momente festgehalten werden, als Unterabtheilungen, je nachdem alles im Endlichen bleibt, dieselbe Methode bloß anfs Unendliche angewandt, und endlich die Methode des Differenziirens angewandt wird.

Ich komme zur **Geometrie.**

Davon müßte alles ansgeschlossen werden, was sich auf Rectificationen bezieht, Integration von Differentialgleichungen verlangt, mehr eine Sache des Calculs ist, als nns über die allgemeine Natur der Raumgebilde belehrt. Dieses müßte später einmal in einen besonderen Abschnitt kommen: *Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie*, und gehört nm so mehr zur Integralrechnung als die wichtigsten Methoden derselben an dem Bilde geometrischer Betrachtungen ersonnen nnd demonstrirt sind. Es würden hiezu etwa gehören:

210. 336. 340. 345. 357—362. 366. 368. 387—389. 391—395. 398. 399. 405—407. 409—418. (Ob 348. 421. 426. 427 hieher oder zu den *Elliptischen Integralen* rechnen, mnß man einen Blick daranf werfen) 430—432 a et b. [432b = 366.] 434? 435—437. 439.

Dieser reiche nnd wichtige Abschnitt würde also aus etwa 50 Abhandlungen bestehen, nnd zur *Integralrechnung*, nicht zur *Geometrie* kommen, jedoch einen Band für sich bilden.

Einen besonderen Abschnitt müßten ihrer heutigen Wichtigkeit wegen die *Elliptischen Integrale* bilden; wie angenehm, alles Euler sche darüber zusammen zu haben! Diese müßten in zwei wesentlich verschiedene Unterabtheilungen zerfallen.

A. Rednction anf E. I., etwa 206. 207. 281. 419. 420. 353. 354. 355. 356. 425.

B. Rednction der E. I.; etwa 267. 269. 270. 282. 346. 352. 364? 423. 424 (zus. etwa 18 Abh.)

Die Tanto- nnd Brachistochronen würde ich znr Mechanik lassen. Bei der Überschrift *Mouvement des projectiles* in Ihrer Liste darf wohl nicht auf die Abh. über Trajectorien verwiesen werden, die gar nichts mit Mechanik gemeinsam haben, sondern nur auf die eine *ballistische* 390, die noch heut classisch ist. Andere Abh., die jetzt unter Geometrie stehen, würde ich einer neuen Rubrik: *Größtes und Kleinstes* überlassen oder

Isoperimetrische Probleme, worin die Variationsrechnung aufginge. Dahin würden gehören:

196. 197. 199. 289. 290. 383—386. 403—404. 408.

Nach diesen Ausscheidungen würde für Geometrie folgendes zurückbleiben:

1. *Planimetrie* 302—308. 310. 311. 316. 317.
2. *Kegelschnitte* 347—351.
3. *Stereometrie, Kartenprojection, Sphärische Trig.* 309. 312. 318—320. 332—335. 337—339.
4. *Höhere Geometrie* (Anw. der Differenzialrechnung) 358. 367. 401. 402. 428. 429. 433. 438.
5. *Allgemeine Theorie der algebraischen Curven* 343. 344.
(zusammen 37 Abh., würde also vielleicht gerade 1 Band geben.)

Algebra und Analysis.

Die Algebra und Analysis (Analyse) könnte in folgende Unterabtheilungen zerfallen.

1. *Zerfällung der rationalen Brüche in Partialbrüche:* 88. 97. 98.
2. *Kettenbrüche.* (Hiervon müßte alles ausgeschlossen werden, wo der successive Prozeß der den Kettenbruch giebt, aus der Eigenschaft gewisser bestimmter Integrale abgeleitet wird oder wo Differentialgleichungen durch Kettenbrüche integrirt werden; nicht aber wo der Kettenbruch nach allgemeinen Formeln aus einer unendlichen Reihe abgeleitet wird, von der bloß gelegentlich bemerkt wird, daß sie aus der einfachen Entwicklung eines unbestimmten Integrals entspringt.)
89. 91. 92. 95. 99—101. 164.
(89 könnte wegen des Endes zweifelhaft sein, doch ist der elementare Character zu überwiegend);
3. *Imaginäre Größen und imag. Form der Wurzeln der Gleich.:* 102. 189. 103. 108. 109.
4. *Algebraische Auflösung der Gleichungen* 107. 110. 112. 114.
5. *Ausziehung der Wurzeln aus Irrationalgrößen* 138.
6. *Auflösung durch Näherung* 111. 115. (139. 140. 146? [vgl. p. 296 ad 1 und 2]).
7. *Auflösung durch unendliche Reihen* 113. 116. 117. (die Abh. 118. 119 gehören in die *Integration der Dgl.*)
8. *Elimination* 106. (zu verweisen auf *Geometrie* 343. 344.)

9. *Binomischer Lehrsatz; Eigenschaften der Binomialcoëff.*
130—134. 136. [vgl. p. 298 ad 9.] 137.
(auszuscheiden, was besser zu *bestimmten Integralen* gehört.)

10. *Polynomischer Lehrsatz* (Potenzen von Polynomina), *Eigensch. der Polynomialcoëff.*
126. 128. 135. 168. [vgl. p. 298 ad 11.] 170.

11. *Combinatorische Analysis; Theilung der Zahlen.*
• 40, 5). 129. 191. 192.

(191 enthält die erste Notiz, die Euler über seine Entwicklung von $(1-x)(1-x^2)\ldots$ öffentlich gegeben, in dem Bande für 1741—43, dessen Druck aber 8—10 Jahre sich verspätete bis 1751.)

Diese 43 Abh. könnten wieder einen Band geben; wird er nicht zu dick, so ließe sich an die *Combin. Anal.* sehr gut *Wahrscheinlichkeit* 291—301 anschließen; wenn auch etwas Integr. darin vorkommt.

Einen neuen Band gäbe dann

Analytische Trigonometrie und Summation der Reihen.

Anal. Trig.; *Entwicklung nach den Cos. und Sinus der Vielfachen, Reihen für π.*

147—154. 157—159. 174—175. 178. 182. 313—315. 328—331.

Summation und Transformation der u. Reihen, unendliche Producte.

120—127. 141. 143—145. 155. 156. 165. 171. 173. 176. 177. 180. 181. 183. 185. 187. 188.

Beides zus. 47 Abh. Wieder auszuscheiden, wozu best. Integr. und Integration der Dgl. erfordert wird.

Mit diesen 5 Bänden (2 Zahlenth. 1 Geometrie 1 Algebra 1 Reihen) wäre der quasi elementare Theil geschlossen; und es käme die zweite Abth. der reinen Math., welche best. Int. und Integration der Functionen und Gleichungen fordert.

Integralrechnung.

A.

1. *Endliche Integration* (die sich auf Kreisbogen und Log. zurückführen lassen).
201—205. 208. 211—217. 241—246. (247. 248?)

2. *Entwicklung der Integr. in un. Reihen und u. Producte. Bestimmte Integrale.*
90. 94. 142. 160. 163. 218—240. (zus. etwa 37 Abh.)

B.

3. *Elliptische Integrale* s. oben.

4. *Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen*
(194.) 118. 119. 249—252. 254. 256. 257. 259. 261—266. 268. 271—279 (zus. etwa 44 Abh.).

C.

5. *Wiederholte Integrale. Doppelintegrale*
260. 280.
6. *Partielle Dgl. Discontinuierliche Functionen.*
169. 277. 284. 287. 288.
7. *Integrabilität.*
253. 255. 258.
8. *Isoperimetr. Probleme. Variationsrechnung* s. oben.

Um den Band zu füllen könnte man noch hinzufügen:

9. *Brachistochronen* 378—382. 472.
10. *Tautochronen* 369—377. 396. 397. (zus. 37 Abh.)

D.

Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie s. oben.

So wäre mit 9 Bänden die reine Mathematik absolvirt. Es käme dann die angewandte.

Mechanik und Astronomie.

Hier stecken noch die grössten Schätze für *reine* Mathematik. Die Eintheilung könnte etwa so gemacht werden.

Mechanik.

1. *Allgemeine Mechanik.*
400. 440. 443—451. 468. 469. 471. 477. 478. 533—535. 543—545. 743—746.
2. *Über den Stoß.*
479. 480. 503. 547. 548.
3. *Über die Festigkeit der Körper.*
588—593. NB. *Arch. civile et hydraulique* ist wohl ein ungewöhnlicher Gegensatz. Man erwartet *Arch. civile et militaire.*
4. *Statik und Mechanik der biegsamen Körper.*
454—457. 460. 464. 467. 482—485.
5. *Statik und Mechanik der elastischen Körper.*
363—365. 453. 458. 459. 461. 524—526.
6. *Anziehung nach 2 Centren.* (NB. Kann wohl noch eine der Unterabth. von 1. bilden.)
537—539.
7. *Specielle mechanische Probleme.*
452. 462 463. 465. 466. 470. 473—476. 481. 486—488. 494—497. 499.
8. *Hydrostatik und Hydrodynamik.*
562—576.

9. *Anwendung auf Navigation.*
572. 577. 596—601.

10. *Maschinenlehre.*
556—561. 578—587. (Die Abh. 582 muß von *hydraulischen Maschinen* fort.)

11. *Bahn der Planeten und Kometen.*
604. 613—615. 621. 625. 628. 662. 663. 666—667.

Astronomie.

11. s. oben. *Bahn d. Pl. u. K.*

12. *Problem der drei Körper mit Anwendungen auf das Sonnensystem.*
NB. Ich würde hier die Abtheil. a) b) etc. Ihrer Liste nicht machen, sondern alles hierauf bezügliche in chronologischer Ordnung drucken, weil gerade hier der Gang wie E. sich entwickelt hat interessirt.
540—542. 605. 607—611. 616. 617. 620. 629—634. 639—646. 652—657. 681—684. 756.
Es wird ein vorzüglich interessanter Theil, in dem alle E. schen Arbeiten über die 3 Körper zusammen sind.

13. *Sphärische Astr. Parallaxe. Präcession. Nutation. Aberration etc*
606. 618. 623. 635—638. 648. 651. 658. 659. 668—680. 691a. 711. 735 b. 736.

14. *Ebbe und Fluth.*
732. 733.

15. *Sphäroidische Gestalt der Erde und davon herrührende Störungen.*
536. 619. 626. 627. 647.

Vielleicht können 12 einen und 11. 13. 14. 15 einen anderen Band bilden [1]).

Ehe ich es vergesse, bemerke ich noch, daß in Comment. XII eine Abh. von Euler latitiert. Es befindet sich nämlich in einer Abh. von Winsheim: *Determinatio exactior* etc. [2]) eine Abh. S. 224—231, die die Überschrift hat:

Methodus viri celeberrimi Leonhardi Euleri determinandi gradus meridiani pariter ac Paralleli Telluris secundum mensuram a Celeb. de Maupertuis cum sociis institutam.

Der Vf. sagt:

Communicavit mecum, hunc in finem benignissime methodum suam, Celeb. Eulerus, mire facilem ac compendiosam, *quam ipsissimis Viri Celeb. verbis, bona cum ejus venia, praemitto.*

1) Fuss erkannte Jacobis Vorschläge als zweckmäßig an und hat, unter Berufung auf diesen, die Einteilung für die reine Mathematik mit geringen Änderungen in dem *Prooemium* zu den *Comm. ar.* abgedruckt.

2) Comment. Petrop. 12 ad ann. 1740 (1750), p. 222. Erst durch Jacobis Brief hat Fuss von dieser Abhandlung Kenntnis erhalten, siehe *Comm. ar.* t. 1, p. XXIV.

Die etwa zu machenden näheren Unterabtheilungen, ähnlich wie oben bei Algebra und Geometrie, habe ich im Vorstehenden nicht angedeutet, weil ich in diesem Augenblick den Inhalt der meisten Abh. nur nach dem Titel vermuthen kann, der bei Euler oft sehr täuscht, so daß es vielleicht in einer künftigen Liste zweckmäßig wäre, neben den Titeln in Klammern bezeichnendere zu setzen.

Ich glaube es wäre gut, wenn Sie Ihre Eulersche Thätigkeit vorläufig auf die bisher erwähnten Capita beschränkten. Die langweiligsten aller Eulerschen Arbeiten sind die dioptrischen, die noch dazu in zahlloser Menge und von unendlichem Umfang sind. Ob es lohnen wird, einmal auch diese zu drucken, weiß ich nicht. Ich glaube aber, daß das bisherige füglich als ein Ganzes erscheinen kann, etwa unter dem Titel: *Euleri Scripta minora mathematica et mechanica*, oder *mathematica, mechanica, astronomica*. Es würden dies etwa 20 Bände in der Art der *Opp. Arithmetica* sein, also etwa 20000 Silberr. kosten. Hätten Sie den Leuten nicht mit Ihren 80000 R. solchen Schreck gemacht, so wären wir vielleicht schon etwas weiter. Es wäre ja damit, wenn dies absolvirt, unbenommen gewesen, das andere hinzuzufügen. Es wäre interessant und wichtig, wenn Sie darüber einen genauen Anschlag machten, in der Art, daß Sie jede Seite der Comm., N. Comm., Acta, N. Acta und der Mém., der *Opusc. V. Arg.*, der *Opusc. Anal.* nach den in den *Opp. Arithm.* gemachten Erfahrungen auf den Wert reduciren, den sie in der neuen Ausgabe erhält, so daß Sie bei jeder Abh. sogleich ihre Seitenzahl in der neuen Ausgabe haben. Wahrscheinlich haben Sie dies schon gemacht. Erst dann könnte man an die Lösung der schwierigen Aufgabe gehen, Bände von beinahe gleichem Umfange zu machen, von denen jeder ein für sich abgeschlossenes — auch besonders käufliches — Ganzes bilden. Ich meinerseits kann ohne eine solche Vorarbeit eigentlich Ihnen weder einen Rath geben noch eine Ansicht haben. Was ich im Vorigen gethan, war nur für mich selbst, um mich in der von Ihnen zu lösenden Aufgabe zu orientiren. Nur muß ich von meinem Standpunkte das Prinzip festhalten, daß jede in sich gegründete Gruppirung bei der Herausgabe ein großer Vorzug des Werkes sein würde, der in ähnlichen Fällen nur der Schwierigkeit wegen aufgegeben wird, so daß man zur chronologischen Ordnung sich nur wie zu einem künstlichen System rettet, wenn man kein natürliches hat. Wenn zwei Stoffe gar keine oder fast gar keine Verbindung untereinander haben, so hat es kein Interesse, sie durch die chronologische Ordnung zu vermengen, wie dies z. B. in den *Opp. Ar.* mit der *Diophantischen Analysis* und der *Zahlentheorie* geschehen ist.

———

Ergänzung meiner Liste aus den Protocollen der alten Akademie*).

Ich habe mir die Mühe gegeben, noch einmal die alten Protocolle durchzusehen, um vielleicht einige der von Ihnen gestellten Fragen beantworten zu können. Ich bemerke aber, daß sich in diesen Protocollen durchaus nur die Titel und zwar ziemlich oberflächlich angegeben finden, so daß ich keine auf den Inhalt bezügliche Frage beantworten kann. In den drei dicken Foliobänden, welche copirte Msc. Eulerscher Abh. enthalten sind die Titel, wo sie von den gedruckten abweichen, mit denen in den Protocollen übereinstimmend.

1749 9. Oct. *De serierum Determinatione* (?!) [No. 124?]
NB. 1749 4. Dec. heißt im Titel *non sphaerica*.

1751 2. Sept. M. Euler a lu un mémoire concernant *une Machine Hydraulique de l'invention de M. Segner, Membre de l'Académie, par laquelle il semble qu'on produit un mouvement perpétuel.* [No. 578 oder 579?]

1751 7. Oct. *Du mouvement d'un corps solide quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile.* [No. 478 oder 477?]
NB. Beim 2. Dec. heißt die Abh. *Tent. th. de frictione solidorum* (nicht *fluidorum*).
NB. Vom 25. Juli 1752 findet sich ein kurzer Bericht Eulers über astronomische Instrum. von e. gewissen Brincken.

1752 9. Nov. M. Mérian lit un mémoire de M. Euler:
Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. Maupertuis. [No. 445.]

1753 25. Oct. *De frictione corporum rotantium.* [No. 555.]
NB. 1754 22. Aug. heißt die Abh. *Examen d'une* (nicht *de la*) *controv.* etc.
NB. 1754 6. Nov. wird J. A. Euler gewählt.
NB. 1755 12. Juni *De int. aequ. differentialium* (nicht *integralium*).
NB. 1757 29. Sept. *Rech. sur la déclinaison* (nicht *inclinaison*) (No. 740).
NB. 1758 27. Apr. *Remarques* (nicht *Recherches*).

1761 28. Mai. *Dilucidationes de tautochronis in medio resistente.* [No. 373.]
NB. 1763 ist die Juli-Abh. vom 15ten.

NB. Die Abh. 1764 18. Oct. die Euler vorlegt *Norma rat.* etc. ist wohl nicht von ihm selbst, wenigstens geht es nicht aus dem Protocoll hervor.

NB. Die Abh. vom Nov. 1764: *Sur le v. car. d. la Mus. mod.* ist vom 1. und 22., wo sie beendet wird.

*) Ich kann nur, wie Sie sehen, sehr wenigen Ihrer Wünsche durch das folgende genügen. Dieselben reduciren sich aber dadurch, daß Sie bei den Berl. Mém. nie auf den Jahrgang, sondern nur auf die Jahreszahl, wann sie erschienen, Rücksicht zu nehmen haben. Maup. bestimmte, was von den Abh. und wann es gedruckt werden sollte.

NB. Bei 1765 7. März heißt es: *M. Euler a achevé un mémoire sur l'int.* etc.; ich konnte aber nicht finden, wann es angefangen wurde zu lesen.

1766. 6. Febr. M. Bernoulli a lu deux Mémoires de M. Euler

1° *Nouvelle manière de comparer les Observations de la Lune avec la Théorie* No. 654,

2° *Sur la construction des objectifs composés, propres à détruire la confusion* No. 717.

So sind noch von 8 Eul. Abh. die Data hinzugekommen.

Genauere Angabe des Inhaltes der drei dicken Foliobände Msc., in welchen sich von fremder Hand copirt Abh. befinden, die in der Berl. Akademie gelesen sind, soweit dieser Inhalt die Eulerschen Abh. anbetrifft.

Die drei Foliobände sind von gleichem Einband, Format, Papier, aber von verschiedenen Copistenhänden. Das Datum wann sie gelesen, aber nicht der Autor, ist in den ersten beiden Bänden bei jeder Abhand. bemerkt; noch weniger ob und wo sie gedruckt ist. Die Ak. scheint die Copien der Abh., *wie sie gelesen wurden*, haben anfertigen lassen. Beim spätern Druck wurde dann noch manches, auch der Titel verändert. (In dem Statut der neuen Wiener Akademie ist der *Bull*, daß kein Akademiker im Druck etwas anderes als Druckfehler ändern darf. Hätte man die löbliche Einrichtung damals gehabt, so würde man jetzt die Mühe sparen, die Eulerschen gedruckten Abh. mit den handschriftlichen zu vergleichen.) Die Daten in den ersten beiden Bänden findet man mit den in den Protocollen angegebenen übereinstimmend; eben so die Titel. Ich habe mir die Bände der Novi Comm., wo die Abh. gedruckt sind, von der Bibliothek der Akad. geben lassen, um zu sehen, wo Änderungen im Druck gemacht sind. Wo dies nicht ist, habe ich u. g. (unverändert gedruckt) beigesetzt.

Der 1. Bd enthält die im J. 1747, der 2. die im J. 1748 gelesenen Abh. mit Ausnahme einer einzigen; der dritte Bd. aus verschiedenen Jahren; nämlich

1751. 6 Abh. 7 Jan. 14 Jan. 4 März. 6 Mai. 17 Juni. 21 Oct. (1. 4. 5. 3. 17. 19.)

1752. 7 Abh. 27 Jan. 10 Febr. 9 März. 23 März. 22 Juni. 31 Aug. 28 Sept. (9. 18. 11. 21. 22. 10. 13.)

1753. 2 Abh. 12 Apr. 13 Sept. (6. 8.)

1755. 2 Abh. 3 Mai. 6 Juni (12. 7.)[1]

1758. 1 Abb. 9 Nov. (20.)

Die Nummern bedeuten die Folge, in welcher sie in dem Foliobande sich befinden. Die Abh. 14 und 16 sind vielleicht die am 9. Sept. 1751 gelesenen Abh., was man nur vermuthen kann, da im 3ten Bande kein Datum, wann die Abh. gelesen sind, beigefügt ist.

1) Die mit 12 bezeichnete Abhandlung ist nicht vom 3. Mai 1755, sondern vom 3. Mai 1753, s. p. 264 und p. 294 ad 12; die mit 7 bezeichnete ist nicht vom 6., sondern vom 26. Juni 1755, s. p. 293 ad 7 und p. 265.

Erster Band für 1747.

1. *Dem. g. th. Neut. in quo etc.* u. g.

2. *De numeris amicabilibus*, gänzlich vom gedruckten verschieden. Die letzten $2^1/_4$ Bogen enthalten die auch in der gedruckten Abh. befindliche *Tabelle für die Factorenzerfällung der Factorensummen der Primzahlen und ihrer Potenzen bis 1000.* Die übrige Abh. beträgt $4^3/_4$ Bogen (19 Folioseiten).

3. *Theoremata circa divis. num.* u. g.

4. *Rech. sur le mouv. des c. cél.* u. g.

5. **Découverte d'une Loi toute extraordinaire des Nombres.** Dies ist die von Ihnen so sehr gesuchte Abhandlung; sie ist 13 Folioseiten stark und eine erste Redaction der *Observatio de summis divisorum*, die E. unterm 6. April 1752 nach Pet. schickte zufolge Ihrer Angabe, während jene schon am 22. Juni 1747 gelesen war. Beide Redactionen sind im Ganzen und Detail durchaus nicht wesentlich verschieden, obgleich die lateinische auch keine Übersetzung aus dem französischen ist. Mau könnte allerdings diese frühere Redaction dem 2. Theil der *Opp. Ar.* anhängen; man muß aber bedenken, wieviel Abh. schon ganz über denselben Gegenstand von E. zu drucken sind, unter denen eine ist, die vollkommen allein genügt hätte. Ich habe sie S. 345 meiner *Opera mathematica* zusammengestellt, wo ich aus Ihrer *Correspondance* ermittelt habe, daß E. seine merkwürdige Entwicklung wahrscheinlich schon Ende 1740 fand, indem er sie im Januar 1741 D. Bernoulli mittheilt. Auch habe ich sie später noch in einer Abh. der Comment. v. den Jahren 1741—43, die aber erst 1751 erschienen gefunden. Diese Abh. enthält zwei ziemlich von einander unabhängige Theile, von denen der erste combinatorischen Inhaltes ist, nnd sich mit der Erfindung der Potenzsummen und Combinationen mit Wiederholung der Wurzeln einer Gleichung beschäftigt; der andere aber *de partitione numerorum* handelt, und ganz ähnlich mit diesem Abschnitt in der *Introductio* nnd mit der Abh. in den Novi Comm. ist, die Sie schon abgedruckt haben. Es befindet sich hierin noch keine Anwendung auf die Factorensummen, die er erst 1747 gemacht zu haben scheint. Er theilt dieselbe auch an d'Alembert in einem größern Briefe vom 15. Febr. 1748 mit, dessen Original Hr. Dr. Friedlander besitzt, der mir erlaubt hat, eine Abschrift davon zu machen.

Die Tabelle S. 149—150 der *Opp. Ar.* ist in der französ. Abh. bis $\int 20$ statt bis $\int 12$ fortgesetzt; zu dem Beispiel für $\int 101$ ist im franz. M. das Beispiel für $\int 301$ hinzugefügt. Dies ist die hauptsächlichste Abweichung der *Découv. d'une Loi* von der *Observatio de summis divis.* [No. 17].

Von dieser letzteren könnte man vielleicht ein genaueres Datum ermitteln als das in den *Opp. Ar.* angegebene. Denn sie scheint nichts anderes als das am 9. Sept. 1751 gelesene *mémoire concernant un théorème d'arithmétique* zu sein; das gleichzeitige *mém. de Stéréométrie* ist dann vielleicht die Abh. 14 im 3ten Volumen der Msc., wo die Abh. *Obs. d. s. d.* die Abh. 16 ist.

Ich möchte mir bei dieser Gelegenheit noch erlauben, Ihnen zu sagen, warum ich mich so für diese Eulersche Entdeckung interessire. Sie ist nämlich der erste Fall gewesen, in welchem Reihen aufgetreten sind, deren Exponenten eine arithmetische Reihe *zweiter* Ordnung bilden, und auf diese Reihen ist durch mich die Theorie der elliptischen Transcendenten gegründet worden. Die Eulersche Formel ist ein specieller Fall einer Formel, welche wohl das wichtigste und fruchtbarste ist, was ich in reiner Mathematik erfunden habe,

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots(z-z^{-1})(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\ldots$$
$$(1-qz^{-1})(1-q^2z^{-1})(1-q^3z^{-1})\ldots$$
$$=z-z^{-1}-q(z^3-z^{-3})+q^3(z^5-z^{-5})-q^6(z^7-z^{-7})+q^{10}(z^9-z^{-9})\ldots,$$

wo die Exponenten von q, 1, 3, 6, 10 etc. die *dreieckigen* Zahlen sind. Setzt man für z eine imaginäre *Kubikwurzel* der Einheit: so erhält man die Eulersche Formel. Hierdurch habe ich sie mit der *Trisection* der elliptischen Integrale in Verbindung gebracht. Differenziirt man nach z und setzt dann $z=1$, so erhält man auch für den *Kubus* des Eulerschen Productes die schöne Entwicklung,

$$\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots\}^3=1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-11q^{15}+\text{etc.}$$

Dies mag wohl in der Analysis das einzige Beispiel sein, daß eine Potenz einer Reihe, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, wieder eine solche Reihe giebt.

6. *De reductione linearum curvarum ad arcus circulares.* **u. g.**

7. **Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.** 19 Folioseiten, ganz verschiedene Redaction.

8. *Méthode pour trouver les vrais moments tant des nouvelles que des pleines Lunes.*

Diese Abh. enthält die in den Berl. Mem. **III** pg. 154 gedruckte, zu der nur im Druck der Schlußsatz hinzugefügt ist: J'ai cherché ces corrections sur un grand nombre d'Eclipses de la Lune, et c'est après ces corrections que sont dressées les tables, qui se trouvent dans l'Almanac Astronomique pour l'année 1749. Dafür folgen im Msc. noch 16 §§, etwas über 10 Folios. Man ersieht aus der Abh. B. M. **III**. pg. 250, daß diese im Berliner Almanach abgedruckt sind, ob mehr oder weniger wörtlich, kann ich nicht sagen, da ich ihn nicht bei der Hand habe. Ist dieser Almanac Astr. in Bezug auf die Eulerschen Arbeiten unter-

sucht? Ihr Vater notirt eine deutsche Abh. aus dem B. Jahrbuch f. 1783, wahrscheinlich eine Übersetzung Ihrer No. 627, die Sie deshalb nicht in Ihre Liste aufgenommen haben mögen.

In den Protocollen vom 5ten October 1746 finde ich, daß Maupertuis verordnet, der Rechnungsgehilfe Schumacher solle nicht länger Ephemeriden berechnen, weil die Berliner Bb. den Pariser so unendlich nachstünden. Er solle lieber eine untergeordnete Arbeit machen, tel que serait les Ephémérides de la lune suivant la nouvelle Théorie de M. Euler comparée avec les autres. M. Euler s'est chargé de régler le tout en tems et lieu et de donner les directions nécessaires au Calculateur.

9. *Sur une contrad. app. dans la Th. d. courbes.* **u. g.**

10. *Sur le point de rebroussement etc.* **u. g.**

11. *Sur la force des rames.* **u. g.**

12. *Sur la parallaxe de la Lune.* **u. g.**

II. 1748.

1. *Suite du Discours* (d'un mémoire im Protocoll) *précédent laquelle contient une Démonstration sur le nombre des points etc.* **u. g.**

2. *Sur l'espace et le tems.* **u. g.**

3. *De vibratione Cordarum*, lat. Original, wörtlich im Druck übersetzt.

4. *Sur la Friction des corps solides;* im Msc. immer *friction* statt *frottement*, sonst **u. g.**

5. *Sur la perfection des verres obj. des lunettes.* **u. g.**

6. *Sur l'accord etc.* **u. g.**

7. *De atmosphaera Lunae* etc., lat. Original der Abh. B. M. **IV** pg. 103. Der Anfang im Gedruckten ist schlecht übersetzt und könnte das Mißverständniß verursachen, als hätte E. selbst beobachtet:

En observant les momens de l'Eclipse etc.

Cum nuper momenta Eclipsis Solis, quam hic nobis die 25 praesentis mensis Julii observare contingebat, exposuissem etc.

Sonst wörtlich übersetzt.

8. *Recherches sur les plus grands etc.* **u. g.**

III. Aus verschiedenen Jahren.

1. *De methodo Dioph. analoga.* **u. g.**

2. *Dem. th. Ferm omnem n. p. formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum.* **u. g.**

Diese Abh. ist mit der unten folgenden 17 im Druck verbunden, ohne daß E. fortlaufende §§ gemacht hat, so daß die neue 1 bei der Paragraphirung zeigt, wo 17 anfängt Es ist nur der Titel von 17 fortgeblieben, woraus der Übelstand entsteht, daß man jetzt aus Ihrer Liste nicht errathen kann, wo der berühmte Satz steht, daß die Summe

von 4 □ mit der Summe von 4 □ multiplicirt wieder die Summe von 4 □ giebt. Dieser Titel wäre im Index der *Opp. Ar.* deshalb beizufügen. Hiernach wäre das in meinem vorigen Briefe gesagte zu berichtigen, was ich wahrscheinlich aus dem Kopfe geschrieben, ohne die N. C. bei der Hand zu haben. Ich sagte Ihnen, E. erzähle in der Abh. 17, er könne noch nicht beweisen, daß jede Primzahl $4n+1$ die Summe 2 □ sei, während er doch gerade sagt: cuius th. veritatem nuper tandem post plures conatus demonstravi.

Es läßt sich hiernach das Datum der zweiten Hälfte genau feststellen als den 17 Juni 1751. Ich vermuthe, daß die erste Hälfte die am 15. Oct. 1750 gelesene Abh. ist, während die Abh. S. 155 der *Opp. Ar.*, die am 20. März 1749 unter demselben Titel: de numeris qui sunt etc. 2 □ gelesene sein mag. Die Abh. vom 9. Sept. 1751, die ich in meinem früheren Schreiben für die *Dem. th.* FERMAT. hielt, halte ich jetzt, wie oben bemerkt worden, für die *Observ. d. s. divis.*

3. *Rech. sur le mouv. des rivières.* **u. g.**

4. *Meth. inv. infin. c. isoperim. aliave c. pr. praeditas.* **u. g.**

Vielleicht die am 14. Jan. 1751 gelesene, *sur le probl. isoperimètre.*

5. *Rech. sur les divers degrés de Lumière. etc.* **u. g.**

6. *Essai d'une expl. Phys. des couleurs etc.* **u. g.**

7. *Rech. pour servir à la perfection des lunettes*, ungedruckt, gelesen 26. Juni 1755, 58 enggeschriebene Folioseiten in 169 §§ und 5 Sectionen. Die Abh. ist daher mit dem Brief Ihrer No. 713 nicht identisch. Sie fängt an: Quoique le hazard ait produit la découverte des lunettes und schließt: Mais puisque le champ apparent devient fort petit, je ne m'arrète pas à développer plus amplement ce cas.

Sect. I handelt 1) De la représentation distincte, 2) De la r. claire, 3) Du grossissement des objets, 4) De la quantité du champ apparent. Dann Considér. gén. sur les lunettes à plusieurs verres, enth. 1 Lemma und 4 Coroll.: La distance du foyer d'un verre étant donnée, trouver le lieu et la grandeur de l'image qu'il représente lorsque l'objet se trouve à une distance donnée du verre; 1 Probl. mit 6 Cor.: Autant de verres qu'on voudra étant disposés sur l'axe OZ en A, B, C, D, E, devant lesquelles se trouve un objet O, trouver tant le lieu que la grandeur des images, qui seront superposées par tous ces verres, 2 Probl. mit 2 Cor. und 2 Sch.: Les verres étant disposés d'une manière quelconque, comme dans le problème précédent, trouver la forme du cône lumineux qui est transmis par tous les verres de chaque point de l'objet.

Die Sect. II—V beziehen sich auf Lunettes mit 2, 3, 4, 5 Gläsern. Sie zerfallen in mehrere Unterabtheilungen, die sich auf die einzelnen Buchstaben der allgemeinen Formeln, 𝔄, 𝔅, etc. beziehen.

Ich schreibe Ihnen dies so ausführlich, damit Sie die Abh. mit Ihrer handschr. Abh. über Dioptrik vergleichen können.

8. *Th. plus compl. des Machines qui sont mises en m. par la réaction de l'eau.* u. g.

9. *Obss. de Compar. Arc. Curv. Irrectif.* u. g.

10. *De motu fluidorum in genere.* u. g. Dies ist die Abh. *Principia motus fluidorum*, so daß von dieser Abh., welche so überaus wichtig geworden, das genaue Datum 31 Aug. 1752 aus den Protocollen feststeht. Im Msc. fehlt noch die Überschr. *Pars Prior*; dagegen befindet sich wie im Druck die Überschr. *Pars Secunda* bei § 39. Außerdem fehlen im Msc. die letzten 6 Zeilen, so daß es *atque adeo multo latius patens* schließt.

11. *Subsid. C. Sinuum.* u. g.

12. *De res. aequ. cuiusvis generis.* u. g.

13. *Détermination de l'effet d'une machine hydraulique inventée par M. Segner Professeur à Gottingue, gel. 28 Sept. 1752.* Nur die Einleitung dieselbe, sonst gänzlich verschiedene Redaction, obgleich die gedruckte in demselben Jahre erschienen ist, wo die Hdschr. und zwar erst im Sept. gelesen wurde.

14. *Dem. nonn. insignium propr. quibus solida etc.* [No. 320] u. g., vielleicht die am 9. Sept. 1751 gelesene; sie enthält den quasi Beweis der am 26 Nov. 1750 gelesenen, die vor ihr in demselben Bande **IV** gedruckt ist.

15. *Dem. th. circa ordinem in summis divisorum obs.* u. g. Enthält zuerst den Beweis der Entwicklung von $(1-x)(1-x^2)\ldots$; ein Meisterstück. Datum unbekannt; in demselben Bande wie die folgende.

16. *Obs. de summis divisorum.* [No. 17.] u. g.; hier verzweifelt er noch diesen Beweis zu finden; vielleicht die am 9. Sept. 1751 gelesene.

17. *Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum.* u. g. Dieser Titel wäre zu dem Titel von 2 im Index der *Opp. Ar.* in Klammern beizufügen (una cum Demonstratione etc.) S. oben zu 2.

18. *Nouv. méth. d'éliminer les qu. inc. des équ.* u. g., obgleich E. sie 10 Jahre liegen gelassen.

19. *De cochlea Archim.* u. g.

20. *Du mouvem. d'un Corps solide quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile.* u. g., nur daß im Druck nach den 56 §§ *drei* andere, bestehend in 2 Cor. und 1 Remarque hinzugefügt sind. [No. 478.]

21. *De aptissima figura rotarum* etc. u. g.

22. *De la Réfr. de la lumière en passant etc.* u. g.

(23. *De draconibus volantibus* von J. A. Euler; existirt noch einmal nebst fr. Übers.)

Die kleinen Berichte von Euler werde ich Ihnen schicken, wenn Sie bestimmt haben werden, was Sie haben wollen. Alle andern Msc. sind die aus der Druckerei zurückgekommenen Originale abgedruckter Abh., so daß sie nur das Interesse der Handschrift haben.

Conclusion.

Es fragt sich nun, was soll ich Ihnen schicken? Es steht Ihnen natürlich alles zu Diensten. Aber das was Sie brauchen könnten, läßt sich nicht detachiren, und Sie müßten daher die Mühe übernehmen, die drei überaus dicken Volumina, die eine Menge Nicht-Euleriana enthalten, kommen zu lassen. In diesem Falle würde ich Sie bitten, gleichzeitig mit der Anzeige besondere Instructionen an Voss in Leipzig zu ertheilen, da er ohne solche dergleichen dicke Sendungen auszuführen zaudert. Vielleicht ziehen Sie es aber vor, das was Sie interessirt, hier abschreiben zu lassen, was mit einigem sogleich, mit anderem vielleicht später geschehen könnte.

Als Grundsatz werden Sie wohl festhalten, *daß von allen Abh., die in französ. Übers. gedruckt sind, von denen aber die lateinischen Originale noch existiren, die letzteren in der neuen Ausgabe gedruckt werden.* (Die Übersetzungen hat wohl immer der treffliche Formey gemacht.) Es würden daher copirt werden müssen:

II. 3. *De vibratione Cordarum* $14^1/_2$ Folios.
II. 7. *De atmosphaera Lunae* etc. $20^1/_2$ Folios. } 35 Fs.

Ferner könnte diejenigen Abh. zu copiren interessiren, welche erste Redactionen sind. Hiezu gehören

I. 2. *De numeris amicabilibus* 19 Fs.
I. 5. *Découverte d'une Loi t. e. d. n.* 13 Fs.
I. 7. *Sur les log. etc.* 19 Fs.
III. 7. *Recherches pour servir à la p. des L.* 58 Fs.
III. 13. *Det. de l'effet etc.* 32 Fs. mit 10 Figuren. } 141 Fs.

Für die *Opp. Ar.* würde nur die I. 2. 5 (32 Fs.) zu copiren Interesse haben, oder gar nur die I. 5. Wenn Sie, *was ich jetzt doch für das bessere halte*, zunächst in die *Geometrica* und *Algebraica* gehen, käme noch I. 7 hinzu. Also bestimmen Sie, ob Sie die ganzen Volumina (die das Unangenehme haben, daß sie nicht paginirt sind) dorthin haben, oder was Sie abgeschrieben haben wollen. Übrigens sehen Sie, auf wie weniges sich das reducirt, was wir Ihnen von hier aus bieten können.

Über die Opp. Arithm.

Ich will Ihnen jetzt einige zerstreuten Bemerkungen und Fragen über die *Opp. Arithm.* machen, und dann einige Vorschläge über die Anordnung

eines Inhaltsverzeichnisses, damit man nicht immer die Titel sämmtlicher Abh. durchzublättern braucht, um etwas zu finden. Die arab. Nummern beziehen sich auf Ihre Liste, die römischen auf das Inhaltsverzeichniß des ersten Bandes Ihrer *Arithmetica*.

1. Werden die Abh. No. 93 *De res. irrat. per fractiones contin.* und No. 139 *Nova ratio qu. irr. proxime exhibendi* hineinkommen? (ich kann sie nicht beurtheilen, da ich die N. Comm. nicht habe).

2. Sollte nicht die Abh. 146 vielleicht aufzunehmen sein, die weniger des Inhaltes wegen als der Methode zu einigen Abh., welche sich mit der Rationalmachung von $\sqrt{a + bx + cx^2}$ beschäftigen, zu gehören scheint? So ist schon XXVIII [No. 140] aufgenommen, die auch rein algebraischer Natur ist, da nur zu den Beispielen ganze Zahlen genommen sind, alles sich aber auf allgemeine Größen bezieht, welche Aufnahme jedoch sehr zweckmäßig ist, da die dort gebrauchte Methode gerade in der Zahlentheorie von großer Wichtigkeit ist.

3. Die Abh. XXVII [No. 34] würde wohl besser zur *Wahrscheinlichkeitsrechnung* gerechnet worden sein, das arithmetische darin ist von gar keiner Consequenz.

4. Die Abh. über den Springerzug [No. 84] rechnen einige, wie Gauss, zur *Geometria Situs*, worüber die Eulersche Abh. in den alten Comm., ob man über alle Brücken des Kniephofs in Königsberg so gehen kann, daß man keine zweimal passirt [No. 302]. Gauss scheint sich viel mit dieser *Geom. Situs* noch in der allerletzten Zeit beschäftigt zu haben. Doch hat Legendre davon in seiner *Th. d. N.* gehandelt.

5. Die Abh. No. 166 *De serie Lambertiana* gehört wahrscheinlich auch in die *Opp. Ar.*

6. Daß die No. 167 *Evol. prod. inf.* $(1-x)(1-x^2)\ldots$ hineinkommt, versteht sich wohl von selbst, da sie genau zu denen *über die Factorensummen* gehört. Sie möchten denn absichtlich, wenn über einen Gegenstand, der seiner Natur nach zweien Zweigen angehört (Zahlentheorie und Reihen), mehrere Abh. geschrieben sind, diese auf die verschiedenen Zweige vertheilen wollen, was sich auch hören ließe. (Hätten Sie mir eine Abschrift des Inhaltes des 2. Theiles geschickt, würde ich Sie nicht mit so viel unnöthigen Fragen belästigen.)

7. In den Briefen*) von J. A. Euler (von denen ich freilich nicht den zehnten Theil in Kopfschmerzstunden durchblättert habe) jammert dieser fortwährend, daß sein Vater nichts als die *magischen Quadrate* im Kopfe habe, und daß die Abh. darüber so endlos würde, daß die Pet. Ak. in Verlegenheit wäre, sie zu drucken. Wir sehen auch in der That, daß

*) Es ist darin einmal Cagliostro erwähnt; Goethes Freund Lenz, der in Moskau wahnsinnig starb, verkehrte viel beim alten und jungen Euler.

sie in einer holl. Zeitschrift (No. 85) erschienen ist. Vielleicht wissen Sie, wie dies gekommen ist.

7[a]. Die unbekannte Abh., auf die sich Euler in XVIII beruft, ist vielleicht die am 8. Juni 1758 gelesene, *Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata.* S. 357 Z. 9 des Vol. I der *Opp. Ar.* ist das Citat wahrscheinlich *Introd. i. A.* I Cp. 15, § 279.

Die Fortsetzung dieser Bemerkungen s. nach dem folgenden

Inhaltsverzeichniß.

Ich will Ihnen das Inhaltsverzeichniß des 1. Bandes der *Opp. Ar.* mittheilen, wie ich es zu meinem Gebrauche geordnet habe, jedoch ohne die Titel beizuschreiben.

A. *Diophantische Analysis.* VIII. XIV. XVII. XVIII. XXIX—XXXIII. XXXVI. (II rechne ich nicht dazu.)

B. *Aufl. der unbest. Gleich. des 1ᵗᵉⁿ Grades.* III.

C. *Aufl. der unbest. Gl. des 2ᵗᵉⁿ Grades. Pell'sche Gleichung.* II. XXII. XXIII. XXVIII. XXXIX.*)

D. *Über die quadratischen Reste und die Theorie der quadratischen Formen.* VI. XII. XIII. XV. XXI. XXII. XXXIV. XL.

E. *Allgemeine Theorie der Potenzreste.* I. IV. VII. XIX. XX. XXXV. XXXVII. XLI.

F. *Zerfällung der Zahlen in vier Quadrate (drei 3eckige, vier 4eckige, fünf 5eckige etc.)* XV. XXXVIII.

G. *Erforschung großer Primzahlen; Primzahltafeln.* XXV. XXVI.

H. *Über ein recurrirendes Gesetz der Factorensummen mit Anwendung der 5eckigen Zahlen.* XI. XVI.

J. *Gleichungen, welche in ganzen Zahlen nicht Statt finden können.* V.

K. *Theilung der Zahlen.* IX. XXVII.

L. *Vermischtes (Freundschaftliche Zahlen, Springerzug, magische Quadrate)* [X]. XXIV.

NB. Die Abh. XXII besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen, welche nur ganz äußerlich mit einander verbunden sind, von denen der zweite S. 310 oben bei Observ. 5 anfängt. Ich habe sie daher doppelt bei C und D aufgeführt.

Es würde wohl zweckmäßig sein, in jedem Inhaltsverzeichniß bei jeder Abh. auf andere zu verweisen, wo derselbe Gegenstand behandelt wird, wenn sie auch noch nicht in der neuen Sammlung erschienen sind,

*) Nach C müßte in einer neuen Abtheilung die Aufl. der Gl.

$$y^2(ax^2+bx+c)+y(a'x^2+b'x+c')+a''x^2+b''x+c''=0$$

oder die Rationalmachung von $\sqrt{(\alpha x^4+\beta x^3+\ldots\varepsilon)}$ kommen; steht in inniger Verbindung mit der Theorie der elliptischen Integrale.

oder sich in einzelnen Kapiteln der größeren Werke befinden. So könnte bei XVIII auf XXI verwiesen werden; bei der Abh. *de partitione numerorum* auf das entsprechende Kapitel der *Introductio* und auf die oben bereits erwähnte Urabhandlung in den Comm. von 1741—43, auf die auch bei H verwiesen werden müßte.

Es wäre wünschenswerth, wenn Sie Ihre und Ihres Vaters Theorie bei der Bestimmung der Jahreszahlen vereinigten und bei jeder Abh. im Verzeichniß neben der Jahreszahl, wann sie geschrieben, auch die angäben, wann sie publicirt wurde. Das eine ist für die Geschichte der Eulerschen Arbeiten, das andere für die Geschichte der Arbeiten anderer von Interesse. Aus dem Briefwechsel ersieht man dann bisweilen, welche Privatmittheilungen, die oft zwischen dem einen und dem andern fallen, Euler gemacht hat. In den Comm. scheint in den einzelnen Jahrgängen strenge nur das aufgenommen worden zu sein, was wirklich in dem betreffenden Jahre gelesen worden. Es wäre von Wichtigkeit dieses festzustellen*). Die Berliner Ak. ist ganz von diesem Prinzip abgewichen, und enthält sehr oft spätere Abh. als die Jahreszahl des Bandes.

Ich komme noch einmal auf das NB zurück, um die Frage zu stellen, ob es nicht ausführbar wäre, bei diesen Verweisungen auch auf Ihre *Correspondance* Rücksicht zu nehmen. Einige Mühe würde es wohl machen, aber den Werth des Verzeichnisses sehr erhöhen.

Fortsetzung der obigen Bemerkungen.

8. Wollen Sie sich nicht für den 2. Theil der *Arithmetica* von der Pariser Akademiebibliothek eine Copie der beiden Eulerschen Briefe an Lagrange erbitten, die Legendre in der *Théorie d. N.* 2ter Theil S. 142 erwähnt? Legendre war damals sehr begierig zu wissen, ob sich nichts über die darin erwähnten Probleme unter Eulers Papieren finde, was ich Ihnen glaub' ich vor langer Zeit geschrieben.

9. Gehört etwas von den Eigenschaften der Binomialcoeff. (etwa No. 136) in die *Opp. Ar.?*

10. Die Abh. 161 muß wohl auch hinein, und würde bei F im Index unterzubringen sein {ist darin}.

11. Die Abh. 168 gehört ebenfalls in die *Opp. Ar.*; sie würde einen Abschnitt bilden: *Anwendung der unendlichen Reihen und Producte auf die Zahlentheorie*, der in neuester Zeit durch Dirichlet einer der sublimsten Zweige der Mathematik geworden ist, und sich gänzlich auf das 15. Kapitel der *Introductio* basirt, worauf hierbei zu verweisen wäre.

*) Was mir mittels Ihres Briefwechsels bei einigen historischen Untersuchungen gelungen ist.

12. Die Abh. Nr. 81 und 82 würden Sie im zweiten Bande wohl fortzulassen haben.

13. Auf die Abh. XXX wäre bei *Geometrie* zu verweisen, da sie wichtiger für die Transformation der Coordinaten als für die Zahlentheorie ist.

Systematische Liste.

Das Wichtigste was Sie für die Mathematik thun können, wäre möglichst schnell an die 2. Ausgabe der systematischen Liste zn gehen. Die Sache ist so schwer, daß es gar nicht zu hoffen ist, daß selbst diese 2. Ausgabe so vollkommen wird gemacht werden können, daß nicht später einmal noch einmal eine dritte gemacht werden könnte. Aber hierfür würden Sie den Satz der 2. stehen lassen können, während von der 1. Ausgabe nnr wenige Parthien stehen bleiben könnten. Sie ist in der That nur, eine zwar sehr große, aber doch nur eine Vorarbeit zu einer systematischen Liste. Was können einem 5 enggedruckte Seiten *Titel* von Abh. über *Reihen*, 8 desgleichen über *Integralrechnung* helfen. Man erhält danach kein bestimmtes Bild von Eulers Thätigkeit, und es ist fast unmöglich unter einer halben Stunde etwas zn finden. Lassen Sie sich davon nicht abschrecken, daß bei einigen Abh. die Rubrizirung zweifelhaft ist; es kommt hier nur darauf an, zuerst etwas bestimmt hinzustellen, so daß Verbesserungen nur bei Einzelnem zu machen sind. Je mehr Sie gruppiren und Unterabtheilungen bilden, desto wichtiger wird Ihre Arbeit. Der bloße Anblick Ihrer Überschriften muß das Gerippe einer mathematischen Encyklopädie darstellen, so daß man auch bei Arbeiten anderer Mathematiker gleich weiß, wo sie einzufügen sind. Dann wird Ihre systematische Liste für die Geschichte der Mathem. überhanpt von der größten Wichtigkeit sein, und man bei jedem Kapitel derselben gleich die Stelle bestimmen können die Euler darin einnimmt. In dem Index der Arith. habe ich angedeutet, wie ich es mir denke. Dies wurde freilich hier viel leichter, wo man die Abh. znsammengedruckt vor sich hat; aber es hindert ja nichts, der Liste ihre letzte Vollendung nach Beendigung der Herausgabe des größeren Theils der gesammelten Werke zu geben. Bis dahin wird nmgekehrt eine solche 2. Ausgabe, so gut wie Sie sie jetzt machen können, die wichtigste Hilfe für die Herausgeber sein. In die Liste wären wohl auch die Übersetzungen aufzunehmen. Ich weiß nicht ob Ihnen bekannt ist, daß erst neulich von einem der Rechner der Berl. Sternwarte Dr. Wolfers die alte Mechanik übersetzt worden.

Folgen **Varia Euleriana.** Denn, da dieser Brief schon so lang ist, ist kein Grund vorhanden, warnm er nicht noch länger sein soll.

Die 2. Ausgabe der Theoria Motus Corporum Rigidorum.

Sie läugneten mir einmal die Existenz dieser 2. Ausgabe ab[1]). Zur Strafe gebe ich Ihnen für den Fall, daß sie noch nicht in Ihren Besitz gekommen ist, die nähere Beschreibung.

Die Ausgabe führt auf dem Titel den Zusatz *Editio Nova, Desideratissimi Autoris supplementis locupletata et emendata.* Sie ist vom Jahre 1790, von demselben braven Greifswalder Buchhändler Anton Ferdinand Röse veranstaltet wie die erste und mit einer 2 Seiten langen Vorrede begleitet, worin er sagt, daß die wenigen Exemplare, die er abgezogen (E. sagt in einem Briefe an D. B.[2]) er könne ihm kein Exemplar schicken, da er selbst nur ein Paar Freiexemplare erhalten) in 25 Jahren vergriffen seien. Ihr Großvater habe ihm zur Bereicherung der neuen Ausgabe 6 Abh. geschickt. Die 2. ist Zeile für Zeile wie die erste, nur ist das $3^1/_2$ Seiten lange *Supplementum* am Ende der alten Ausgabe an der bezeichneten Stelle am Ende von § 761 eingefügt, aber so gedankenlos, daß die Worte: Verum hic fateri cogor, ulterius me hanc resolutionem prosequi non posse; neque ergo hoc problema ad finem perducere licet nebst der Note Plena solutio in fine adjicietur beibehalten sind, die fortfallen mußten. Vor dem *Supplementum* S. 447 sind als *Additamentum* die Abh. No. 468. 469. 494 eingefügt (von denen die beiden ersten ganz verloren gegangene Formeln für die Transformation dreier rechtwinkliger Coordinaten enthalten, die mit denen von Monge große Ähnlichkeit haben und später von Gergonne in seinen Annalen wiedergefunden sind. Ich habe sie im 2. Bande des Crelleschen J. S. 108 Eulern restituirt, und seitdem ist sehr viel darüber geschrieben; endlos von Grunert in seinem *Wörterbuch*. Auch Ihr Vater hat eine Abh. darüber. So würde man in *Geometrie* unter Transf. d. Coord. auf den 2. Theil der *Introductio*, diese beiden mechan. Abh. und Abh. XXX der *Opp. Ar.* zu verweisen [haben].) Ferner sind am Ende des Werkes die Abh. No. 466. 495. 481 angefügt. In der Vor-

1) Jacobi hatte am 14. Mai 1843 seinem Bruder Moritz geschrieben: „Dirichlet sagt, er besitze *eine zweite Ausgabe* von *Eulers theoria motus corporum rigidorum* (er besitzt auch die erste) von der ich nie gehört und die auch Fuss bei Eulers Werken nicht aufführt. Grüße Fuss, dem Du dies sagen kannst, auf das eifrigste von mir." *Briefw. Jacobi*, p. 97.

2) Mit D. B. ist jedenfalls Daniel Bernoulli gemeint. Aber in dem unveröffentlichten Briefe Eulers an Daniel Bernoulli vom 22. Nov. 1767, dem einzigen aus der Zeit nach dem Erscheinen der *Theoria motus*, der uns noch erhalten ist (Herzogliche Bibliothek zu Gotha, cod. chart. B 689), ist (nach einer Mitteilung von Herrn Prof. Dr. R. Ehwald in Gotha) von diesem Werke nicht die Rede. Die drei anderen bis jetzt aufgefundenen Briefe Eulers an D. B. hat G. Eneström abgedruckt, Bibl. Math. (3) 7 (1906/7), p. 126; dieser vermutet, daß Jacobi die Briefe bei Libri (p. 252) gesehen habe, der Stücke aus dem Nachlaß Daniel Bernoullis besessen hat.

rede von Karsten zur alten Ausgabe ist die Notiz interessant, daß Eulers Integralrechnung schon 1763 zum Druck fertig war (ob das Ganze?), daß er aber keinen Verleger finden konnte; ferner daß E. bei Herausgabe des Werkes die 2. Abh. von d'Alembert im 1. Bande seiner *Opuscules* v. J. 1761 nicht kennt. D'Al. äußert sich sehr giftig irgend wo über Eulers Rivalität in der Theorie der Präcession, der erst anerkennt, daß er durch ein (früheres) Mémoire von d'Al. darauf gekommen, und dann davon immer nur als von seiner Erfindung rede.

Von der Abh. von d'Al. über die schwingenden Saiten, die Euler nicht hat in die Berl. Mem. aufnehmen lassen und damit das Verhältniß zu d'Al. abbrach (nach den Briefen von D. B. erfolgte bei d'Al. Besuch in Berlin eine Versöhnung), habe ich jetzt das Original (das früher von mir gefundene Msc. war eine von Seiten der Ak. gefertigte reinliche Copie) von d'Al. aufgefunden, wo er vieles corrigirt hatte, und zwar nicht bloß im Stil, sondern alle Höflichkeitsbeweise. So hat er immer das *grands* bei Géomètres weggestrichen, wenn von E. und D. B. die Rede war. Es war allerdings etwas impertinent, ein solches Msc. nach Berlin zu schicken, und es mag dies wohl E. mehr geärgert haben, als die Sache selbst. Ich werde Ihnen die Abh. Ihrem Wunsche gemäß gelegentlich schicken.

Von der Bitterkeit zwischen d'Al. und E. zeugen zwei Stellen in den B. M.: Im Bande für **1765** S. 313 sagt E.: M. d'Alembert dira, sans donte, qu'il réfutera ma solution dans quelcun de ses ouvrages qu'il publiera dans la suite, et il se contentera pour le présent d'en avertir le public. Diese Stelle citirt d'Al. Band für **1763** S. 240, indem er an Lagrange schreibt: Je passe sous silence la plaisanterie qu'il (Euler) essaye de me faire pg. 313, parceque l' essentiel n'est pas ici de plaisanter. Vous, Monsieur, qui m'avez quelque fois combattu avec raison (sic!) et sans plaisanter etc. Es scheint uns jetzt unglaublich, wie bornirt und verrannt d'Al. bei der schwingenden Saite war. — Der Band für 1763 ist später als die vier folgenden erst im J. 1770 zugleich mit dem Bande für 1768 erschienen; auch enthält er Abh. die im J. 1769 gelesen sind. Woher die Confusion, läßt sich nirgends finden. Seit Mitte von 1750 hörte der historische Theil auf und im 1. Bande der Nouvelles Mémoires, wo die Geschichte resumiert wird, findet sich darüber keine Notiz.

Die Berliner Ak. hat im J. 1763 in Kleinfolio einen Schulatlas von 41 Karten herausgegeben, wozu Euler eine ziemlich lange Vorrede geschrieben hat, die sich hauptsächlich über die dort befolgte Projectionsart

ausläßt *(Atlas Geographicus etc.)*. Ich habe ihn nicht gesehen, aber eine franz. Übersetzung der Eulerschen Vorrede.

Der Preisschrift v. Clairaut über die Mondtheorie, welche die Petersb. Akad. im J. 1752 herausgab, ist ein Auszug der Eulerschen Concurrenzschrift, welche den Preis nicht erhielt (obgleich sie die Aufgabe ebenfalls löst), beigefügt:

Recensio theoriae Eulerianae motus atque anomaliae Lunae, in Conventu Ac. Sc. Imp. publicatae, die 7 Sept. 1752 biduo post solemnia diei Invict. Russiorum Imper. Elisabethae praelecta a N. Popow, in 4° 22 Seiten.

Journal littéraire de l'Allemagne.

Das Journal ist nicht so verschollen, wie Sie glauben, und jedenfalls anders als unsere heutigen Litteraturzeitungen. Es giebt sehr gute Auszüge der größeren Eulerschen Werke und auch vieler einzelner Abh., die nicht rein mathematisch sind. Es sind unter dem obigen Titel nur 4 Bände erschienen, vor und nachher führte es den Titel: Bibliothèque Germanique ou Histoire littéraire de l'Allemagne de la Suisse et des Pays du Nord. Dies Journal begann 1720, von einer *anonymen Gesellschaft* herausgegeben, die sich bei Lenfant versammelte und brachte es bis zu 50 Theilen. Nach dem Tode von Lenfant im J. 1728 übernahm[en] Herr v. Beausobre, der Vater, und Hr. Mauclerc die Leitung. Im J. 1734 associirte Beausobre sich Formey, der es nach Beausobres Tode 1738 mit Mauclerc allein herausgab. Als die zum 50. Bande gekommen waren, änderten sie den Titel in Journal Littéraire de l'Allemagne, von der 4 Bände erschienen waren, als Mauclerc starb, worauf Formey mit Hr. v. Perard sich associirte, und das Journal unter dem Titel Nouvelle Bibl. G. etc. fortsetzte. Es sind hiervon 25 Bände erschienen; der 26. enthält einen Generalindex. Einzelne Recensionen wie über Eulers Übers. von Robins *Artillerie*, Leupolds *Theatrum machinarum arithmeticarum* enthalten schätzbare eigene litterarische Untersuchungen des gelehrten Formey. Die kleine anonyme Eulersche Abh., die Ihnen Gauss abschrieb, scheint die einzige Originalabh. geblieben zu sein.

Haben Sie die bisher ungedruckte Eulersche Abh. im 35. Bde. S. 106 des Crelleschen J. gesehen?

In der *Geschichte* der B. A. v. J. 1784 pg. 9 wird E. *der neue Tiresias* genannt[1]).

1) In der Festsitzung der Berliner Akademie am 29. Januar 1784 gedachte deren Sekretär S. Formey des im Jahre zuvor gestorbenen ehemaligen Mitgliedes

Im 10. Bande der Berl. Ak. pg. 346 findet sich eine bemerkenswerthe halbe Seite von E.: *Avertissement.*

Ich habe Ihnen schon einmal von einem sehr guten (ich vermute von Formey verfaßten) handschriftlichen Index zu den Berl. Memoiren geschrieben. Er führt den Titel: *Table des Noms des Académiciens et autres auteurs qui ont fourni des Mémoires, des Observations, des Lettres etc. au Recueil des Miscellanea Berolinensia, des Mémoires et des Nouveaux Mémoires, de l'Académie R. d. Sciences et B. L. de Berlin jusqu'en 1786 etc. Avec les Titres ou l'indication du contenu de leurs écrits. De plus, les Noms des Académiciens titulaires, dont les Eloges seulement se trouvent dans ce Recueil. Enfin, les noms des Académiciens qui ont remporté des Prix sur des questions proposées par l'Académie, et les sujets de ces Prix.*

Hierin finde ich den Titel einer Eulerschen Abh., deren Auszug in der *Geschichte* zum 1. Bande S. 36—40 steht, folgendermaßen angegeben, was Ihnen von Interesse sein wird:

Précis de sa méthode de déterminer en rigueur géométrique, sans approximation, la position et l'espèce d'Ellipse, dans laquelle les Planètes se meuvent autour du Soleil: méthode par laquelle et au moyen des observations de Flamsteed il a calculé de nouvelles Tables du Soleil inserées dans le Tome VII des Commentaires de l'Acad. des Sc. de Pétersbourg.

Eine Abh. *Recherches des forces dont les corps sont sollicités entant qu'ils ne sont pas sphériques* ist von Euler Vater d. 23. Nov. 1758, von Euler Sohn d. 7. Nov. 1765 gelesen worden; letztere ist gedruckt, und erwähnt einer früheren Abh. des Vaters gar nicht, wie vom Sohn sonst zu geschehen pflegt. Wahrscheinlich fand E. Vater sie unter seinen Papieren, hatte vergessen, daß er selbst sie schon gelesen und gab sie dem Sohn, der in Verlegenheit war.

Alles in der Welt muß einmal ein Ende haben, und so auch dieser Brief. Sagen Sie meinem Bruder, daß ich seinen Brief erhalten hätte, und ihm dafür danke, und rühmen Sie mich ein bischen gegen ihn.

Wenn etwas von Ihrer Ak. in der Eulerschen Sache beschlossen wird, theilen Sie es mir wohl gefälligst mit, da ich das Bulletin nur sehr unvollständig zu Gesicht bekomme.

Ihr treu ergebener

C. G. J. Jacobi.

Euler mit den Worten: „privé de la lumiere du jour, ce nouveau Tirésias a percé mieux que jamais jusqu'au fond des abymes qu'offre l'immensité de la nature à ceux qui veulent la soumettre aux loix du calcul"; Histoire de l'acad. d. Sc. Berlin, année 1784 (1786), p. 9.

C. G. J. Jacobi an P. H. v. Fuss, Berlin, März-April 1849.

Ich schicke Ihnen, mein hochverehrter Freund, anbei die verlangten Abschriften, welche mehr Mühe, auch mir, gemacht haben, als ich gedacht hatte. Es war nicht möglich zu sehen, ob die Controlle ausreichend sei, als sie aufs neue einer Controlle zu unterwerfen, und es zeigte sich bald, daß es nicht genügte, dies probeweise bei einzelnen Bogen zu thun. Dies war besonders bei der optischen Arbeit überaus beschwerlich, und ich glaube kaum, daß Euler so viel Arbeit beim Verfassen derselben gehabt hat, als dies Abschreiben gekostet hat. Das Controlliren, indem der eine die Abschrift vorliest und der andere das Original vergleicht, war bei den Formeln, in welchen große und kleine, lateinische und deutsche Buchstaben gemischt waren, kaum durchzuführen, und ich mußte zuletzt vom Abschreiber, der einige mathematische Kenntnisse hatte, alles nachrechnen lassen, was sich noch als das leichteste zeigte. Dies ist auch zum größten Theil bei den übrigen Abh. geschehen, und es haben sich hiebei einige Fehler des Originals gezeigt. Den Text habe ich in dieser Beziehung selbst revidirt, und meine Conjecturen, wo der Sinn ausging. darüber geschrieben; wo sie zweifelhaft waren, mit einem ?. Die optische Abh. war noch dazu mit einer kleinen, schon ganz verblaßten Perlschrift geschrieben, welche den Abschreiber bisweilen irre geführt hat. Da es unmöglich war, diese Sache von einem gewöhnlichen Copisten abschreiben zu lassen, so mußte leider die Sachkenntniß durch weniger zierliche Handschrift erkauft werden, wozu kam daß der Copist das Fieber bekam und weil er glaubte, es hatte große Eile, auch in diesem weiter schrieb, wodurch mehrere Bogen eine etwas ungleiche Schrift haben. Doch werden Sie finden, daß alles sehr deutlich ist, was doch eigentlich die Hauptsache ist. Der Copist war des französischen ziemlich kundig, da er von der Colonie ist, aber eben deshalb war es nicht durchzusetzen, daß er die alte Orthographie beibehielte, was ich gern wollte, die übrigens auch im Original sehr wechselt. Auch läßt die Interpunction. wie im Original, sehr viel zu wünschen übrig. Die kleinen lateinischen Buchstaben, mit denen die Größen bezeichnet werden, sind immer im Original unterstrichen; als ich den Copist hiezu anwies, mißverstand er dies, und unterstrich auch die großen und griechischen, was hernach, um es auszumerzen, viele Radirungen nöthig gemacht hat, doch ist wohl noch manches der Art stehen geblieben. Durch die vielen Emendirungen und Controllen ist das Papier etwas aus seiner ursprünglichen Glätte und Weiße gekommen, doch wird das durch die dadurch erreichten Vortheile compensirt. Wo Abweichungen vom Text Seitens des Copisten gemacht sind, wie z. B. daß er immer a^2 für aa geschrieben, habe ich es angemerkt, da das Corrigieren, was ich anfäng-

lich versuchte, zu mühsam wurde. Auch wo die Buchstaben nicht recht deutlich waren, wie bei dem auch im Original schrecklichen deutschen großen Ꝛ, habe ich es angemerkt. Natürlich nicht in jedem einzelnen Fall. Die Bogen, die ich Ihnen bereits geschickt, sind keiner so strengen Controlle meinerseits unterworfen worden, die erst bei der optischen Abh. nöthig wurde, doch möchte ich wissen, ob sich beim Druck Fehler gezeigt haben. Es wurden die Abh.

Déterm. de l'effet	19	Bogen
De Atmosph. Lunae	11	„
Recherches pour servir	32	„ (der Bogen 25 zählt doppelt)
Sur les logarithmes etc.	9	„
Die 2 Abh. die Sie haben	15	„
	86	Bogen.

Die leeren Blätter sind mitgezählt als Compensation für die schwereren Figuren, obgleich diese nicht besonders sind, woran das Original jedoch Schuld ist; bei einer oder zwei muß man wie dort zum Verständniß den Text zu Hülfe nehmen, in welchem Falle jedoch alles klar wird. Wegen der großen Arbeit des wiederholten Controllirens und Nachsehens schien jetzt der Preis von 10 Silbergr. keinesfalls zu fühlen. Ich übersende Ihnen die Quittung über die danach ausgelegten 26 ℔ 20 Sgr. Wenn ich dies Geld bedenke und die Arbeit, die die Abschrift gekostet, so scheint mir jetzt fast besser, ich hätte alles außer den beiden ersten Abh. im Crelleschen Journal abdrucken lassen.

Ich könnte mir Gewissensbisse machen, daß ich bei 20000 halbfertigen Abh., die mir auf dem Halse liegen, mit diesen Allotriis und anderen so manche Zeit hinbringe; ich habe aber einen Trost, der Ihnen zugleich zeigen wird, daß ich es bin, der Ihnen für die Veranlassungen zu dergleichen Dank schuldig ist. Ich habe nämlich, seitdem ich hier bin, alle Jahre mehrere Monate lang an Schwindel gelitten, der sich einstellte, sobald ich einige Zeit hindurch schärfer arbeitete. Dieses letzte Jahr bin ich aber fast ganz frei davon geblieben, und schiebe die Hauptursache auf diese und andere Unterbrechungen, die doch meiner Arbeit immer weniger Abbruch thun als jenes fatale schwindlige Wesen. Einen vortheilhaften Einfluß mag auch die reinere Luft meiner jetzigen Wohnung gehabt haben, und — die politischen Aufregungen.

Berlin, Ihr treu ergebener
d. 20. März 1849. C. G. J. Jacobi.

Beifolgendes mit Gutta-Percha überzogenes Stück Kupferdrath sind Sie wohl so gut meinem Bruder auszuliefern nebst dem Preiscourant.

Zu den Protokollen der Berliner Akademie finde ich:

1770. 29. Nov. M. Bernoulli a lu un Mémoire de M. Léonard Euler intitulé: *Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités* (No. 293).

1771. 19. Oct. M. Bernoulli a lu deux Mémoires de M. Léonard Euler: *I. Théorème analytique universel servant à reconnaître si une formule differentielle quelconque est intégrable ou non?* *II. Construction d'un Télescope sans verres.*

2. April 1849

C. G. J. Jacobi.

Bei späteren etwaigen Zusendungen lassen Sie besser die Worte *zu Händen des* fort; es genügt, wenn an die Akademie adressirt wird und auf dem Buche selbst der Name des Empfängers irgend wie bezeichnet ist. Unsere Post versteht jenes nicht.

Den Avis über die an Sie abgegangene Sendung der Copien werden Sie durch meinen Bruder erhalten haben, und bitte ich nochmals um Nachricht über die Ankunft. Meiner Adresse fügen Sie gefälligst, wenn Sie mich mit einem Schreiben erfreuen, meine Adresse

Bellevuestr. 11. a

bei, weil der Brief sonst an alle Jacobis geht.

Euleriana.

1⁰. E. verweist in seiner *Differentialrechnung* im 11. Cap. des 3. Theils in mehreren §§§ (282. 283. 286) auf eine folgende Section, die niemals erschienen ist. In der Anzeige der DR. (von einem gelehrten Mathematiker, der seinen Namen zu nennen nicht erlaubt hat), welche sich in der von dem Secretär der B. Ak. Formey herausgegebenen Nouvelle Bibliothèque Germanique t. **XII**, S. 269 findet, liest man die hierauf bezügliche Note:

C'est un Ouvrage particulier dans lequel l'Auteur donne l'application du Calcul Infinitésimal à la Géométrie, mais qui n'est point encore paru.

Findet sich hiervon etwas in den E.schen Msc.?[1]) Formey war E.'s nächster Freund.

2⁰. Zum ballistischen Problem gehört außer der Hauptabh. noch die *Sur la route des boulets.* Es wäre vielleicht bei einer neuen Ausgabe der systematischen Liste zweckmäßig, alle Abh. über die Bewegung *in einem widerstehenden Mittel* zusammenzustellen, in welchen E. die verschiedenen Widerstandsgesetze discutirt. Dazu möchten dann auch die Abhh. *über die Windmühlen* kommen.

1) Fuss hat das unvollendete Manuskript dieser Section in Eulers Nachlass gefunden; s. *Comm. ar.*, t. 1, p. XI sub 8.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1^3 : 12, 15, 22, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 61.

1^3 : 33. Die *Vita* PYTHAGORAE des PORPHYRIUS, die nach der Ausgabe von TH. KIESSLING aus dem Jahre 1816 (siehe meine Bemerkungen zu **1^3** : 459) zitiert wird, liegt in neuer Ausgabe vor, nämlich in *PORPHYRII philosophi platonici opuscula selecta* iterum recognovit AUGUSTUS NAUCK, Leipzig 1886 [Bibliotheca Teubneriana]. Sie reicht dort von S. 17 bis S. 52.

FERDINAND RUDIO.

1^3 : 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 61—64. — **1^3 : 163—165,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1^3 : 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 64—65.

1^3 : 202. In dem Kapitel über HIPPOKRATES ist zwar in der dritten Auflage die neuere und neueste Literatur auf das sorgfältigste verwertet worden, so daß die Darstellung jetzt dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft durchaus entspricht, immerhin aber sind noch zwei verbesserungsbedürftige Stellen übrig geblieben. Die eine, auf BRYSON bezügliche, habe ich kürzlich (BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 378) behandelt, heute wende ich mich zu dem Satze: „Es wird sogar erzählt, er [HIPPOKRATES] habe es sehr bald dahin gebracht, selbst Unterricht in der Mathematik erteilen zu können, und habe dafür Bezahlung angenommen. Von da an hätten die Pythagoreer ihn gemieden." Als Beleg hierfür ist angegeben JAMBLICHUS, *De philosoph. PYTHAGOR.* lib. III, bei ANSSE DE VILLOISON, *Anecdota Graeca*, pag. 216 (sollte besser heißen: Tom. II, pag. 216). Der zitierte Satz mitsamt dem Hinweis auf JAMBLICHUS ist offenbar aus BRETSCHNEIDERS bekanntem Buche *Die Geometrie und die Geometer vor EUKLIDES* (p. 93; dort heißt es sogar, HIPPOKRATES sei „ausgestoßen worden") herübergenommen worden. Man kann aber kaum annehmen, daß BRETSCHNEIDER die von ihm als Beleg herangezogene Stelle jemals wirklich selbst gelesen habe. Zunächst lautet nämlich der eigentliche Titel des zitierten Buches (auch bei VILLOISON): *περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης (de communi mathematica scientia)*, und zwar ist dieses Buch das dritte (*λόγος γ*) der großen Enzyklopädie *περὶ τῆς Πυθαγορικῆς αἱρέσεως* des JAMBLICHUS (siehe meine Bemerkungen zu

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

1^3 : 459). Das erste Buch (*λόγος α*) dieser Enzyklopädie hat den Titel: *περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου (de vita Pythagorica)*. Während dieses erste Buch von A. Nauck (Petersburg 1884) neu herausgegeben worden ist, ist jenes dritte von N. Festa (Leipzig 1891) neu ediert worden. Das Buch wäre daher auch zweckmäßiger nach dieser neuen, der Bibliotheca Teubneriana angehörenden Ausgabe zu zitieren, als nach der alten, schwer zugänglichen Ausgabe von Villoison (Venedig 1781; dort füllt es die S. 188—225 des zweiten Bandes). Obwohl sich nun die Ausgaben von Villoison und Festa auf zwei verschiedene Codices stützen, so hat doch jene Stelle, die von Bretschneider als Beleg für Hippokrates herangezogen worden ist, in beiden Ausgaben (von zwei unbedeutenden Abweichungen und den belanglosen Unterschieden in der Interpunktion abgesehen) genau denselben Wortlaut, nämlich:

„*περὶ δ' Ἱππάσου λέγουσιν, ὡς ἦν μὲν τῶν Πυθαγορείων, διὰ δὲ τὸ ἐξενεγκεῖν καὶ γράψασθαι πρῶτος σφαῖραν τὴν ἐκ τῶν δώδεκα ἑξαγώνων*[1]) *ἀπόλοιτο κατὰ θάλατταν ὡς ἀσεβήσας, δόξαν δὲ λάβοι ὡς ⟨εὑρών,⟩*[2]) *εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός· προσαγορεύουσι γὰρ οὕτω τὸν Πυθαγόραν καὶ οὐ καλοῦσιν ὀνόματι. ἐπέδωκε δὲ τὰ μαθήματα, ἐπεὶ ἐξηνέχθησαν*[3]) *⟨κατὰ πᾶσαν τὴν Ἑλλάδα, καὶ πρῶτοι τῶν τότε μαθηματικῶν ἐνομίσθησαν⟩*[4]) *δισσοὶ προάγοντε μάλιστα, Θεόδωρός τε ὁ Κυρηναῖος καὶ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. λέγουσι δὲ οἱ Πυθαγόρειοι ἐξενηνέχθαι γεωμετρίαν οὕτως. ἀποβαλεῖν τινα τὴν οὐσίαν τῶν Πυθαγορείων, ὡς δὲ τοῦτ' ἠτύχησε, δοθῆναι αὐτῷ χρηματίσασθαι ἀπὸ γεωμετρίας.*“

„Von Hippasus wird erzählt, er sei zwar Pythagoreer gewesen, weil er aber unter die Leute gebracht habe, er habe auch zuerst die Kugel aus den zwölf Fünfecken [siehe Anm. 1] beschrieben, sei er als Gottloser auf dem Meere umgekommen, denn er habe sich Ruhm erworben als Erfinder, während doch alles „Jenem, dem Meister“ gehöre. Denn so nennen sie den Pythagoras und nennen ihn nicht mit dem Namen. Die mathematischen Wissenschaften aber machten Fortschritte, nachdem sie sich über ganz Griechenland ausgebreitet hatten, und als die ersten der damaligen Mathematiker galten die zwei, die besonders fördernd wirkten, Theodorus der Kyrenäer und Hippokrates der Chier. Die Pythagoreer aber sagen, daß die Geometrie auf folgende Weise in die Öffentlichkeit gebracht worden sei: Einer der Pythagoreer habe sein Vermögen verloren, und nach diesem Mißgeschicke sei ihm gestattet worden, aus der Geometrie einen Erwerb zu machen.“

Wie diese Erzählung als Beleg dafür angesprochen werden kann, daß Hippokrates Unterricht gegen Bezahlung erteilt habe und deshalb von den Pythagoreern gemieden worden sei, ist ganz unverständlich. Ob man dabei den Zusatz von Diels weglassen oder beibehalten will, spielt natürlich gar keine Rolle. Dazu kommt übrigens noch, daß wahrscheinlich der ganze Satz *ἐπέδωκε* ... *ὁ Χῖος* (vielleicht auch nur die Wortfolge *δισσοὶ* ... *ὁ Χῖος*) ein fremdes

---

1) So bei Villoison und Festa. Es muß natürlich *πενταγώνων* heißen.

2) ⟨*εὑρών,*⟩ ist Zusatz von Festa, bei Villoison heißt es *ὡς εἶναι δὲ πάντα* ...

3) Die unrichtige Wortform *ἐξενηνέχθησαν* bei Villoison ist Schreib- oder Druckfehler.

4) Die Parenthese ⟨*κατὰ* ... *ἐνομίσθησαν*⟩ ist von Diels (*Die Fragmente der Vorsokratiker* 1^2, p. 30) hinzugefügt worden, da der überlieferte, von Villoison und Festa wiedergegebene Text offenbar unvollständig ist. Sollte übrigens Bretschneider am Ende durch *ἐξηνέχθησαν* zu seiner Übersetzung „ausgestoßen“ verleitet worden sein?

Einschiebsel ist, das von einer Randbemerkung her in den Text geraten ist. Dafür spricht nicht nur der Umstand, daß der Satz entschieden unvollständig ist und überhaupt gar nicht hierher gehört, dafür spricht auch noch folgendes. Von unwesentlichen Abweichungen abgesehen, findet sich diese ganze Erzählung *περὶ δ' Ἱππάσου . . . χρηματίσασθαι ἀπὸ γεωμετρίας* auch in dem schon genannten, von Nauck herausgegebenen ersten Buche (*λόγος α*) der großen Jamblichusschen Encyklopädie. Dort (*Vita Pyth.* ed. A. Nauck, p. 66) heißt es auch richtig *πενταγώνων* [siehe Anm. 1], ferner *ὡς εὑρών* [siehe Anm. 2] und dort fehlt der ganze Satz *ἐπέδωκε . . . ὁ Χῖος*, der ja in der Tat auch ganz überflüssig ist. Ist aber dieser Satz im dritten Buche ein fremdes Einschiebsel, so würde in der als Beleg herangezogenen Stelle der Name Hippokrates überhaupt gar nicht einmal vorkommen.

Ferdinand Rudio.

1^3 : 203. Neben den Berichten des Simplicius und des Themistius über die Quadraturen des Antiphon sollte auch als dritter der des Philoponus (in der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts) erwähnt werden. Er findet sich in dem Kommentare, den Philoponus zur *Physik* des Aristoteles geschrieben hat (*Philop. in phys.* ed. H. Vitelli 31, 9—32, 3), und er ist auch in dem ersten Hefte der Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume (Leipzig 1907, p. 106—109) mit deutscher Übersetzung abgedruckt.

Ferdinand Rudio.

1^3**: 203, 213, 225, 236, 245, 270, 287, 297, 298, 310,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 65—66. — **1**^{3}**: 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 174—176. — **1**^{3}**: 351,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66. — **1**^{3}**: 365, 368,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 177. — **1**^{3} **: 380,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66—67. — **1**^{3} **: 388, 406, 409, 410,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 177—178. — **1**^{3}**: 429, 431,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67. — **1**^{3}**: 432,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1**^{3}**: 433, 452,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 179.

1^3 : 459. Die Mitteilungen über das angeblich aus zehn Büchern bestehende Werk des Jamblichus über Pythagoras sind zwar der *Philosophie der Griechen* von E. Zeller entnommen, sie sind aber trotzdem zu modifizieren, da sie mit den maßgebenden Überlieferungen nicht übereinstimmen. Die folgenden Angaben stützen sich zugleich auf Mitteilungen, die ich Herrn Prof. Diels verdanke, und die zum Teil auch schon im ersten Hefte der Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume (Leipzig 1907, p. 97) verwertet sind.

Bei der Aufzählung der Schriften des Jamblichus beruft sich Zeller namentlich auf Syrianus, den Lehrer des Proklus. Indem aber Syrianus in seinen Scholien zu Aristoteles das Werk des Jamblichus *συναγωγὴ τῶν πυθαγορείων δογμάτων* nennt, gibt er keineswegs damit den eigentlichen Titel, sondern nur den Sinn des Buches wieder, wie es denn überhaupt die Alten bei Titeln gewöhnlich nicht so genau genommen haben. Maßgebend für den Titel des ganzen Werkes und für die Titel der einzelnen Bücher, in die es zerfiel, ist der Florentiner Archetypus aus dem 14. Jahrhundert, den A. Nauck seiner Ausgabe der *Vita Pythagorica* zugrunde gelegt hat. Obwohl nämlich von den neun (nicht zehn) Büchern der großen Enzyklopädie des Jamblichus fünf verloren sind, so hat sich doch der Index des Ganzen in der genannten Florentiner Handschrift erhalten, nämlich (siehe *Vita Pyth.* ed. Nauck p. XXXIV, oder auch p. 97 der Urkunden):

Οἱ ἐννέα λόγοι Ἰαμβλίχου περὶ τῆς Πυθαγορικῆς αἱρέσεως.

α *Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου.*
β *Προτρεπτικὸς ἐπὶ φιλοσοφίαν.*
γ *Περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.*
δ *Περὶ τῆς Νικομάχου ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς.*
ε *Περὶ τῆς ἐν φυσικοῖς ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης.*
ς *Περὶ τῆς ἐν ἠθικοῖς ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης.*
ζ *Περὶ τῆς ἐν θεοῖς ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης.*
η *Περὶ γεωμετρίας τῆς παρὰ Πυθαγορείοις.*
ϑ *Περὶ μουσικῆς τῆς παρὰ Πυθαγορείοις.*

Der Titel der JAMBLICHUSschen Enzyklopädie heißt also nicht *συναγωγὴ τῶν πυθαγορείων δογμάτων*, sondern *περὶ τῆς Πυθαγορικῆς αἱρέσεως* (über die pythagoreische Sekte). Von den neun Büchern sind nur die vier ersten erhalten, die anderen fünf verloren. Auszüge freilich aus dem siebenten (ζ), aber nicht das vollständige Buch, stehen in den *Theologumena*, die FR. AST 1817 herausgegeben hat.

Was nun die vier ersten Bücher anbetrifft, die auf uns gekommen sind, so liegen diese alle in neuen Ausgaben vor. Und nach diesen sollte daher allemal zitiert werden, nicht nach den veralteten Ausgaben. Das erste Buch, die *Vita PYTHAGORICA* (nach dem Florentiner Archetypus als *λόγος α* bezeichnet) ist von A. NAUCK (Petersburg 1884) herausgegeben worden, während die auf dem Codex Cizensis beruhende Ausgabe von TH. KIESSLING, die CANTOR allein zitiert — sie gibt freilich auch noch eine lateinische Übersetzung —, aus dem Jahre 1815[1]) stammt. Das zweite Buch, der *Protrepticus*, ist als *λόγος β* im Titel überliefert. Auch von diesem zitiert CANTOR nur die Ausgabe von KIESSLING aus dem Jahre 1813, obwohl wir jetzt seit 1888 in der Bibliotheca Teubneriana die neue Ausgabe von H. PISTELLI besitzen, die sich ebenfalls auf den Florentiner Archetypus stützt. Das dritte Buch, das gewöhnlich als *De communi mathematica scientia* zitiert wird, ist zum erstenmal von VILLOISON im zweiten, *Diatriba* betitelten Bande seiner *Anecdota Graeca* (1781) herausgegeben worden (siehe meine Bemerkungen zu **1**³ : 202). Auf Grund der Florentiner Handschrift hat aber N. FESTA 1891 eine neue, ebenfalls in der Bibliotheca Teubneriana erschienene Ausgabe veranstaltet. Dieses Buch, in der Florentiner Handschrift als *λόγος γ* der JAMBLICHUSschen Enzyklopädie bezeichnet, wird bei CANTOR S. 155 so zitiert, daß der Leser glauben muß, es handle sich bei VILLOISON und FESTA (Anm. 2 ist zu *De communi mathematica* hinzuzufügen: *scientia*) um ganz verschiedene Schriften des JAMBLICHUS. Überdies fehlt der Name VILLOISON im Register. Das vierte Buch endlich, 1668 von TENNULIUS herausgegeben, ist 1894 von H. PISTELLI, wiederum auf Grund des Florentiner Archetypus, neu ediert worden. Auch diese Ausgabe findet sich in der Bibliotheca Teubneriana. Es ist daher ganz überflüssig, wenn bei CANTOR neben der Ausgabe von PISTELLI allemal auch noch die alte, schwer zugängliche und überdies weniger gute von TENNULIUS zitiert wird.

Die Schriften des JAMBLICHUS werden bei CANTOR sehr häufig zitiert. Von S. 51 an bis zu S. 739 sind es 27 Seiten, auf denen sich Hinweise auf JAMBLICHUS finden. Alle diese Hinweise sind auf Grund der hier gegebenen Darlegungen sorgfältig durchzukorrigieren.

FERDINAND RUDIO.

1) Der zweite Band dieser Ausgabe enthält die *Vita PYTHAGORAE* des PORPHYRIUS. Er ist 1816 erschienen.

1^3:464, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 179.

1^3 : 470. Wenn Herr Cantor zuerst bemerkt, daß die Terme *δύναμις* und *κύβος* vor Diofantos benutzt wurden und dann hinzufügt: „Diophant geht darüber hinaus und nennt Quadratoquadrat (*δυναμοδύναμις*)“, so ist dies buchstäblich richtig, aber dennoch leicht irreleitend, denn man weiß jetzt, daß der Term *δυναμοδύναμις* schon bei Heron vorkommt (*Metrika*, S. 48 der Ausgabe von H. Schöne).

G. Eneström.

1^3:488, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67. — **1^3:498**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 180. — **1^3:500, 502**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67. — **1^3:503—504**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 180—181. — **1^3:509, 510, 513, 515, 528, 545, 563—564**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67—69. — **1^3:576**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 69—70, 181. — **1^3:580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 70. — **1^3:706**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 70, 181. — **1^3:713**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 70. — **1^3:715—716**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1^3:717**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1^3:718**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 71. — **1^3:719**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 183—184. — **1^3:720**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 71. — **1^3:730**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1^3:734**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 71. — **1^3:736—737**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1^3:738, 743, 748, 750**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 72. — **1^3:764, 770**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 185. — **1^3:780, 781, 794, 800**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 72—73. — **1^3:801**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 185—186. — **1^3:802**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 73, 186—187. — **1^3:805—806, 815, 855, 857, 859, 862, 863**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 73—74. — **1^3:867**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 74, 187. — **1^3:869, 875—876, 877, 878, 882, 889, 893**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 74—78. — **1^3:900**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1^3:902**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 78—79. — **1^3:906**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 79, 188—189. — **1^3:908, 909, 910, 911**, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 79—80.

Über Bemerkungen zu den Bänden **2** und **3** der „Vorlesungen“ siehe S. 189—215.

Anfragen.

135. Über eine alte Scherzfrage, die der Lösung einer unbestimmten Gleichung ersten Grades entspricht. In seiner Diofantos-Ausgabe (Paris 1621, S. 263) hat Bachet das folgende „vetus epigramma“ zum Abdruck gebracht:

Vt tot emantur aues, his denis vtere nummis
Perdix, Anser, Anas empta vocetur auis.
Sit simplex obolus pretium Perdicis, ematur.
Sex obolis Anser, bisque duobus Anas.
Vt tua procedat in lucem quaestio, mentem
Consule, sic loquitur pectoris arca mihi.
Sint Anates tres atque duae, simplex erit Anser.
Accipe perdices quatuor atque decem.

Diese Frage führt offenbar zu den Gleichungen $x + y + z = 20$, $\frac{1}{2}x + 3y + 2z = 20$, und als Lösung wird $x = 14$, $y = 1$, $z = 5$ angegeben. Das Epigramm hat Bachet nach seiner eigenen Aussage aus „Pithoeum“ lib. 4 entnommen, was wohl die *Opera sacra, juridica, historica et miscellanea* (Paris 1609) von P. Pithou bedeutet.

Es wäre von Interesse zu wissen, ob die Scherzfrage älter als der *Liber abbaci* des Leonardo Pisano ist, denn vor Leonardo ist bisher im christlichen Abendlande nur eine Frage dieser Art nachgewiesen worden, nämlich die 34. Aufgabe der *Propositiones ad acuendos juvenes*. G. Eneström.

Rezensionen.

W. W. R. Ball. Histoire des mathématiques. Edition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par **L. Freund.** Tome 1—2. Paris, Hermann 1906—1907. 8°, VII + 422 S.; (5) + 271 S. Francs 20.

Über die Verdienste und die Fehler des *Account of the history of mathematics* von Ball habe ich mehr als einmal Gelegenheit gehabt, mich in dieser Zeitschrift zu äußern (vgl. z. B. Biblioth. Mathem. $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 244—248; $\mathbf{5}_3$, 1904, S 313—316). In betreff des ersten Bandes der jetzt vorliegenden französischen Übersetzung kann man das allgemeine Urteil fällen, daß er kaum größere Verdienste und ganz gewiß nicht geringere Fehler als der entsprechende Teil des Originals hat. Freilich wird auf dem Titelblatte angegeben, daß die Ausgabe revidiert ist, und in Wirklichkeit sind ausnahmsweise einige der zahlreichen Ungenauigkeiten und Unrichtigkeiten des Originals verbessert, aber auf der anderen Seite sind viele Angaben, die 1901 (das Erscheinungsjahr der 3. Auflage) als richtig betrachtet werden konnten, jetzt auf Grund der neuesten Forschungen als ungenau oder unrichtig zu bezeichnen. In diesem Sinne kann man also sagen, daß die Zahl der Fehler des ersten Bandes der französischen Ausgabe größer als die des entsprechenden Teiles des Originals ist.

Da diese Ausgabe selbstverständlich in erster Linie für französische Leser bestimmt ist, so könnte man erwartet haben, daß der Übersetzer versucht hätte, eine genauere Revision der Ballschen Angaben in betreff der französischen Mathematiker vorzunehmen, aber von einem solchen Versuche habe ich im ersten Bande keine Spur entdecken können. Als Beleg mache ich hier auf einige unrichtige Angaben aufmerksam, die unverändert übersetzt worden sind, obgleich es sehr leicht gewesen wäre, dieselben zu verbessern.

S. 187. „L'ouvrage sur lequel est principalement fondée sa réputation [es handelt sich um Oresme] traite de questions sur les monnaies et sur le change commercial. Au point de vue mathématique, il est à citer à cause de l'emploi des fractions ordinaires et de l'introduction de symboles pour les représenter.“ Die Unrichtigkeit dieser Behauptungen (liegt vielleicht eine Verwechselung mit Leonardo Pisano vor?) geht schon daraus hervor, daß keine zuverlässige mathematisch-historische Arbeit (vgl. z. B. die von Ball selbst zitierte Abhandlung von Curtze) Oresme als Verfasser einer Schrift über kaufmännische Arithmetik nennt, und daß im christlichen Abendlande gewöhnliche Brüche, sowie die jetzt geläufige Bezeichnung derselben, schon etwa ein paar Jahrhunderte vor Oresme benutzt worden sind.

S. 240. „Des exemples occasionnels d'une notation, se rapprochant de la notation avec indices, telles que A^q, se rencontrent, dit-on, dans les œnvres de VIÈTE.“ Über VIÈTES Bezeichnung von Potenzen finden sich genaue Angaben in ZEUTHENS *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (Leipzig 1903, S. 98) und VIÈTE hat nie Exponenten benutzt.

S. 242. Daß der hier Z. 2 angegebene Ausdruck für $\frac{2}{\pi}$ auf Druckfehlern bei VIÈTE beruht, ist schon längst allgemein bekannt (vgl. ZEUTHEN, a. a. O. S. 121).

S. 276. Daß hier die von P. TANNERY und CHR. ADAM besorgte neue Ausgabe von DESCARTES' Werken *nicht* genannt wird, betrachte ich als einen offenbaren Fehler.

S. 280. „Le troisième [livre de la *Géométrie* de DESCARTES] comprend une analyse de l'algèbre telle qu'elle existait à l'époque.“ Diese Angabe, die S. 282 wiederholt wird, ist zum mindesten höchst ungenau. Sie kann wohl kaum anderes bedeuten, als daß DESCARTES wesentlich die früheren Errungenschaften auf dem Gebiete der Algebra zusammenfaßte, aber von einer solchen Zusammenfassung findet sich bei DESCARTES fast gar nichts.

S. 282. „Une traduction latine [de la *Géométrie* de DESCARTES] avec des notes explicatives fut préparée par F. DE BEAUNE et une édition avec un commentaire par F. VAN SCHOOTEN, publiée en 1659 eut un grand succès.“ F. DE BEAUNE hat nie eine lateinische Ausgabe vorbereitet, und die lateinische Sprache scheint ihm wenig geläufig gewesen zu sein. Was er französisch schrieb, wurde teils von F. VAN SCHOOTEN, teils von E. BARTHOLIN ins Lateinische übersetzt. Die Ausgabe von F. VAN SCHOOTEN erschien bekanntlich zum erstenmal 1649, und darin finden sich F. DE BEAUNES „In geometriam RENATI DES CARTES notae breves“.

S. 283. „Il [DESCARTES] pensait avoir donné une méthode permettant de résoudre les équations algébriques de degré quelconque, mais il y a là une erreur de sa part.“ Daß eine Gleichung beliebigen Grades algebraisch lösbar sei, hat DESCARTES im dritten Buche seiner *Géométrie* nicht behauptet, und über die geometrische Lösung sagt er nur ganz im Vorübergehen, daß sie vermittels eines Kreises und einer Kurve höheren Grades ausgeführt werden kann; die letztere Kurve deutet DESCARTES freilich nur sehr unvollständig an („il ne faut que suivre la même voie pour construire tous ceux [d. h. die Gleichungen] qui sont plus composés à l'infini“). Wie ist es möglich, diese gelegentliche Bemerkung ohne weiteres als fehlerhaft zu bezeichnen?

S. 303. Der hier erwähnte undatierte Brief von FERMAT ist im August 1659 an CARCAVY geschrieben (siehe *Oeuvres de FERMAT*, éd. TANNERY et HENRY II, Paris 1894, S. 431), ein Umstand, der offenbar BALL unbekannt gewesen ist. Daß FERMAT, der sich schon 1636 mit den Gleichungen $x^3 + y^3 = z^3$ und $x^4 + y^4 = z^4$ beschäftigt hatte (siehe a. a. O. S. 65), den Beweis der Unmöglichkeit der letzteren Gleichung, wie BALL annimmt, erst nach der Abfassung des Briefes gefunden hat, ist geradezu unglaublich (vgl. P. TANNERY, *Sur la date des principales découvertes de FERMAT;* Bullet. d. sc. mathém. 7_2, 1883, S. 123).

Auf dem Titelblatt des ersten Bandes wird angegeben, daß die französische Ausgabe nicht nur durchgesehen, sondern auch vermehrt ist. Die letzte Angabe bezieht sich wahrscheinlich nicht auf die vom Übersetzer selbst her-

rührenden unbedeutenden Zusätze, sondern auf den Anhang, der nach gedruckten Quellen folgende „Notes“ bringt:

1. S.(!) VIÈTE considéré comme géomètre d'après MICHEL CHASLES (17 Zeilen).
2. Analyse des ouvrages originaux de NAPIER relatifs à l'invention des logarithmes. Par M. BIOT (S. 328—353).
3. Sur KEPLER. Par J. BERTRAND (S. 354—358).
4. Développement des principes de la dynamiques. Travaux de GALILÉE et HUYGHENS. Par E. MACH (S. 359—409).
5. Sur les origines de la statique. Par P. DUHEM (S. 410—412).

Der zweite Band der französischen Ausgabe von BALLS Geschichte der Mathematik entspricht den vier letzten Kapiteln des Originals, und in diesen Kapiteln sind die wirklichen Unrichtigkeiten weniger hervortretend, so daß man leichter von einer eingehenden Revision der Angaben absehen konnte. Dagegen ist bei BALL die Darstellung teilweise sehr lückenhaft, teilweise ziemlich oberflächlich; um die französische Ausgabe in diesen Hinsichten zu verbessern, hat Herr R. DE MONTESSUS den Text an vielen Stellen ergänzt, teils durch kleine Bemerkungen, die in den ursprünglichen Text eingefügt sind, teils durch besondere Notizen über Mathematiker, die BALL übergangen hat, teils durch ausführlichere Aufschlüsse über die Entwickelung der verschiedenen mathematischen Theorien im 19. Jahrhundert.

Die kleinen Bemerkungen werden ohne Zweifel den Lesern willkommen sein, und es ist nur schade, daß Herr DE MONTESSUS nicht gleichzeitig gewisse Stellen der Übersetzung verbessert hat, die einem Mathematiker sofort auffallen müssen. Beispielsweise erwähne ich den Passus S. 56: „Il [d. h. das Buch *Analyse des infiniment petits* von HÔPITAL] renferme une étude partielle (!?) de la valeur limite du rapport de deux fonctions qui, pour une certaine valeur de la variable, prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, problème résolu (?) par JEAN BERNOULLI en 1704“. Wer kann aus diesen Worten erraten, was dem Marquis, was JOHANN BERNOULLI zugewiesen werden soll? In Wirklichkeit ist es JOHANN BERNOULLI, der das fragliche Problem allein gelöst hat. Zuerst fand er als Wert von $/^{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $f(a)=\varphi(a)=0$ den Ausdruck $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ und teilte sein Verfahren brieflich dem Marquis mit; dieser veröffentlichte dann das Verfahren 1696 in der *Analyse des infiniment petits* (sect. IX, prop. I). Später bemerkte JOHANN BERNOULLI, daß es Fälle gibt, in denen der gefundene Ausdruck selbst unbestimmt ist, nämlich wenn $f'(a)=\varphi'(a)=0$, und ergänzte seine Lösung (1704), indem er darauf hinwies, daß man durch fortgesetzte Differentiation von $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ zuletzt den gesuchten Wert erhält. Statt „étude partielle de“ sollte also „le procédé permettant de trouver, dans le cas ordinaire“ oder etwas Ähnliches gesetzt werden.

Die Mathematikernotizen, die Herr DE MONTESSUS hinzugefügt hat, sind ebenfalls angebracht und passen im allgemeinen ziemlich gut in den Rahmen der BALLschen Darstellung. Anders liegt dagegen die Sache in betreff der oben erwähnten Aufschlüsse über die Entwickelung der mathematischen Theorien, denn durch diese wird die ursprüngliche Darstellung oft geradezu entstellt. BALL behandelt nämlich die Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert so, daß er zuerst einige kurze Notizen über die Entwickelung einer gewissen

Theorie gibt und dann ausführlicher die Arbeiten der hervorragenden Mathematiker erwähnt, die sich seines Erachtens in erster Linie mit dieser Theorie beschäftigt haben. Beispielsweise nennt er unter „Höherer Algebra" CAUCHY, ARGAND, HAMILTON, GRASSMANN, BOOLE, GALOIS, DE MORGAN, CAYLEY, SYLVESTER, LIE. Nun hat Herr DE MONTESSUS S. 165—171 unmittelbar nach den Notizen über CAUCHY einen Abschnitt eingefügt über die Untersuchungen, die durch CAUCHY angeregt worden sind, und folglich erscheinen die fraglichen Untersuchungen als zur Höheren Algebra gehörend, obgleich sie sich zum größten Teil auf ganz andere Sachen, z. B. die Theorie der Differentialgleichungen beziehen. Übrigens ist es klar, daß es im 19. Jahrhundert wichtige Untersuchungen gegeben hat, von denen es unmöglich ist zu entscheiden, ob sie wesentlich durch CAUCHY oder durch andere Mathematiker angeregt worden sind, so daß die von Herrn DE MONTESSUS gewählte Anordnung oft durchaus willkürlich ist.

Obgleich also die Aufschlüsse des Herrn DE MONTESSUS an sich sehr interessant sind, ist ihr Vorkommen in der französischen Ausgabe von BALLS Arbeit kaum geeignet, den Lesern eine bessere Übersicht als die des Originals in betreff der Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert zu geben. Wollte man dagegen die französische Ausgabe wesentlich als ein Nachschlagebuch betrachten, so konnte der jetzt hervorgehobene Umstand vielleicht von untergeordneter Bedeutung sein, wenn man ein gutes Namen- und Sachregister zur Verfügung hätte, aber leider fehlt der französischen Ausgabe gänzlich ein solches Register.

Wie aus den vorangehenden Ausführungen erhellt, sind die zwei Bände, worüber jetzt berichtet worden ist, meines Erachtens so verschiedenartig, daß man sie eigentlich als zwei Arbeiten betrachten sollte. Der erste Band kann möglicherweise wegen seiner stilistischen Verdienste von Liebhabern der Mathematik mit Vergnügen gelesen werden, aber wer zuverlässige und sachkundige Auskunft über die Geschichte der Mathematik wünscht, soll andere Arbeiten studieren. Der zweite Band dagegen enthält viele Aufschlüsse, die auch für den Fachmann wertvoll sind, und kann also aus diesem Grunde empfohlen werden, aber die Abteilung, die die interessantesten Aufschlüsse bringt, ist eigentlich eine ohne wirkliche Planmäßigkeit zusammengestellte Sammlung von Notizen über Mathematiker und mathematische Untersuchungen im 19. Jahrhundert.

Am Ende des zweiten Bandes (S. 233—261) ist G. DARBOUX' bekannte *Étude sur le développement des méthodes géométriques* abgedruckt.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
24 : 1 (1907).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
8_3 (1908) : 1.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
1907 : 2.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [4
36 (1905) : 2.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik = 1^3 (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 176—189. (Th. Häbler, G. Eneström, H. Suter.) = 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 189—213. (G. Eneström.) = 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 214—215. (G. Eneström.) [5

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von M. Cantor (1907). [Rezension des 1. Heftes:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 409—412. (A. von Braunmühl.) [6

Ball, W. W. R., Histoire des mathématiques. Edition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome deuxième. Avec additions de R. de Montessus. Paris, Hermann 1907. [7
8°, (5) + 271 S. — [8 fr.] — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 667—269. (J. T.)

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al Medio evo (1907). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 171. (J. T.) — Nuovi doveri (Palermo) 1, 1907, 121—126. (C. A. Nallino.) [8

Aubry, A., L'arithmétique avant Fermat. [9
L'enseignement mathém. 9, 1907, 417—433.

Bonola, R., La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 615—622. (P. M.) [10

Duhem, P., Les origines de la statique (1905—1906). [Rezension:] *Porto*, Acad. polytechn., Annaes 2, 1907, 187. (G. T.) [11

***Enriques, F.**, Problemi della scienza. Bologna, Zanichelli 1906. [12
8°, IV + 593 S. — [10 lire.] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907, 32—37. (A. Garbasso.)

Miller, G. A., Mathematical prodigies. [13
Science 26_2, 1907, 628—630.

b) **Geschichte des Altertums.**

***Kugler, F. X.,** Sternkunde und Sterndienst in Babel. Assyriologische, astronomische und astralmythologische Untersuchungen. I. Entwickelung der babylonischen Planetenkunde von ihren Anfängen bis auf Christus. Münster, Aschendorff 1907. [14
8°, XV + 292 S. — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 505—507. (A. Berberich.)

Simon, M., Zur altägyptischen Bruchrechnung. [15
Arch. der Mathem. 12₃, 1907, 377.

Gilbert, O., Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums. Leipzig, Teubner 1907. [16
8°, V + 746 S. — [20 M.]

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch. Leipzig, Teubner 1907. [17
8°, XI + (1) + 184 S. — [4.80 M.] — Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume, Heft 1.

***Albert, G.,** Die platonische Zahl als Präzessionszahl und ihre Konstruktion. Wien, Deuticke 1907. [18
8°. — [1 M.]

Albert, G., Der Sinn der platonischen Zahl. [19
Philologus 66, 1907, 153—156.

***Frankland, W. B.,** The first book of Euclids Elements with a commentary based principally upon that of Proclus Diadochus Cambridge, University press 1905. [20
8°, XVI + 139 S.

Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes (1907). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31₂, 1907, 242—249. (J. T.) — Mathesis 7₃, 1907, 245—246. [21

Reinach, Th., Archimède. Des théorèmes mécaniques ou de la méthode (éphodiques). Traité nouvellement déconvert et publié par M. Heiberg. Traduit en français pour la première fois, complété et annoté. Introduction par P. Painlevé. [22
Revue génér. d. sc. 1907. Sonderabdruck 91 S. 8°.

Rudio, F., Sur l'histoire des conchoïdes. [23
Mathesis 7₃, 1907, 261—262.

Manitius, K., Hipparchs Theorie des Mondes nach Ptolemaeus. [24
Das Weltall 8, 1907, 1—9, 26—30, 45—54.

Meier, R., De Heronis aetate (1905). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 8₃, 1907/8, 217—218. (G. Eneström.) [25

Tittel, K., Das Weltbild bei Heron. [26
Biblioth. Mathem. 8₃, 1907/8, 113—117.

Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik. [27
Biblioth. Mathem. 8₃, 1907/8, 118—134.

***Manilius, M.,** Astronomica. Edidit Th. Breiter. I. Carmina. Leipzig, Dieterich 1907. [28
8°, XI + 149 S. — [3.80 M.] — [Rezension:] Deutsche Literatura. 28, 1907, 2655—2659. (H. Kleingünther.)

***Kleingünther, H.,** Textkritische und exegetische Beiträge zum astrologischen Lehrgedicht des sogenannten Manilius. Leipzig, Fock 1907. [29
8°, 50 S. — [2 M.] — [Rezension:] Deutsche Literatura. 28, 1907, 2976—2978. (A. Kraemer.)

c) **Geschichte des Mittelalters.**

Kugener, M. A., Un traité astronomique et météorologique syriaque attribué à Denys l'Aréopagite. Edité, traduit et annoté. [30
Actes du XIVᵉ congrès international des orientalistes 2 (Paris 1907). (3) + 82 S.

Al-Battânî sive Albatenii Opus astronomicum. Ad fidem codicis Escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a C. A. Nallino. Pars II. Versio tabularum omnium cum animadversionibus, glossario, indicibus. Mediolani 1907. [31
Milano, Osservatorio di Brera, Pubblicazioni 40: 2. XXXI + 412 S.

Wiedemann, E., Über die Reflexion und Umbiegung des Lichtes von Nasîr al Dîn al Tûsî. [32
Jahrbuch f. Photographie (Halle a. S.) 1907. 8 S.

Wiedemann, E., Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. X. Zur Technik bei den Arabern. XI. Über Al Fârâbîs Aufzählung der Wissenschaften (De scientiis). [33
Erlangen, Physik.-mediz. Sozietät, Sitzungsber. 38, 1906, 307—357; 39, 1907, 74—101.

Jordan, L., Materialien zur Geschichte der arabischen Zahlzeichen in Frankreich. [34
Arch. f. Kulturgesch. (Berlin) 3, 1905, 155—195.

Eneström, G., Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift. [35
Biblioth. Mathem. 8₃, 1907/8, 135—153.

Eneström, G., Über den Mathematiker Bernardus de Villacampi. [36
Biblioth. Mathem. 8₃, 1907/8, 215—216. — Anfrage.

Eneström, G., Über das „Quadripartitum numerorum" von Johannes de Muris. [37
Biblioth. Mathem. 8₃, 1907/8, 216. — Anfrage.

Duhem, P., Études sur Léonard de Vinci. I (1906). [Recension:] L'enseignement mathém. 9, 1907, 500—502. (A. Bernoud.) [38

d) Geschichte der neueren Zeit.

Björnbo, A. A., Joannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex. Cum prooemio Georgii Joachimi Rhetici. I. De triangulis sphaericis. [39
Abhandl. enr Gesch. d. mathem. Wiss. 24 : 1, 1907. (3) + (12) + (1) + 184 S. + Porträt. — [8 M.]

Bosmans, H., Snr le „Libro de algebra" de Pedro Nnñez. [40
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 154—169.

Weard, C. de, De nitvinding der verrekijkers (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scienl., Revne des qnsel. scient. 12_2, 1907, 630—637. (H. Bosmans.) [41

Bopp, K., Die Kegelschnilte des Gregorius a St. Vincentio (1907). [Resension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2685—2686. (A von Braunmühl.) — Melhesis 7_3, 1907, 213—216. (H. Bosmans.) [42

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXI. Benedetto Castelli. Venezia 1907. [43
8°, 130 S. + Porträt.

Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale. Volnme III: 2; XIX. Firenze, Barbera 1907. [44
4°, S. 401—886; 670 + (2) S. — Herausgegeben von A. Favaro.

Stuyvaert, M., Sur l'autenr de l'„Histoire de la roulette" publiée par Blaise Pascal. [45
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 170—172.

Geer, P. van, Christiaan Huygens en Gottfried Wilbelm Leibniz. [46
Tijdspiegel 1908. 26 S.

Endō, R., [Sekis Arbeiten]. [47
Tokyo, Sugakn-Butnrigakkwai, Kisi 4_2, 1907, 94—96. — Japanisch.

Kawakita, T., [Genealogie der mathematischen Schule Sekis]. [48
Tokyo, Sugakn-Bnturigakkwai, Kizi 4_2, 1907, 88—94. — Japanisch.

Knoblauch, J., Über den Plan der Herausgabe von Leonhard Eulers gesamten Werken. [49
Berlin, Mathem. Ges., Sitzungsber 6, 1907, 89—72.

Brill, A., Zur Einleitung der Euler-Feier. [50
Dentsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 555—558.

Müller, Felix, Leonhard Euler. Sein Leben nnd Wirken. [51
Unlerrichtsbl. für Mathem. 13, 1907, 97—104. — [Résumé.] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 370

Hoppe, E., Die Verdienste Eulers um die Optik. [52
Deutsche Malhem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 558—567.

Bortolotti, E., Snlla pnbblicazione delle „Opere matematiche" di Paolo Rnffini e del sno „Carteggio" con gli scienziati del suo tempo. [53
Palermo, Circolo matem., Rendiconti 24, 1907, 403—411.

e) Nekrologe.

Gustav **Bauer** (1820—1906). [54
Bollelt. di bibliogr. d. sc. metem. 10, 1907, 64.

Asaph **Hall** (1829—1907). [55
Science 26_2, 1907, 805—806, 809—812. (H. S. Pritchett.)

Diro **Kitao** (1844—1907). [56
Tokyo, Sugakn-Bnturigakkwai, Kizi 4_2, 1907, 188—191.

Manrice **Loewy** (1833—1907). [57
Paris, Bnrean des longiludes, Annnaire 1908, D. 1—18. (H. Poincaré.) — L'enseignemenl malhém. 9, 1907, 493. — Nalurwiss. Rundschan 22, 1907, 645—647. (A. Berberich.)

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [58
Bollelt. di bibliogr d. sc. matem. 10, 1907, 59—60

Charles Philo **Matthews** (1867—1907). [59
Science 26_2, 1907, 812—846.

Adriano de **Paiva** (?—1907). [60
Porto, Acad. polytechn., Annaes 2, 1907, 129—130 + Porträt.

Georg **Sidler** (1831—1907). [61
L'enseignement malhém. 9, 1907, 493.

Cbarles **Trépied** (?—1907). [62
Paris, Bnrean des longiludes, Annuaire 1908, E 1—7. (M. Loewy.)

Hermann Carl **Vogel** (1841—1907). [63
Nalnrwiss Rundschau 22, 1907, 530—531. (A. Berberich.)

f) Aktuelle Fragen.

Slocum, S. E., The rational basis of mathematical pedagogy. [64
Science 26_2, 1907, 334—341.

Enquête sur la méthode de travail des matbématiciens. X. [65
L'enseignement mathém. 9, 1907, 472—479.

[Deutsche Mathematiker-Vereinigung 1907.] [66
New York, Americ. malhem. soc., Bullelin 14_2, 1907, 133—138. (C. A. Noble.) — Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 567—572. — Naturwiss. Rundschan 22, 1907, 594—595. (E. Naetsch.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdozent A. Becker in Heidelberg zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent F. Bernstein in Halle zum Professor der Versicherungswissenschaft an der Universität in Göttingen.

— Privatdozent A. Bucherer in Bonn zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor K. Carda in Wien zum Professor der Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag.

— Professor J. Geitler von Arminoen in Prag zum Professor der Physik an der Universität in Czernowitz.

— Privatdozent G. Herglotz in Göttingen zum Professor der theoretischen Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor S. Jolles in Berlin zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor M. Lelieuvre in Rouen zum Professor der Mathematik an der „Ecole des sciences" daselbst.

— Ingenieur J. Löschner zum Professor der Geodäsie an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

— Professor E. Pascal in Pavia zum Professor der höheren Analysis an der Universität in Neapel.

— Privatdozent A. Pflüger in Bonn zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent J. Plemelj in Wien zum Professor der Mathematik an der Universität in Czernowitz

— Privatdozent M. Reinganum in Freiburg i. Br. zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. Roquemont zum Professor der angewandten Mathematik an der „Ecole des sciences" in Rouen.

— Professor G. Schmidt in Königsberg zum Professor der Physik an der Universität in Münster.

— Privatdozent E. Strömgren in Kiel zum Professor der Astronomie an der Universität in Kopenhagen.

— Professor G. Torelli in Palermo zum Professor der Höheren Analysis an der Universität in Neapel.

Todesfälle.

— Asaph Hall, Professor der Astronomie an der „Harvard university" in Cambridge, Mass., geboren zu Goshen, Conn., den 15. Oktober 1829, gestorben in Annapolis den 22. November 1907.

— Jules Janssen, Direktor des astrophysikalischen Observatoriums in Meudon, geboren in Paris den 22. Februar 1824, gestorben daselbst den 23 Dezember 1907.

— Diro Kitao, Professor der Physik an der landwirtschaftlichen Akademie in Tokyo, geboren in Matsuye den 24. August 1844, gestorben 1907.

— Alexander Krassnow, Professor der Astronomie und Geodäsie an der Universität in Warschau, geboren in Tambow den 14. August (a. St.) 1866, gestorben 1907.

— Charles Philo Matthews, Professor der Elektrotechnik an der „Purdue university" in La Fayette, Indiana, geboren zu Fort Covington, N Y, den 18. September 1867, gestorben in Phoenix, Arizona, den 23. November 1907.

— William Thomson, Lord Kelvin, früher Professor der Physik an der Universität in Glasgow, geboren in Belfast den 26. Juni 1824, gestorben in Glasgow den 17. Dezember 1907.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Paris hat Professor L. Raffy für das Wintersemester 1907—1908 eine einstündige Vorlesung über Geschichte und Methoden der analytischen Geometrie angekündigt.

— An der Technischen Hochschule in Darmstadt hat Professor F. Gräfe für das Wintersemester 1907—1908 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

Gekrönte Preisschriften.

— *Académie des sciences de Paris.* Des prix ont été décernés: 1. à MM. F. Enriques et F. Severi pour leur mémoire sur le sujet: „Reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde plus d'un système de valeurs des paramètres (aux périodes près). Etudier en particulier le cas où l'équation de la surface serait de la forme $z^2 = f(x, y)$, f étant un polynome, et donner des exemples explicites de telles surfaces"; 2. à MM. J. Hadamard, A. Korn, G. Lauricella et T. Boggio pour leurs mémoires sur la question: „Perfectionner, en un cas important, le problème d'analyse, relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction u et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement les cas d'un contour rectangulaire".

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours de l'an 1910. On sait trouver tous les systèmes de deux fonctions méromorphes dans le plan d'une variable complexe et liées par une relation algébrique. Une question analogue se pose pour un système de trois fonctions uniformes de deux variables complexes, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle et liées par une relation algébrique. Indiquer, à défaut d'une solution complète du problème, des exemples conduisant à des classes de transcendantes nouvelles.

Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1907.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1907 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Dresden 15.—18. September statt. In der auf der vorigen Jahresversammlung beschlossenen Sitzung zum Andenken Eulers wurden Vorträge gehalten von den Herren A. von Brill (Zur Einleitung der Euler-Feier), L. Schlesinger (Über ein Problem der diophantischen Analysis bei Fermat, Euler, Jacobi und Poincaré), A. Pringsheim (Über die Eulersche Reihentransformation), E. Brauer (Die Eulersche Turbinentheorie), F. S. Archenhold (Über Briefe von Euler), R. Gans (Euler als Physiker), E. Timerding (Über Eulers Arbeiten zur nautischen Mechanik), W. Hort (Die Bedeutung Eulers für die wissenschaftliche Technik) und E. Hoppe (Eulers Verdienste um die Optik). Andere Vorträge wurden gehalten von den Herren K. Rohn (Referat über algebraische Raumkurven), F. Klein, G Landsberg, L. Schlesinger (Über die Entwickelung der analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865), A. Schönflies, F. Hausdorff, H. Wiener und V. Varičák.

Vermischtes.

— Un prix Binoux a été décerné en 1907 par l'académie des sciences de Paris à M. G. Loria pour ses travaux d'histoire des sciences.

Monge e le congruenze generali di rette.

Di C. Segre a Torino.

Il *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* (1781) di Monge[1]) contiene le prime proposizioni sulle congruenze *generali* di rette, oltre a qnelle speciali relative alle congruenze *normali.*

È diviso in due parti, corrispondenti rispettivamente al problema dei trasporti entro nn dato piano, oppnre nello spazio.

La 2ª Parte, prima d'entrare in materia, stabilisce, come dice l'Autore (pag. 685), alcune proposizioni di Geometria, sulle quali son fondate le ricerche seguenti.

Anzitutto si ha nell'art. XIX (pag. 685—687) la proposizione così enunciata:

Si par tons les points d'un plan, l'on conçoit des droites menées dans l'espace, snivant une loi quelconqne, et qn'on considère une de ces droites, je dis que de toutes celles qui l'environnent et qni en sont infiniment proches, il n'y en a généralement que deux qui la conpent, et qui soient par conséquent dans un même plan avec elle.

La dimostrazione di Monge coincide con nna, che anche oggidì si trova frequentemente esposta. La retta del dato sistema vien rappresentata colle equazioni, in coordinate variabili di punti x, y, z,

$$x - x' + Az = 0, \quad y - y' + Bz = 0;$$

A e B essendo delle funzioni di x' e y', determinate dalla legge secondo cni vengon condotte le rette nello spazio. Affinchè quella retta sia incontrata (nel punto x, y, z) dalla retta infinitamente vicina, corrispondente ai valori $x' + dx'$, $y' + dy'$ dei parametri, si dovrà avere:

$$dx' = z dA, \quad dy' = z dB.$$

Ne segue

$$dx' dB = dy' dA$$

Ora, sostituendo qui ad A e B le date funzioni di x', y', si ottiene un' equazione di 2° grado pel rapporto $\frac{dy'}{dx'}$: donde si deduce il teorema enunciato.

1) Histoire de l'académie royale des sciences. Année 1781. Avec les mémoires de mathématique et de physique, pour la même année. Paris 1784. — A pag. 34—38 della Histoire è riassunto il concetto del lavoro. Questo si trova poi a pag. 666—704 dei Mémoires.

Art. XX (pag. 687). „Il suit de-là que dans le système de droites dont il s'agit, on peut toujours passer de deux manières différentes d'une quelconque de ces droites à une autre infiniment proche, qui soit avec elle dans un même plan: cela posé, de l'une quelconque de ces droites, passons en effet à l'une de celles qui la coupe, ensuite et dans le même sens, à celle qui coupe la seconde, de-là à celle qui dans le même sens coupe la troisième; il est évident qu'en continuant ainsi de suite nous parcourrons une surface développable: par la même raison, en employant constamment l'autre sens, nous aurions parcouru une autre surface développable qui auroit évidemment coupé la précédente dans la première droite que nous avons considérée; et parce qu'il n'y a aucune de ces droites pour laquelle on ne puisse faire la même opération, il s'ensuit que toutes ces droites ne sont autre chose que les intersections de deux suites de surfaces développables, telles que chaque surface de la première suite coupe toutes celles de la seconde en lignes droites, et réciproquement.“

Dopo queste ricerche sui sistemi generali di rette, si passa ai sistemi normali.

Art. XXI (pag. 687—689). „Si l'on conçoit toutes les normales possibles d'une surface courbe quelconque, je dis qu'elles sont toujours les intersections de deux suites de surfaces développables, telles que chaque surface de la première suite coupe toutes celles de la seconde en lignes droites et à angles droits, et réciproquement.“

Per dimostrare ciò, prende il sistema delle normali

$$x - x' + p'(z - z') = 0, \quad y - y' + q'(z - z') = 0,$$

alla superficie luogo del punto (x', y', z'); e ritrova direttamente per questo sistema l'equazione di 2° grado in $\frac{dy'}{dx'}$, già adoperata nell' Art. XIX. Indi, supponendo preso l'asse delle z parallelo alla normale in (x', y', z'), osserva che quell'equazione risulta avere per prodotto delle radici -1. Ne segue che quei due piani che noi ora chiamiamo *focali* sono ad angolo retto

L'Art. XXII ed i segu[i] svolgono una serie di considerazioni e di ricerche, che poi son diventate classiche, intorno ai raggi di curvatura di una superficie, linee di curvatura, luoghi dei centri, ecc. Esse si ritrovano più tardi nel Trattato *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*[1]); ma in questa Memoria comparivano per la prima volta. Rileviamo soltanto che nel breve Art. XXIII (pag. 690) Monge, considerando gli spigoli di regresso dei due sistemi di sviluppabili formati dalle normali ad una superficie, ottiene senz'altro due superficie a cui saranno tangenti tutte quelle rette. Ora, poichè nell'Art. XX si era stabilita per una congruenza *qualunque* l'esistenza dei due sistemi di sviluppabili, anche per una con-

1) 1ª edizione, Paris 1795. La 3ª ediz. (1807) e le successive s'intitolano, come è noto, *Application de l'analyse à la géométrie*. — È interessante per noi osservare che la 4ª ediz. (1809) è preceduta da un elenco di Memorie publicate da Monge, nelle quali *„on trouvera . . . plusieurs questions qui n'ont pas été traitées dans cet ouvrage“*; e che fra esse è posta in evidenza quella *sur les déblais et remblais* col seguente avvertimento: *„On y trouve la théorie des lignes de courbure d'une surface, et la démonstration de cette proposition remarquable par sa généralité . . .“* (Segue l'enunciato, sopra riferito, del teorema fondamentale contenuto nell'Art. XIX).

gruenza generale varrà quella considerazione di Monge, si avranno cioè due superficie *focali*.[1]) —

Infine (Art. XXXIV, pag. 699 e seg[t]) si ritorna al problema dei *déblais et remblais:*

„Étant donnés dans l'espace, deux volumes égaux entr' eux, et terminés chacun par une ou plusieurs surfaces courbes données; trouver dans le second volume le point où doit être transportée chaque molécule du premier, pour que la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru soit un *minimum?*"

Monge suppone essenzialmente che per fare i trasporti si possan percorrere cammini *rettilinei*. Risulta allora che tutte le rette congiungenti gli elementi corrispondenti dei due volumi dovranno formare una *congruenza* (non un complesso). In conseguenza, per gli Art[i] XIX, XX, le rette stesse saranno le intersezioni di due sistemi di sviluppabili, tali che ogni superficie del 1º sistema taglia quelle del 2º sistema secondo linee rette. Ma per avere il *minimo* suddetto si vede che quelle sviluppabili devon tagliarsi ad angolo retto. Perciò, applicando l'Art. XXI, Monge conchiude che i cammini cercati seguiranno le rette normali di una stessa superficie.[2])

Ho creduto che valesse la pena di mettere in evidenza, per chi non ha modo di consultare la Memoria di Monge, il suo contenuto geometrico, che non pare sufficientemente noto.[3])

In fatti la maggior parte degli scrittori di Geometria della retta ritengono che Monge abbia solo considerato le congruenze *normali* di rette, e che quelle *più generali* si trovino per la prima volta nel noto lavoro di Malus[4]), l'antico discepolo di Monge. In conseguenza attribuis-

1) Forse anche non sarà inutile quest'altra osservazione. A pag. 698 (Art. XXXII) del *Mémoire* si ha un pennello elementare di normali, e calcolando l'area di una sua sezione retta, alla distanza variabile u dal punto della data superficie, si trova un'espressione proporzionale a $(u-R)(u-R')$, ove R, R' sono i raggi di curvatura. È un'anticipazione del risultato di Malus, Hamilton e Kummer, intorno all'*intensità* luminosa *(clarté)*, o *densità* di un sistema di raggi.

2) Come si sa, dopo Monge, si occuparono della questione dei *déblais et remblais* Dupin ed altri, introducendo ipotesi più conformi ai casi pratici.

3) Nelle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik herausgegeben von M. Cantor*, **4**, Leipzig 1908, articolo di V. Kommerell, pag. 451 e seg[t], non si parla del *Mémoire* di Monge: forse perchè l'Autore supponeva che la sostanza geometrica di esso si ritrovi tutta nelle *Feuilles d'analyse*, di cui è esposto minutamente il contenuto (pag. 559 e seg[t]). Invece qui Monge non aveva riportato le cose relative alle congruenze generali di rette. Cfr. la nota a pag. 322.

4) *Optique;* Journal de l'éc. polytechn. t. 7 (= 14e cahier), 1808. — Insieme a tante altre cose originali notevoli vi si ritrovano i risultati di Monge sopra riportati, senz'alcuna citazione.

cono a MALUS la scomposizione di quelle congruenze in due sistemi di sviluppabili, e quindi l'esistenza delle due superficie focali.

Così faceva già HAMILTON.[1]) Ed ora, fra i moderni, MANNHEIM[2]), DARBOUX[3]), LIE[4]), ZINDLER[5]), ed altri.

Da quanto ho esposto risulta che questa opinione deve essere corretta.[6])

---

1) *Theory of systems of rays;* Trans. Irish Acad. **15**, 1828. *First supplement to an essay on the theory . . .;* ibid. **16**, 1830. V. specialmente in questo secondo lavoro la fine di pag. 22.

KUMMER, *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (Journ. für Mathem. **57**, 1859) nell'introduzione cita MONGE solo per le congruenze normali.

2) *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies;* Journ. de mathém. **17**$_2$, 1872 (v. la fine di pag. 121).

3) *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* 2e Partie, Paris 1889; v. la nota a pag. 280.

4) *Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von LIE und SCHEFFERS,* Leipzig 1896. V. le notizie storiche a p. 268 e segg. — È caratteristica la 3a nota a piè della pag. 271, relativa alle congruenze normali: *„Dieser spezielle Fall ist, wie oben erwähnt wurde, schon von MONGE betrachtet worden. Einige ältere Verfasser haben wohl mit Unrecht MONGE die allgemeineren Betrachtungen zugeschrieben, die MALUS anstellte".* (La citazione „Vgl. auch Mémoires de l'Académie 1781, S. 684", che si trova a pag. 268, sembra tolta da un'altra Memoria di MONGE che ivi pure è citata, e che conteneva già l'indicazione *sbagliata* pag. 684.)

5) *Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie;* Jahresb. d. Deutsch. Mathem.-Verein. **15**, 1906. V. il contrasto che qui vien posto fra MALUS e MONGE nella nota [2]) a pag. 186. Lo si ritrova al principio del cenno storico, a pag. 128 del trattato dello stesso Autore: *Liniengeometrie mit Anwendungen,* II. Bd, Leipzig 1906.

6) Mi sia permesso di aggiungere qui un' altra piccola osservazione storica sulla Geometria della retta.

La legge secondo cui variano i piani che son tangenti ad una rigata non sviluppabile nei punti di una sua generatrice rettilinea è comunemente attribuita a CHASLES (*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite;* Correspondance mathém. et physique **3**$_1$, 1838). Ma già HAMILTON, nella citata *Theory of systems of rays,* a pag. 108—109, aveva ricercato la detta legge, e ne aveva stabilita l'equazione sotto la forma, ora ben nota, $\delta\, tg\, P = u$. La costante u, che ora suol dirsi *parametro,* vien chiamata da HAMILTON col termine espressivo *„coefficient of undevelopability".* Essa compare anche nell' espressione $\Delta = \sqrt{u^2 + \delta^2} \cdot d\Theta$, che egli dà per la distanza che un punto mobile sulla generatrice ha dalla generatrice successiva (facente con quella l'angolo $d\Theta$). In particolare ne trae che u è uguale alla minima distanza fra queste due rette divisa pel loro angolo.

Friedrich Hultsch.

Von Ferdinand Rudio in Zürich.

Die mathematisch-historische Wissenschaft hat in den letzten Jahren schwere Verluste erlitten: aus der ohnehin kleinen Zahl derer, die sich um die Erforschung und die Erschließung der griechischen Mathematik bleibende Verdienste erworben haben, sind in rascher Folge abberufen worden: George Johnston Allman (1904), Paul Tannery (1904), Wilhelm Schmidt (1905), Hermann Usener (1905) — und nun ist ihnen am 6. April 1906 auch Friedrich Hultsch gefolgt, der Altmeister der Metrologie, der Herausgeber des Polybius und des Pappus, mehr als vier Jahrzehnte lang der anerkannte und bewährte Führer auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik des Altertums.

Am 22. Juli 1903 hatte Hultsch, geistig noch frisch und regsam, wenn auch körperlich schon leidend, seinen siebenzigsten Geburtstag gefeiert. Bei diesem Anlasse wurde ihm von Franz Poland, seinem ehemaligen Schüler und späteren Kollegen und Freunde, in einem im Dresdner Anzeiger veröffentlichten Aufsatze eine überaus herzliche Gratulation dargebracht, die neben einer Würdigung der Tätigkeit zugleich auch eine Schilderung der Lebensverhältnisse des Jubilars enthielt. Die folgenden biographischen Mitteilungen sind im wesentlichen diesem Aufsatze (zum Teil wörtlich) entnommen.[1])

Friedrich Otto Hultsch wurde am 22. Juli 1833 als dritter Sohn von neun Kindern eines Kupferdruckereibesitzers in Dresden geboren. Die

1) Außerdem konnte ich einen kurzen Nekrolog benutzen, der im Berichte des sächsischen Gymnasiallehrervereins (Leipzig 1906) enthalten ist. Auch hatten die Herren Rektor Dr. Th. Opitz (Zwickau), Prof. Dr. F. Poland (Dresden) und Prof. Dr. A. Witting (Dresden) die große Freundlichkeit, mir weiteres wertvolles Material zur Verfügung zu stellen. Für die Würdigung der wissenschaftlichen, insbesondere der philologischen Tätigkeit von Hultsch standen mir sodann noch die *Worte zum Gedächtnis von Friedrich Hultsch*, gesprochen am 14. November 1906 von Hermann Lipsius (Berichte über d. Verhandl. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. 58, 1906, 191—198) zu Gebote.

Familie heißt eigentlich Hultzsch, und es wird erzählt, daß Hultsch, der seinen Namen später ja freilich oft genug schreiben mußte, das überflüssige z der Zeitersparnis wegen weggelassen habe. So anekdotenhaft das klingt, so charakterisiert es doch den Mann. Denn nur bei einer solchen Denkweise, die unablässig darauf gerichtet ist, die kostbare Zeit peinlichst, selbst bis ins scheinbar kleinliche, anszunützen, war es möglich, zu leisten, was Hultsch in seinem Leben an Arbeit geleistet hat.

Der hochbegabte Knabe empfing die Grundlagen seiner Bildung in der Schule, die für seine Lebensgestaltung später so entscheidend werden sollte, in der altehrwürdigen Kreuzschule, der er an der Seite tüchtiger Mitschüler, wie Heinrich von Treitschke, von 1846 bis 1851 angehörte. Mit den glänzendsten Zeugnissen ausgestattet, begab er sich daranf nach Leipzig, wo er sich mit einer damals noch kleinen Schar von Genossen, zu denen aber ein später so angesehener Meister der Wissenschaft, wie Justus Hermann Lipsius, gehörte, dem Studium der Philologie widmete. Den Professoren gegenüber, unter denen ihn besonders Anton Westermann förderte, wahrte sich der junge Student seine Selbständigkeit und er verriet schon in jungen Jahren, einmal sogar zum ärgerlichen Erstannen eines etwas wunderlich gewordenen alten Herrn, in seinen Übungsarbeiten seine außerordentliche Begabung für kritische Tätigkeit, seine Berufung znm Herausgeber. Im Februar 1855 bestand er in einem Alter, wo mancher erst das Studium beginnt, die Staatsprüfung, und am 12. April desselben Jahres erwarb er sich die philosophische Doktorwürde. Wieder war es die Kreuzschule, die seine erste Lehrtätigkeit sah, da er hier, Ostern 1855 bis Ostern 1856, das gesetzliche Probejahr bestand. Gleichzeitig wirkte er als Lehrer der klassischen Sprachen in den oberen Klassen der damals hochangesehenen Krauseschen Lehr- nnd Erziehungsanstalt. Er blieb dann noch bei Krause, bis er Ostern 1857 als zweiter Adjunkt an der Nikolaischule in Leipzig angestellt wurde. Aber schon Herbst 1858 ging er als Ordinarius der Tertia an das Gymnasium in Zwickan. Hier erteilte er drei Jahre lang, bei durchschnittlich 20 Stunden in der Woche, den Unterricht in Latein, Griechisch und Deutsch, und zwar in Tertia und Quarta. Nachdem er inzwischen Oberlehrer geworden war, wurde er Herbst 1861 an seine geliebte Kreuzschule zurückberufen, die nun der eigentliche Schauplatz seines gesegneten pädagogischen Wirkens werden sollte.

Hultsch begann seine Tätigkeit an der Kreuzschule als Klassenlehrer von Untertertia, stieg dann aber sehr rasch auf. Schon 1866 war er Klassenlehrer von Obersekunda, und mit Beginn des Jahres 1868 wnrde er, als Nachfolger von Julius Klee, zum Rektor der Kreuzschule ernannt. Am 21. April 1868 fand die feierliche „Einweisung“ statt, durch die

Hultsch „als der zweiundzwanzigste in der Reihe der ehrwürdigen Männer, welche seit dem alten M. Nicolaus Cäsius, dem Freunde Melanchthons, des Praeceptor Germaniae, an diesem Platze gestanden haben“, in das Amt eines Rektors der Schule znm heiligen Kreuz eingeführt wurde. Auf die Worte des einführenden Vertreters der Behörde antwortete der noch nicht 35jährige Rektor in einer änßerst gehaltvollen Rede, die in dem Schulprogramme vom Jahre 1869 abgedruckt ist.

Als Lehrer konnte sich Hultsch ja nun im wesentlichen auf Latein und Griechisch in Prima beschränken — gelegentlich übernahm er zwar auch den Unterricht in unteren Klassen —, um so anstrengender und zeitraubender aber gestaltete sich die Verwaltungstätigkeit. „Auch wer die Entwickelung der letzten Jahrzehnte nnr oberflächlich verfolgt hat, wird zugestehen müssen, daß dem erst 35jährigen Rektor Hultsch keine leichte Aufgabe zugefallen war. Unter seiner Leitung wurde das einfache Gymnasium mit nicht 400 Schülern allmählich zu einem Doppelgymnasinm mit über 600 Schülern ausgebant. Sein Scharfblick und seine Gewissenhaftigkeit machten die Verwaltung der Schule mit ihren vielen noch aus alter Zeit herrührenden Stiftungen, Bibliotheken usw. zu einer allerorten anerkannt mustergültigen. Es genüge, bei dem Mangel an Raum nur ein paar Zahlen zu erwähnen. In einer Zeit von 21 Jahren hat Hultsch 2449 Schüler aufgenommen, 903 Abitnrienten das Zeugnis der Reife erteilt. Unter ihm sind 13 neue Stiftungen mit einem Kapital von 181 000 Mark der Schule und gegen 3000 Mark ihm persönlich zur beliebigen Verwendung im Interesse der Schnle zugewiesen worden. Zu allen diesen zeitraubenden Arbeiten kam noch von 1879 bis 1882 die Einrichtung und Leitung des Wettiner (des zweiten städtischen) Gymnasiums.“

Hultsch verwaltete das Rektorat der Kreuzschule bis Ostern 1889, um dann in den Rnhestand zu treten, d. h. um sich von da an ausschließlich seinen wissenschaftlichen Arbeiten zu widmen. In welch hohem Maße es ihm gelungen war, sich die Liebe und Dankbarkeit seiner Schüler nnd die Hochachtung der Kollegen und der vorgesetzten Behörde zu gewinnen, das kam so recht zum Ausdruck bei der erhebenden Abschiedsfeier, die am 12. April 1889 in der Aula des Gymnasiums veranstaltet wurde, und über die das Schulprogramm von 1890 berichtet. Sein Nachfolger, heißt es in diesem Programme, darf „Zeugnis ablegen von den Gefühlen der Verehrung und Dankbarkeit, von denen er die Lehrerschaft der Schule für den geschiedenen Rektor erfüllt weiß; er muß das Beispiel strengster Pflichttreue und Gewissenhaftigkeit rühmen, das Herr Rektor Hultsch seinen Amtsgenossen und seinem Nachfolger an dieser Schule hinterlassen hat, und er kann vor allem mit dem Ans-

druck der Bewunderung nicht zurückhalten über die außerordentliche Kraft und Stetigkeit der Arbeit, mit der es seinem Vorgänger möglich gewesen ist, in diesem die Zeit und Kraft gewiß stark in Anspruch nehmenden Amte noch eine Reihe von wissenschaftlichen Arbeiten zu fördern, welche ihm den Dank und die Anerkennung, die sie ihm schon bei Lebzeiten eingetragen haben, für alle Zeiten sichern". Und auf diesen Ton der Verehrung und der Dankbarkeit waren alle die Kundgebungen gestimmt, die Hultsch nicht nur bei jenem Festakte, sondern auch bei anderen Gelegenheiten dargebracht wurden. „Die dankbare Liebe von Tausenden von Schülern," sagt Poland, „die treue Anhänglichkeit von zahlreichen Amtsgenossen an ihren „alten" Rektor beweisen, daß Hultsch die edle Humanität, die er lehrte, stets im Leben im reichsten Maße betätigt, daß er die wichtigste Aufgabe des Lehrers, die Eigenart einer fest und edel ausgeprägten Persönlichkeit in sich selbst zu entwickeln, um auch im Schüler den ganzen Menschen zu wecken, meisterlich verstanden hat. Abhold aller unklaren Gefühlsschwärmerei und Schönrednerei, wußte er doch die Schönheiten der antiken Literatur dem jugendlichen Gemüte aufgehen zu lassen. Vor allem aber gewöhnte sein scharfer, klarer Geist den Schüler daran, selbst klar zu denken und nüchtern zu urteilen. So schulte Hultsch den Geist des Schülers für die Anforderungen des späteren gelehrten Berufes wie des Lebens." Und in einem anderen Berichte wird Hultsch nachgerühmt, wie er sich bei aller Strenge und scheinbaren Unnahbarkeit stets mit rührender Sorge seiner Schüler angenommen habe, mit Rat und Tat, auch über die Schulzeit hinaus. Für viele soll er das Schulgeld bezahlt und manche auch sonst noch aus eigenen Mitteln unterstützt haben.

An Anerkennung seiner pädagogischen und seiner wissenschaftlichen Tätigkeit hat es Hultsch auch in weiteren Kreisen nicht gefehlt. Schon im Alter von 31 Jahren wurde er zum Professor ernannt, bei seinem Rücktritte von der Kreuzschule 1889 erhielt er den Titel eines Oberschulrates, vier Jahre zuvor war er zum Mitgliede der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften gewählt worden. Außerdem war er Mitglied des ἑλληνικὸς φιλολογικὸς Σύλλογος in Konstantinopel und seit 1885 korrespondierendes Mitglied der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen

Im übrigen floß das äußere Leben von Hultsch, ein schlichtes, deutsches Gelehrtenleben, still und ereignislos dahin. Nur wenige Studienreisen nach Paris und Italien unterbrachen den gleichmäßigen Lebensgang. Um so inhaltreicher war freilich das innere Leben. Denn selbst die Schultätigkeit, die wir kurz skizziert haben, und die wissenschaftliche Arbeit, zu deren Würdigung wir uns nun wenden wollen, vermochten

noch nicht, dieses Leben ganz auszufüllen. „Nichts von allem, was die Menschheit Bedeutsames und Schönes kennt, ist ihm fremd geblieben, so sehr seine Wissenschaft ihn beschäftigt hat: die Fragen der Politik, die Sorge für die Interessen des eigenen engeren Stadtkreises, die Schönheit edler Kunst fesselten ihn ebenso, wie die Reize der Natur, mochte er sich in die Schönheiten der engeren Heimat versenken oder vor allem auch die herrliche Alpenwelt genießen, die ihn fast alljährlich nach dem Süden gelockt hat.“

So lebte und wirkte Hultsch noch siebzehn Jahre lang nach seinem Rücktritte von der Kreuzschule. Von der geistigen Frische, die er sich bis in die letzten Jahre zu bewahren wußte, zeugt zur Genüge seine große Abhandlung vom Jahre 1903 über *Die Ptolemäischen Münz- und Rechnungswerte.* Die wissenschaftliche Arbeit half ihm auch, die körperlichen Leiden leichter zu tragen, die sich schließlich doch einstellten, und denen er nach langer Krankheit am 6. April 1906 erlag.

Die wissenschaftliche Tätigkeit von Hultsch hat sich auf zwei großen, scheinbar weit auseinander liegenden Gebieten bewegt, dem der *klassischen Philologie* und dem der *Geschichte der Mathematik.* Für Hultsch allerdings waren diese Gebiete nicht getrennt, sondern vielmehr zu einem einzigen großen Arbeitsfelde vereinigt, und zwar namentlich durch Vermittelung einer Disziplin, die er stets mit besonderer Sorgfalt kultiviert hat, und deren heutige Gestalt er mit hat schaffen helfen, der *Metrologie.* Wer freilich die beiden hervorragenden, weit hinaus leuchtenden Denkmäler, die Hultsch auf dem philologischen und dem mathematisch-historischen Gebiete errichtet hat, die Ausgabe des Polybius und die des Pappus, ohne weitere Vermittelung betrachtet und miteinander vergleicht, der möchte wohl kaum glauben, daß er Werke desselben Autors vor Augen habe.

Mit Polybius hat sich Hultsch schon sehr frühe befaßt, und er hat — wie schon ein flüchtiger Blick auf das Verzeichnis seiner Schriften zeigt — nicht mehr abgelassen von ihm bis in sein hohes Alter. Ist doch noch eine seiner letzten Arbeiten der Besprechung der von Büttner-Wobst umgearbeiteten Polybius-Ausgabe von Dindorf gewidmet! Nachdem er bereits 1857 und 1858 zwei Noten *Emendationen zu Polybios* veröffentlicht hatte, ließ er im Jahresbericht des Gymnasiums zu Zwickau, 1858/59, seine erste[1]) größere Abhandlung, betitelt *Quaestiones*

1) Nach einer gütigen Mitteilung von Herrn Prof. E. Sievers in Leipzig ist eine gedruckte Doktordissertation von Hultsch nicht vorhanden, da Doktordissertationen damals in Leipzig überhaupt nicht gedruckt wurden.

Polybianae folgen. In dieser Programmschrift setzt HULTSCH zunächst kurz auseinander, welche Bedeutung den Schriften des POLYBIUS für die Erforschung der κοινή, der gemeingriechischen Sprache der Spätzeit, zukommt. Darauf wendet er sich zu einer Besprechung und Vergleichung der Handschriften, von denen er besonders fünf hervorhebt. Sie stammen alle von einem gemeinsamen Archetypus ab, was sich deutlich aus den übereinstimmenden Lücken erkennen läßt. Am nächsten kommt diesem Archetypus unter den hervorgehobenen Handschriften der Vaticanus aus dem 11. Jahrhundert, und diesen legt daher HULTSCH den nun folgenden Untersuchungen zugrunde, um an zahlreichen Beispielen die sprachlichen Eigentümlichkeiten des POLYBIUS zu kennzeichnen, sowohl was besondere Wortformen, als auch was die Syntax betrifft.

Obgleich es sich hier um eine rein philologische Untersuchung handelt, so glaubte ich doch, an dieser Erstlingsarbeit von HULTSCH nicht still vorübergehen zu sollen. Denn die Art der Behandlung ist vorbedeutend nicht nur für seine philologischen, sondern auch für seine mathematisch-historischen Arbeiten. Indessen dürfte es wohl nicht angehen, die Leser der Bibliotheca Mathematica allzulange mit diesen etwas abliegenden Untersuchungen zu unterhalten, und so sei hier zunächst nur gesagt, daß die *Quaestiones Polybianae* nur den Anfang bilden von einer stattlichen Reihe weiterer Arbeiten über POLYBIUS, die in der vierbändigen Ausgabe des großen Historikers ihren Höhepunkt, aber noch lange nicht ihren Abschluß fanden. „Diese Ausgabe“, sagt LIPSIUS, „hat alle früheren Leistungen weit überholt und die ihr unmittelbar vorausgegangene Ausgabe von L. DINDORF sofort antiquiert, weil sie die *recensio* des Textes auf festen Boden stellt durch genaue Vergleichung namentlich der für die vollständigen fünf Bücher maßgebenden Handschriften und zugleich die *emendatio* auf der sicheren Grundlage sorgfältiger Beobachtung des polybianischen Sprachgebrauchs fördert.“

Ich darf auf eine weitere Besprechung der speziell philologischen Arbeiten von HULTSCH um so eher verzichten, als Herr Prof. POLAND mit einer Biographie für BURSIANS Jahresbericht beschäftigt ist, die natürlich der philologischen Tätigkeit von HULTSCH besonders Rechnung tragen wird. Und so will ich zum Schlusse hier nur noch die auf POLYBIUS bezügliche Stelle aus dem wiederholt benutzten Dresdner Aufsatze des Herrn POLAND folgen lassen. Es heißt dort: „Zunächst müssen die Verdienste von HULTSCH um die Herausgabe des ihm kongenialen großen Historikers des nachklassischen Griechentums, des schlichten, klardenkenden POLYBIUS hervorgehoben werden. Nachdem er sich schon im Jahre 1859 durch ein Programm von Zwickau den Boden bereitet hatte, erschien von 1867 bis 1872 (die ersten beiden Bände in zweiter Auflage

1888 und 1892) seine große kritische Ausgabe des Historikers, die zum ersten Male wieder eine feste, auf reichem handschriftlichem Materiale beruhende Textgestaltung bietet und bis heute die einzige moderne, große, kritische Ausgabe geblieben ist. Wurde dieses gewaltige Werk begleitet von einer Fülle kleinerer Arbeiten, in denen Einzelfragen der Textgestaltung scharfsinnig und eingehend erörtert wurden, so zeitigte die Beschäftigung mit Polybius vor allem auch eine Arbeit von allgemeinerer Bedeutung, die Untersuchungen über die erzählenden Zeitformen bei Polybius (in den Abhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften von 1891, 1892 und 1893), in denen einer neuen lebendigeren Auffassung über den Gebrauch der griechischen Tempora in eindringender und feinsinniger Weise die Wege geebnet werden, und die für neuere grammatische Forschungen vorbildlich gewesen sind". Die drei genannten Abhandlungen (die Bände, in denen sie erschienen sind, tragen die Jahreszahlen 1893 und 1894) füllen zusammen nicht weniger als 431 Seiten großen Formates. Die Kritik bezeichnete sie als „das Beste und Zuverlässigste, was im Gebiete der Syntax des Polybius überhaupt geleistet worden ist", und als „für die Kenntnis des Sprachgebrauches des Polybius und der κοινή überhaupt von größter Wichtigkeit".

Wenn ich nun auch auf die zahlreichen rein philologischen Arbeiten von Hultsch nicht weiter eingehen kann — ich wäre dazu auch nicht kompetent genug — so glaube ich doch auf zwei Arbeiten von allgemeinerem Interesse noch besonders hinweisen zu sollen: auf die Festrede über *Die staatsmännische Wirksamkeit des Demosthenes*, die Hultsch 1863 in der Aula der Kreuzschule gehalten hat, und die man in Fleckeisens Jahrbüchern abgedruckt findet, und sodann auf die Ausgabe (Leipzig 1867) der Schrift *De die natali* des römischen Grammatikers Censorinus. Da diese Schrift doch allerlei enthält, was auch für Mathematiker und Naturforscher interessant ist, und da sie überdies auch mit anderen Arbeiten von Hultsch, die wir noch werden zu besprechen haben, zusammenhängt, so sei es gestattet, den Inhalt in aller Kürze zu skizzieren. Die Schrift stammt aus dem Jahre 238 n. Chr. und ist dem Q. Caerellius zum Geburtstage dediziert. Demzufolge enthält sie nach einer kurzen einleitenden Widmung zunächst allerlei Betrachtungen, die sich auf die Geburt des Menschen beziehen, auf Zeugung und Schwangerschaft, auf Zwillingsbildung, auf die Entwickelungszeit der Leibesfrucht und ganz besonders auf den Einfluß der Gestirne. Dabei werden immer die Meinungen der verschiedenen griechischen Philosophen und Ärzte, wie Anaxagoras, Empedokles, Hippokrates, Hippon usw. mitgeteilt, was den Wert der Schrift natürlich sehr erhöht. Der zweite Teil der Schrift behandelt sodann Fragen der Chronologie und des Kalenders, nämlich die Teilung der Zeit

in Tage, Monate, Lustren und Saecula. Im wesentlichen folgt dabei Censorinus den Schriften Varros und Suetons. Die Handschriften, in denen die Schrift des Censorinus überliefert ist, gehen alle auf den Codex Coloniensis saec. VII zurück, der sich zur Zeit der Ausgabe von Hultsch in Darmstadt befand (auf ihn als Darmstadiensis 166 saec. VII stützt Hultsch seine Edition), jetzt aber wieder in Köln ist. Durch Blattausfall ist in diesem Codex der Schluß der Schrift des Censorinus verloren gegangen und damit zugleich auch Titel und Anfang einer zweiten, sich daran anschließenden Schrift, die jetzt in der Literatur als *Fragmentum Censorino adscriptum* bezeichnet wird. Dieses Fragment, das in der Ausgabe von Hultsch von S. 53 bis S. 73 reicht, und auf das Hultsch 1880 noch einmal in einer kurzen Note zurückgekommen ist, scheint einem größeren encyklopädischen Werke zu entstammen. Es enthält zunächst in kurzen Kapiteln wörterbuchartige Erklärungen über die Welt, den Himmel, die Sterne, die Erde, über Geometrie, Musik, und sodann namentlich über Rhythmus und Metrik. Diese letzten Kapitel (de metris id est numeris, de legitimis numeris, de numeris simplicibus) enthalten zugleich die älteste auf uns gekommene Darstellung lateinischer Metrik (vgl. den Artikel Censorinus von G. Wissowa in der *Realencyklopädie* von Pauly-Wissowa). —

Hultsch hatte kaum seine Polybius-Studien begonnen, als sich ihm bereits ein neues, weites Arbeitsfeld eröffnete, das für seine ganze wissenschaftliche Tätigkeit von der größten Bedeutung werden sollte, die *Metrologie*. Es war das natürlich nicht zufällig. Die verschiedenen Angaben über Maße aller Art, die er bei Polybius vorfand, von dem man ja weiß, daß er für Fragen der angewandten Mathematik ein ganz besonderes Interesse besaß, mußten einen Mann von der peinlichen Genauigkeit eines Hultsch veranlassen, den Dingen möglichst auf den Grund zu gehen und die Angaben um so einläßlicher zu prüfen, je ungenauer sie waren. Hultsch sagt darüber selbst in dem gleich näher zu besprechenden Werke folgendes:

„Als Quellen [für die Metrologie] sind selbstverständlich auch alle übrigen Schriften des Altertums, insofern sie Angaben über Maße, Gewichte und Münzwährungen enthalten, zu betrachten. Hier hat die Forschung in jedem einzelnen Falle den Wert der Mitteilung zu prüfen. Selbst Schriftsteller, die in anderen Beziehungen wegen der Genauigkeit ihrer Berichte gerühmt werden, wie Herodot und Polybius, sind in einigen Angaben über Maße und Messungen minder zuverlässig. Doch teilte diesen Mangel an Präzision mehr oder minder das ganze Griechenvolk. Die Gewohnheit, in runden Zahlen zu rechnen, die Maße nur nach ihrem ungefähren Betrage zu nehmen, ähnliche Maße verschiedener Völker gleichzusetzen, Entfernungen nur nach ungenauer Abschätzung zu bestimmen, war ganz allgemein Auch darf man nicht vergessen, daß die meisten Notizen nur gelegentlich bei Behandlung anderer Gegenstände gegeben werden, und daß auch neuere Schriftsteller in solchen Fällen nicht ängstlich eine absolute Genauigkeit erstreben.“

Hultsch machte es sich also zur Aufgabe, alles zu sammeln und geordnet zusammenzustellen, was an zuverlässigen Angaben über die Längen-, Flächen- und Hohlmaße, über die Gewichte und über die Münzen bei den Griechen und Römern vorhanden war, mochten sich diese Maßbestimmungen aus unmittelbaren Quellen ergeben, nämlich aus den Maßstäben, Hohlmaßen, Gewichtsstücken und Münzen, die jetzt noch erhalten oder doch in Abbildungen überliefert sind, oder mochten sie auf geschriebene Quellen zurückgehen, auf eigentliche metrologische Schriften, oder auch solche, die nur nebenbei Metrologisches enthielten. Die metrologische Literatur, die Hultsch vorfand, und die er zu verarbeiten hatte, war übrigens schon eine recht umfangreiche. Abgesehen von den allerdings meist nur fragmentarischen Schriften aus dem Altertume, die Hultsch dann später besonders herausgab, waren es vor allem die Arbeiten französischer und holländischer Philologen des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts, wie Budé, Scaliger, Gronov, Savot, die bereits umfangreiches, mit vielem Fleiß gesammeltes Material darboten. Dazu kamen im achtzehnten und neunzehnten Jahrhundert die Werke von Eisenschmid, Letronne, Hussey, namentlich aber dann die grundlegenden *Metrologischen Untersuchungen* von August Böckh (1838) und die *Geschichte des römischen Münzwesens* von Theodor Mommsen (1860). Auf die beiden zuletzt genannten epochemachenden Werke stützt sich Hultsch natürlich ganz besonders, jedoch ohne dabei seine Selbständigkeit aufzugeben.

Schon im Jahre 1862 konnte er als Ergebnis seines Fleißes seine *Griechische und römische Metrologie* veröffentlichen. Sie war zum größten Teile noch in Zwickau entstanden, und so hat denn auch Hultsch dieses sein erstes größeres Werk gleichzeitig seinem neuen Rektor Julius Klee und seinem ehemaligen Direktor in Zwickau, Friedrich Kraner, gewidmet. Über die Aufgabe der Metrologie und über die Einteilung des Stoffes spricht sich der Verfasser folgendermaßen[1]) aus:

„Der Mensch ist das Maß aller Dinge. Dieser oft angeführte Ausspruch des alten Protagoras bildet auch den Fundamentalsatz für die Lehre von den Maßen, die Metrologie. Alles Messen ist eine Vergleichung. Eine bestimmte Größe wird zugrunde gelegt und diese als Maßstab auf alle gleichartigen Größen angewendet. Die daraus hervorgehende Verhältniszahl ist das Maß des gemessenen Gegenstandes. Zuallererst, denn es läßt sich das überhaupt nicht von dem Begriffe menschlichen Seins und Wirkens trennen, müssen die räumlichen Ausdehnungen gemessen worden sein. Naturgemäß bildet hier der menschliche Körper selbst die Unterlage. Die Handbreite, die Armlänge, die ausgebreiteten Arme, der Fuß, der Schritt sind Maße, auf deren Gebrauch die Natur selbst den Menschen hinweist; sie sind bei allen Erwachsenen ungefähr gleich, sie lassen sich fast überall leicht anlegen und reichen so für die

1) Ich habe geglaubt, diese Einleitung nach der später noch zu besprechenden zweiten Auflage zitieren zu sollen, in der Hultsch doch manches geändert hat.

Bedürfnisse des ersten Kulturzustandes aus. Die ausgeschrittene Länge wurde auf dem Ackerfelde zum Flächenmaß. Hundert Fuß lang, so weit als die Pflugstiere in einem Atem getrieben werden konnten, zog der Pflüger seine Furche und fügte so viele nebeneinander daran, bis die Breite des beackerten Stückes der Länge gleich war. Dieses Geviert der hundertfüßigen Furche war bei Griechen und Italikern das ursprüngliche Flächenmaß.

Von den natürlichen Maßen war es nur ein kleiner Schritt zu der Anwendung von künstlichen, nach einer vereinbarten Norm hergestellten Maßstäben. Die Baukunst läßt sich ohne dieselben nicht denken, daher finden wir bei den Ägyptern, den ältesten Baumeistern der Erde, auch die ältesten genau normierten Maßstäbe; und dasselbe Volk hat auch, wie die Alten, Herodot an der Spitze, vielfach hervorheben, zuerst die Kunst der genauen Vermessung des Landes erfunden. Alljährlich überschwemmte der Nil das fruchtbare Ackerland und bedeckte mit seinem Schlamme die Marken des Grundbesitzes, alljährlich wurde daher durch genaue Vermessung den Besitzern das ihrige wieder zugeteilt, eine Einrichtung, die jedenfalls ebenso alt ist als überhaupt die ägyptische Kultur.

Nicht so leicht wie zu dem Maßstabe für die Längen- und Flächenausdehnung gelangte man zu Maßen für das Volumen und für die Schwere der Körper. Ursprünglich hat der Krug, in welchem Öl oder Wein aufbewahrt wurde, das größere oder kleinere Gefäß, in welches die Feldfrüchte geschüttet wurden, oder der mit Getreide gefüllte Sack, den ein Mann auf dem Rücken tragen konnte, die Maße für Flüssiges und Trockenes abgegeben. Aus diesen einfachen Voraussetzungen erwuchs schon frühzeitig ein in sich geschlossener Zusammenhang aller Maße. Denn wenn das Gefäß, welches als Hohlmaß diente, eine regelmäßige Form erhielt, so war einerseits die Beziehung zu dem Längenmaße leicht aufzufinden, anderseits stellte die Wassermenge, welche das Gefäß füllte, ein bestimmtes Gewicht dar. Zum vollendeten Ausdruck ist dieser Gedanke erst in dem heutigen, vom Meter ausgehenden Systeme der Maße gelangt; aber auf ähnliche Anschauungen war die Menschheit schon in einer sehr frühen Periode der Kultur gekommen, nur daß im Altertum die Systeme nicht ausschließlich vom Längenmaße aus aufgebaut wurden, sondern ein bereits durch den Gebrauch festgesetztes Gewicht einerseits und die ebenfalls schon üblichen Maße des Raumes anderseits einander im Hohlmaße begegneten, so daß dann nur noch eine genauere Regelung der durch die Praxis bereits gegebenen Maße stattfand.

Am einfachsten ist, wie es scheint, das System des alten Ägyptens gewesen. Die Babylonier setzten den fünften Teil des Kubus ihrer Elle als Einheit des Hohlmaßes und teilten sowohl dieses Hohlmaß als das Gewicht des Wassers, welches das Hohlmaß füllte, in Sechzigstel; außerdem hatten sie noch mit dem aus Ägypten überkommenen Hohlmaße sich auseinanderzusetzen. Die Griechen entlehnten ihre Maße und Gewichte aus Vorderasien, entwickelten sie aber mit eigenem Erfindungsgeiste weiter. Noch in nächster Beziehung zu den babylonischen Normen steht das äginäische oder vielmehr altpeloponnesische System; einen weiteren wichtigen Fortschritt stellte die von Solon eingeführte Maß- und Gewichtsordnung dar. Auf das attische System gründeten weiter die Römer die Beziehung ihres Hohlmaßes, welches gleich dem Kubus des römischen Fußes war, zu dem Gewichte von 1 attischen Talent oder 80 römischen Pfund. Hier zuerst, also auf italischem Boden und in verhältnismäßig später Zeit, sind uns auch ausdrücklich die gesetzlichen Formeln überliefert, nach denen Längenmaß, Hohlmaß und Gewicht miteinander geglichen wurden, Formeln, welche wir, der Ähnlichkeit folgend, mit großer Wahrscheinlichkeit zurück auf attisches Maß und Gewicht und weiter auf die weit älteren Systeme Ägyptens und Vorderasiens übertragen können.

Ebenfalls schon in sehr früher Zeit wurde die Kunst des Wägens angewendet auf Gold und Silber, in Ägypten auch auf Kupfer, um diese Metalle als Wertmesser für andere Gegenstände des Besitzes gelten zu lassen. Hieraus entwickelte sich in Babylonien bereits lange vor der ersten Münzprägung eine feste Währung der Gewichte Goldes und Silbers, welche statt des Geldes dienten. Die Stempelung der auf bestimmtes Gewicht ausgebrachten kleinen Barren Goldes und Silbers übten zuerst, gegen Anfang des siebenten Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung, die kleinasiatischen Griechen und wurden damit zu Erfindern des Geldes im eigentlichen Sinne.

Mit dem Auftreten der Münze entstand gewissermaßen aus dem Gewichte ein neues selbständiges Maß. Die Münze ist nicht mehr bloß ein genau abgewogenes Stück Wertmetall, sie wird vielmehr das Maß für alle Wertschätzung, weshalb sie auch, je weiter Handel und Verkehr sich entwickeln, um so häufiger durch bloße Kreditzeichen vertreten wird. Freilich ist sie ihrer Natur nach kein ganz unveränderlicher Maßstab, aber doch immerhin der am wenigsten schwankende, der sich herstellen ließ. In diesem Sinne hat die Metrologie auch das Münzwesen der alten Völker zu behandeln. Sie hat vor allem den Münzfuß zu ermitteln, das Normalgewicht und die Feinheit des Metalls festzustellen und dann den Wert der Münze im Verhältnis zu dem heutigen Gelde zu bestimmen. Das Gebiet der Numismatik hat sie nur da annähernd zu berühren, wo das Gepräge der Münzen, sei es der Stil der Bilder, oder die Beizeichen und Aufschriften, herbeigezogen werden muß, um Aufschluß über die Zeit der Prägung zu geben."

Entsprechend diesen Ausführungen, die hier wörtlich wiedergegeben sind, weil sie eine treffliche Orientierung über den Plan des ganzen Werkes geben, zerfällt nun also das Buch (in der ersten Bearbeitung) in drei Teile. Der erste (S. 25—100) behandelt die *Längen-, Flächen- und Hohlmaße*, und zwar zunächst die griechischen Längen- und Flächenmaße. Das Gefühl, daß die Längenmaße ursprünglich von dem menschlichen Körper abgeleitet waren, blieb den Griechen allezeit lebendig. So bemerkt HERON[1]) zu dem Ursprung der Maße: *τὰ δὲ μέτρα ἐξηύρηνται ἐξ ἀνθρωπίνων μελῶν, ἤγουν δακτύλου, κονδύλου, παλαιστοῦ, σπιθαμῆς, ποδός, πήχεως, βήματος, ὀργυιᾶς καὶ λοιπῶν*. An die Besprechung dieser Maße schließt sich die der größeren Längenmaße an, die nicht unmittelbar vom menschlichen Körper entlehnt werden konnten, die aber die Griechen in ein einfaches Verhältnis zu jenen setzten: das Hundertfache des Fußes war das *πλέθρον*, das Hundertfache der Orgyia das *στάδιον*. Das *πλέθρον* war zugleich Flächenmaß, nämlich das Quadrat des gleichnamigen Längenmaßes. Eine ausführliche Untersuchung widmet nun HULTSCH der eigentlichen Bestimmung der griechischen Längenmaße, insbesondere des Stadions. Es folgen sodann die römischen Längen- und Flächenmaße, die, wie auch VITRUV bestätigt, ebenfalls von dem menschlichen Körper abgeleitet worden sind. Die eigentliche Einheit sowohl für die Längen- wie für die Flächenmaße war der römische Fuß, dessen genauere Bestimmung nun vorgenommen wird. Den Schluß des ersten Teiles bilden die attischen und die römischen Hohlmaße und ihre Bestimmung.

1) *HERONIS Alex. geom.* ed. HULTSCH p. 47, 4.

Der zweite Teil (S. 101—120) ist den griechischen und römischen *Gewichten* gewidmet Die Elemente des griechischen Gewichtssystems sind *τάλαντον*, *μνᾶ*, *δραχμή* und *ὀβολός*, deren Verhältnis auf einer Verschmelzung des duodezimalen und dezimalen Rechnens beruht. Der Ursprung des Systems ist orientalisch, worauf schon das semitische *μνᾶ* hinweist. Das kleinste Gewicht des Systems, der Obolos, wurde von Ärzten noch weiter geteilt, nämlich in acht *χαλκοῖ*. Alle diese Gewichte bezeichneten zugleich das Münzgewicht des athenischen Staates seit SOLON. Früher hatte ein anderer Münzfuß und ein anderes Gewicht, nämlich das äginäische, bestanden, das sich auch noch später als Handelsgewicht erhielt. Es folgt nun bei HULTSCH weiter das römische Gewichtssystem, dessen Einheit die *libra* war, nach MOMMSEN die mit ausgestrecktem Arme auf der Hand *schwebend zu haltende Last*. Die Teilung dieser Libra fand nach dem eigentümlich italischen Duodezimalsystem statt, in dem die größere Einheit *as*, die kleinere Einheit oder das Zwölftel *uncia* heißt. Auf die Einteilung des römischen Pfundes folgt seine Bestimmung, und damit schließt der zweite Teil.

Der dritte, weitaus umfangreichste Teil (S. 121—254) behandelt die mit den Gewichten in engstem Zusammenhange stehenden *Münzen*, und zwar zunächst das griechische Münzwesen. In einer Einleitung werden die ursprünglichen Tauschmittel und die Entstehung der Münze besprochen.

„Für die Viehzucht treibenden Voreltern der Hellenen und Italiker lag nichts näher, als das Tier, in welchem ihr Hauptbesitz bestand, das Rind, zum Ausdrucke des Wertes auch für ihren übrigen Besitz zu wählen ... Allein schon HOMER kennt neben den Rindern die Metalle als Tauschmittel... Wenn man aber in dieser Weise die Metalle im Tauschhandel benutzte, so mußte notwendig der Gebrauch der Wage hinzukommen. Und so wird denn bei HOMER das Gold, wo es allein seinem Metallwert nach in Betracht kommt, regelmäßig nach dem Gewicht, dem Talent, bezeichnet.“

Wie lange die Griechen das Metall als Tauschmittel gewogen haben und welche Metalle sie dazu besonders verwendeten, ist nicht genau bekannt, sicher aber ist, daß sie

„frühzeitig von Kleinasien und Phönikien her noch eine andere Art der Wertmessung durch die Metalle kennen lernten. Es kam von selbst dahin, daß das zum Tausch benutzte Metall eine konventionelle, dem Bedürfnis entsprechende Form erhielt. Größere Quantitäten zirkulierten in Barrenform. Ein eigentümlicher Beleg dafür ist vielleicht in dem griechischen *ὀβολός* zu suchen, wenn die alte Tradition richtig ist, daß damit das älteste eiserne Geld bezeichnet worden sei, welches die Form von Spießen, d. h. von länglichen, an den Enden dünneren Barren hatten. Wenn nun die in feststehende Form gegossenen Barren mit einem Stempel versehen wurden, der das Gewicht angab, so daß ein jedesmaliges Nachwägen erspart wurde, wenn dann ferner die kleineren Gewichtsteile durch runde, platte, ebenfalls gestempelte Metallstücke ausgedrückt wurden, so ging dadurch das bisher nur gewogene Wertmetall in die Form der *Münze* über.“

Hultsch bespricht nun die Bedeutung des Münzstempels und das gegenseitige Verhältnis der Wertmetalle, um alsdann eingehend zu behandeln: die persische und kleinasiatische Münzwährung, den äginäischen Münzfuß, die älteste Münzwährung von Athen und die Einführung einer neuen durch Solon, die Feststellung des Normalgewichtes der attischen Münze, die attische Silberprägung, die Gold- und Kupferprägung, die Wertbestimmung des attischen Kurantes, den Kurs des Goldes, den attischen Münzfuß im makedonischen Reiche, die attische Währung in der Römerzeit.

Der zweite Abschnitt des dritten Teiles bringt das Münzwesen der römischen Republik.

„Viel deutlicher als bei den Griechen lassen sich bei den Römern die Spuren davon verfolgen, wie von dem ältesten einfachen Tauschverkehr allmählich der Übergang zum Gebrauch der Münze stattfand. Gerade wie den Griechen im Zeitalter Homers, so diente auch den Römern bis in noch spätere Zeit das Rind und daneben das Schaf als Tauschmittel. Es war in Wirklichkeit ihr ältestes Geld, weshalb sie auch diesen Begriff in ihrer Sprache nicht besser als durch eine Ableitung von *pecus* auszudrücken wußten ... Aber das Bedürfnis des Verkehrs und das Beispiel anderer bereits mehr vorgeschrittener Völker führte frühzeitig dazu, neben dem Vieh noch andere Wertmesser anzuwenden. Dazu ist in Italien allgemein das Kupfer gebraucht worden. Das älteste Zeugnis dafür liefert wiederum die Sprache in dem von *aes* gebildeten Worte aestimare; außerdem beweisen es verschiedene Münzfunde. Das Metall wurde zugewogen, der rechtliche Kauf geschah per aes et libram ..."

Ursprünglich zirkulierten rohe Kupferstücke, die Einführung von gemarktem Kupfer, *aes signatum*, schreibt die Tradition dem Könige Servius zu, wie sie ihm auch die Feststellung von Maß und Gewicht beilegte. Aber „erst zur Zeit der Dezemviralgesetzgebung (451) ist man darauf gekommen, das Kupfer mit Wertzeichen zu versehen, es somit unabhängig von der Wage zu machen und ihm dadurch die Geltung der Münze zu verleihen". Es folgen nun bei Hultsch Untersuchungen über das Gewicht des ältesten Asses, über den Libralfuß, über die Ausmünzung des Kupfergeldes und über die Wertbestimmung der libralen Kupfermünze.

„Nach der einstimmigen Erklärung der Alten wog der Kupferas ursprünglich ein Pfund, seit der Reduktion vor dem ersten Punischen Kriege nur $^1/_6$ Pfund. Gleich als wollte er jedes Mißverständnis beseitigen, sagt Varro ausdrücklich, daß der alte As vor dem Punischen Kriege 288 Scrupel, also ein volles Pfund gewogen habe, und in gleicher Weise behaupten Plinius, Volusius Maecianus und andere, daß der As bis zu dem angegebenen Zeitpunkte pfündig (*as libralis* oder *librarius*) gewesen sei ... Befragen wir dagegen den Befund der Münzen, so zeigt sich ein auffallend abweichendes Ergebnis. Zwar gibt es einen römischen As, der den Betrag des Pfundes noch übersteigt; aber was besagt diese eine Ausnahme gegen die zahlreichen übrigen Stücke, welche sämtlich zwischen 11 und 9 römischen Unzen stehen? Wie erklärt sich dieses auffällige Zurückbleiben hinter dem Normalgewicht, welches in einem solchen Grade bei Silbermünzen ohne Beispiel ist?"

Im Gegensatz zu Mommsen, der die Erklärung des niedrigeren Fußes in einer der alten Kupferwährung korrelaten Silberwährung sucht, schlägt

HULTSCH für die Differenz zwischen dem normalen und effektiven Gewicht folgende Erklärung vor:

„Der Kupferas ist nicht eine eigentümliche Schöpfung der römischen Gemeinde, er steht im engen Zusammenhange mit dem in Latium und noch weiter in Mittelitalien verbreiteten Schwerkupfer, welches zum Teil älter sein muß als das römische. Diese Münzen lehnten sich an ein Pfund an, das wir als das latinische oder italische bezeichnen können, und von welchem das spätere römische Münzpfund nur der genaue nach dem griechischen Gewicht fixierte Betrag ist. Auf dieses Pfund wurde in Mittelitalien in den verschiedensten Abstufungen gemünzt . . ."

Die folgenden Paragraphen behandeln nun die Einführung der Silberprägung, die römische Silberwährung und die Goldprägung der römischen Republik. Der dritte Abschnitt des dritten Teiles ist dem Münzwesen der Kaiserzeit gewidmet.

In einem Anhange (S. 255—295) bespricht HULTSCH noch die partikularen Maße, Gewichte und Münzen in einzelnen Ländern, die er in zwei Gruppen ordnet: 1) Griechenland und der Osten, nämlich Böotien, Ägina, Korinth, Sparta, griechische Inseln, Makedonien, Kleinasien, Syrien, Palästina, Persien, Ägypten, Cyrenaica; 2) Italien und der Westen, nämlich Italien, Sizilien, Hispanien, Gallien, Germanien.

Den Schluß des ganzen Werkes bilden, abgesehen von einem Sachregister, neunzehn Tabellen, in denen die wichtigsten der im Texte behandelten Maße, Gewichte und Münzen übersichtlich geordnet, miteinander verglichen und auf moderne reduziert werden. Eine besondere Erwähnung verdient aber auch noch das gewaltige Material an Literaturnachweisen, die in den umfangreichen, fast jeder Seite des Buches beigefügten Anmerkungen enthalten sind. —

„Nächst den Münzen und Gewichten, den Längen- und Hohlmaßen, die in unseren Museen geborgen liegen, und den Abmessungen der Bauwerke, deren Reste sich erhalten haben, lehren über antikes Maß und Gewicht noch das meiste die dürftigen Trümmer, die von der metrologischen Literatur der Alten auf uns gekommen sind. Dem bei seiner Darstellung empfundenen Bedürfnisse nach Vereinigung und Erläuterung dieser zerstreuten Stücke hat HULTSCH selbst Abhilfe geschafft in den zwei Bänden seiner *Scriptorum metrologicorum reliquiae* (1864—1866), zu denen erst jüngste Funde erheblichen Zuwachs gebracht haben" (LIPSIUS). Die beiden Bände, die HULTSCH im engsten Zusammenhange mit seiner *Metrologie* in der Bibliotheca Teubneriana hat erscheinen lassen[1]), enthalten also, wie ihr Titel sagt, die Reste der metrologischen Literatur des Altertums, gesammelt zum Teil aus gedruckten und zum Teil aus ungedruckten Quellen. „Die Freunde unserer Wissenschaft werden ihm dafür noch dankbarer

1) Siehe hierzu, wie auch zur *Metrologie* selbst, die ausführliche Besprechung von W. CHRIST in FLECKEISENS Jahrbüchern 1865, 433—461.

als für die Ausarbeitung seines Handbuches sein. Bisher waren nämlich jene Schriften in verschiedenen größeren Werken, die in kleineren Bibliotheken nicht leicht zu finden sind, zerstreut, so daß sich der Forscher zu jeder einzelnen Detailfrage erst mühsam sein Material zusammentragen mußte. Wäre daher schon eine bloße Zusammenstellung jener Fragmente eine sehr verdienstvolle Arbeit gewesen, so hat sich Hultsch ein noch größeres Verdienst dadurch erworben, daß er überall den Text auf sicherer Grundlage zu geben sich bemühte ... Bei der Herausgabe jener Fragmente ist nun Hultsch in der Art verfahren, daß er unter den Text den kritischen Apparat in bündiger Kürze setzt, in einer besonderen Einleitung die kritischen Hilfsmittel in den einzelnen Fragmenten bespricht und in ausführlichen Prolegomena die metrologische Seite der einzelnen Texte erörtert. In diesen Prolegomena zeigt der Verfasser einen glänzenden Scharfsinn und ein ungemeines Geschick in der Lösung der schwierigsten Fragen des Maß- und Gewichtssystems: manche Angaben, denen wir noch in der *Metrologie* begegnen, sind hier berichtigt, viele andere durch subtile Beweisgründe erläutert und erhärtet, aber auch ganz neue Fragen, namentlich bezüglich der Maßverhältnisse der Ägypter sind hier angeregt und zum größten Teil in überzeugender Weise erledigt. Da ferner gerade bei metrologischen Tafeln der Wert der Angaben vorzüglich von der Erkenntnis der Zeit, in der dieselben in Geltung waren, abhängt, so hat sich Hultsch auch bemüht, die Zeit der Abfassung der einzelnen Fragmente zu ermitteln, soweit dies bei den spärlichen und schwachen Anhaltspunkten möglich war." Dies das sachkundige Urteil von Christ.

Das erste Bändchen, 1864 erschienen, ist den griechischen Schriftstellern gewidmet. Die eigentlichen metrologischen Fragmente (Nr. 1—101) sind, ähnlich wie in der *Metrologie*, in solche über Längen- und Flächenmaße, über Körpermaße, über Hohlmaße und Gewichte, und über Münzen geordnet. Daran schließen sich noch Fragmente aus griechischen Lexikographen (Nr. 102—107), namentlich Exzerpte aus Hesychius und Suidas. Ungefähr die Hälfte des ganzen Bändchens aber nehmen die schon erwähnten Prolegomena ein (S. 3—176), durch die die einzelnen Fragmente kommentiert werden.

Zu den wichtigsten metrologischen Fragmenten gehören unbedingt die des Heron, insbesondere die acht sogenannten Heronschen Maßtafeln. Von diesen Fragmenten waren die meisten gelegentlich schon früher von B. de Montfaucon (1688), A. Mai (1819) und J. A. Letronne (1851 durch Vincent) veröffentlicht worden, einige aber teilt Hultsch hier zum erstenmal mit. Die Tafeln über die Längen- und Flächenmaße sind von Hultsch nach den Pariser Handschriften vollständig wiedergegeben, aus ihnen ist auch im wesentlichen der erste Abschnitt zusammengesetzt.

Aber anch der zweite, der die Körpermaße behandelt, enthält Berechnungen, die Heron entlehnt sind. Begreiflicherweise ist denn auch ein nicht unbeträchtlicher Teil der Prolegomena den Heronschen Fragmenten gewidmet. Indessen können wir diese Untersuchnngen, die sich im großen und ganzen an Martin anschließen, hier nicht im einzelnen verfolgen, und so sei daher nur noch besonders anf die Erörterungen hingewiesen, die Christ gerade an diesen Teil der Darlegungen von Hultsch anknüpft. Wir kommen übrigens anf die Heronschen Fragmente noch wiederholt znrück.

Das zweite Bändchen der *Metrologici scriptores*, wie die Fragmente gewöhnlich zitiert werden, erschien 1866. Es enthält Fragmente (Nr. 108—141) ans römischen Schriftstellern, insbesondere ans Varro, aus Columella, aus den Gromatikern Frontinus, Hyginus, Balbus, aus Volusius Maecianus, Priscianus, Isidor u. a. Anch diesen Fragmenten gehen kommentierende Prolegomena vorans (S. 3—45). Den zweiten Teil des Bändchens füllen ausführliche nnd sorgfältig bearbeitete Indices zn dem ganzen Werke, ein Index graecus (S. 161—228), ein Index latinus (S. 229—261) und ein Conspectus auctorum (S. 261—262).

Zwanzig Jahre nach dem Erscheinen der *Metrologie*, 1882, gab Hultsch eine zweite Bearbeitung herans. In den beiden Jahrzehnten war die metrologische Literatur durch zahlreiche und verdienstvolle, zum Teil sogar ganz hervorragende Forschungen bereichert worden. Abgesehen von den eigenen Arbeiten von Hultsch, über die noch zn sprechen sein wird, ist da vor allem das Werk von J. Brandis *Das Münz-, Maß- und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf Alexander den Großen* (Berlin 1866) zu nennen. Hultsch hat diesem Werke, das er selbst als epochemachend bezeichnet, und von dem er sagt, daß es mit Mommsens *Geschichte des römischen Münzwesens* (Berlin 1860) die Grundlage des metrologischen Wissens der Gegenwart bilde, außer einer Anzeige im Literarischen Centralblatt eine sehr ausführliche Besprechnng in Fleckeisens Jahrbüchern (1867) gewidmet, in denen er wenige Jahre zuvor (1862) auch das Werk von Mommsen eingehend rezensiert hatte. Schon ein flüchtiger Blick auf die neue Auflage der *Metrologie* zeigt, daß man es zum Teil wenigstens mit einem ganz nenen Werke zn tun hat: bei vergrößertem Formate ist die Seitenzahl von 328 anf 746 angestiegen. Dieser Zuwachs betrifft allerdings zum weitans größten Teile den Anhang der alten Auflage, der über die partikularen ausländischen nnd provinzialen Maße gehandelt hatte und dem von der Kritik mit Recht „eine größere Ausführlichkeit nnd mitunter auch eine größere Genauigkeit“ gewünscht worden war. Der Hauptinhalt der ersten Anflage, die drei Teile, die der Darstellung der attischen und römischen Metrologie gewidmet waren, und die wir ausführlich besprochen haben,

hat zwar auch einige Erweiterung (von 254 auf 348 Seiten) erfahren, doch konnte sich Hultsch hier im wesentlichen darauf beschränken, die Darstellung den Ergebnissen der neueren Forschungen anzupassen. Als Beispiel sei etwa die Bestimmung der griechischen Längenmaße (§ 8) hervorgehoben. Es wird dort gezeigt, daß die Griechen ihren Schritt, *βῆμα*, nicht anders als zu $2^1/_2$ Fuß angesetzt haben können, und nicht zu 3 Fuß, wie man früher geglaubt hatte. Demnach war das Wegmaß, das die Griechen *στάδιον* nannten, gleich 240 Schritt, während Hultsch in der ersten Bearbeitung seines Handbuches im Anschluß an Ideler 2 Schritt gleich einer griechischen Orgyie und mithin 200 Schritt gleich einem Stadion gesetzt hatte.

Zu einer gänzlichen Umarbeitung und Erweiterung des alten Anhanges sah sich Hultsch namentlich dadurch veranlaßt, daß „die Frage nach dem Zusammenhange der griechisch-römischen Maße, Gewichte und Währungen mit denen des alten Ägyptens und Babyloniens nicht mehr beiseite gelassen werden konnte". So fügte denn Hultsch den drei Teilen der ersten Auflage statt des alten, nur 40 Seiten umfassenden Anhanges drei weitere Teile von zusammen 347 Seiten hinzu. Indessen müssen wir uns darauf beschränken, den Inhalt dieser drei neuen Teile (IV—VI) nur in aller Kürze zu skizzieren. Der vierte Teil (S. 349—528) handelt von den Systemen Ägyptens und Vorderasiens und von der Übertragung der vorderasiatischen Maße und Gewichte nach Griechenland. Es bedarf keiner besonderen Erwähnung, daß gerade für diesen Teil das Werk von Brandis maßgebend gewesen ist. Im einzelnen werden in diesem Teile besprochen: das altägyptische Maß- und Gewichtssystem, das babylonisch-assyrische System, das phönikische, altsyrische und karthagische System, das hebräische System, das persische System, und sodann endlich die Übertragung der vorderasiatischen Maße und Gewichte nach Griechenland. Der fünfte Teil (S. 529—653) bringt die partikularen Maße Griechenlands und des Ostens (das griechische Festland, griechische Inseln, Makedonien, Kleinasien, Syrien und phönikisches Küstenland, Palästina, Ptolemäisches und ägyptisch-römisches System der Längen- und Hohlmaße, Ptolemäische und ägyptisch-römische Gewichte und Münzen, Cyrenaica), und der sechste Teil endlich (S. 654—695) gibt die partikularen Maße Italiens und des Westens (Sizilien, Italien, Hispanien, Gallien, Germanien).

Daß auch die Tabellen am Schlusse des Buches (es sind ihrer jetzt 22 statt 19) und das Register (28 Seiten statt 9) zeitgemäß umgearbeitet worden sind, braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden. Indessen darf doch gesagt werden, daß das Register in der neuen Gestalt zu einem außerordentlich nützlichen Hilfsmittel für die verschiedensten metrologischen Fragen geworden ist, wie denn überhaupt derartige

Verzeichnisse nicht leicht einer gewissenhafteren und sorgfältigeren Hand anvertraut werden konnten als der von Hultsch.

Seitdem ist nun freilich wieder ein Vierteljahrhundert verflossen, und die Metrologie, eine verhältnismäßig junge Wissenschaft, ist nicht stehen geblieben. Die Ausgrabungen und die neuen Funde auf klassischem Boden haben manches zutage gefördert, was die Resultate, zu denen Hultsch in seinem Handbuche gelangt war, modifiziert oder gar widerlegt hat. „Aber für jede Weiterarbeit auf metrologischem Gebiete“, sagt Lipsius, „bildet das Werk ein unentbehrliches Hilfsmittel, das durch kein anderes ersetzt ist, und niemand hat an dieser Fortarbeit eifriger sich beteiligt als Hultsch selber.“

Es ist hier nicht möglich, neben den bereits besprochenen metrologischen Arbeiten auch noch die vielen anderen Einzeluntersuchungen zu durchgehen, die Hultsch teils vor dem Erscheinen der zweiten Auflage seines Handbuches durchgeführt und dann in diesem verwertet hat, teils später hat folgen lassen. Ein Teil dieser Untersuchungen ist rein metrologischer Natur, wie z. B. die Abhandlung aus dem Jahre 1863 *Zur Lösung der Frage über den Philetärischen Fuß*, jenen nach Philetäros (283—263) benannten Fuß, der schon in der ersten der acht Heronschen Tafeln als πούς βασιλικὸς καὶ Φιλεταίρειος eingeführt ist, und der als Zweidrittelmaß aus der großen oder königlichen Elle abgeleitet worden war. Diese ägyptische Elle, die mit der babylonischen identisch ist, maß 525—530 mm, so daß auf den Philetärischen Fuß 350—353 mm fallen, also nahezu $1^1/_5$ römischer Fuß, der 295,6 mm faßte. Dieser Gruppe von Untersuchungen gehören unter anderen auch die Abhandlungen *Drei Hohlmaße der römischen Provinz Ägypten* und *Ein Flüssigkeitsmaß der Provinz Hispanien und die Fassungsräume einiger antiken Dolien* an, die Hultsch 1895 und 1897 veröffentlicht hat.

Eine zweite Gruppe der metrologischen Arbeiten von Hultsch ist mehr der Kunstarchäologie, besonders den antiken Tempelbauten gewidmet. Ich nenne die drei in der Archäologischen Zeitung in den Jahren 1880—1881 veröffentlichten Abhandlungen *Das Grundmaß der griechischen Tempelbauten*, *Die Bestimmung des attischen Fußes nach dem Parthenon und Theseion*, *Die Maße des Heraion zu Samos und einiger anderen Tempel* und sodann namentlich den schönen, inhaltreichen Vortrag *Heraion und Artemision, zwei Tempelbauten Ioniens*, den Hultsch 1881 in einem dem Andenken an Julius Klee gewidmeten Vortragszyklus gehalten hat. Das Heraion war der Heratempel, den Herodot unter den drei von den Samiern ausgeführten Wunderwerken der Baukunst nennt, und das Artemision jener herrliche Artemistempel zu Ephesus, den der wahnwitzige Herostratus in der Nacht, in der Alexander der Große ge-

boren wurde, in Brand gesteckt hatte. Bei seinen archäologischen Untersuchungen ging nun Hultsch darauf aus, für die griechischen Tempelbauten, von denen noch Überreste vorhanden sind, zunächst den zugrunde liegenden Maßstab festzustellen. So rechnete er z. B. für das Artemision die einzelnen Dimensionen nach den geringen Überbleibseln und nach den Angaben des Plinius aus und fand, daß die Breite des Tempels, an der Unterstufe gemessen, zusammen mit der Länge gerade ein babylonisches Stadion, nämlich 240 Schritt oder 360 Ellen betrage, mithin der ganze Umfang zwei Stadien. Nach diesem Maß für den Umfang der Baufläche werden nun die Hauptdimensionen nach genauem Maßstab, und zwar in ältester Zeit nur nach der Elle (der ägyptischen Königselle) bestimmt. Die kleineren Dimensionen werden zumeist durch den Fuß und seine Teile geregelt.

„Nach diesen Gesichtspunkten ist es möglich, die ursprünglichen Maße und Verhältnisse eines Tempels wieder aufzufinden, selbst wenn nur geringe Überreste von ihm erhalten sind. Wir ermitteln zunächst die Norm der zugrunde liegenden Elle, dann des beigeordneten Fußes, suchen ferner die Hauptdimensionen und ihre gegenseitigen Verhältnisse auf und schreiten weiter, immer in sicherer Schlußfolgerung ein Glied an das andere reihend, zu dem Wiederaufbau des Tempels, dessen Bild endlich in voller ursprünglicher Schönheit und Harmonie vor das geistige Auge tritt."

Es scheint nun freilich, daß sich Hultsch bei diesen Rekonstruktionen doch allzusehr von seiner rechnerischen Phantasie hat leiten lassen. Denn die Ergebnisse, zu denen er für die verschiedenen Tempelbauten gelangte, stießen bei den Kundigen auf ernsten Widerspruch, und zwar war es kein Geringerer als Wilhelm Dörpfeld, der in seiner Abhandlung *Die Proportionen und Fußmaße griechischer Tempel* (Archäologische Zeitung **39**, 261—270), auf Grund seiner eigenen, an Ort und Stelle ausgeführten Messungen die Resultate von Hultsch als unrichtig zurückwies. „Der Tempel des Heraion hatte ganz andere Dimensionen als die von Hultsch berechneten," lautete sein Urteil, „und möglicherweise hatte der von Hultsch auf 0,3087 m bestimmte attische Fuß einen ganz anderen Wert." Bei der Unsicherheit, die einigen antiken Grundmaßen noch anhaftet, warnt Dörpfeld überhaupt vor metrologischen Spekulationen und er schließt seinen Aufsatz mit den bemerkenswerten Worten: „Hat die vorstehende Untersuchung ergeben, daß selbst ein so bekannter Maßstab wie der attische Fuß von ca. 0,308 m noch nicht als vollkommen sicher erwiesen betrachtet werden darf, so wird man den Wunsch nicht für unberechtigt halten, daß sich die metrologische Forschung noch nicht mit den geringen Schwankungen einzelner Fußmaße oder mit hypothetischen Maßstäben (z. B. einem *modulus restitutus* des attischen Fußes, einem Korrelate des samischen Fußes, einem ephesischen Fuße, einer attischen Bauelle usw.) beschäftigen, sondern daß sie sich vorläufig darauf beschränken

möge, sichere Fundamente zu legen, um später auf diese das ganze Gebäude der antiken Metrologie aufbauen zu können. Dies kann aber nur dadurch erreicht werden, daß zunächst die hauptsächlichsten Dimensionen der antiken Tempel in Metermaß genau bestimmt und dann diese Werte sämtlich miteinander verglichen werden. Keinesfalls dürfen aber zu metrologischen Untersuchungen Bauwerke benutzt werden, von denen fast nichts erhalten ist, oder deren Überreste keine genauen Messungen gestatten." — Wenn man das chronologische Verzeichnis der Arbeiten von Hultsch überblickt, so kann man sich des Eindruckes nicht erwehren, daß Hultsch den Ausführungen von Dörpfeld wohl innerlich zugestimmt habe (Poland bestreitet dies freilich). Denn während gerade in den Jahren 1880—1882 kunstarchäologische Untersuchungen bei ihm im Vordergrund standen, hören derartige Publikationen nun plötzlich auf.

Einen sehr breiten Raum in der gesamten wissenschaftlichen Arbeit von Hultsch nimmt sodann eine dritte Gruppe metrologischer Untersuchungen ein, nämlich die, die sich auf die antiken Gewichte und die antiken Münzen bezieht. Da diese Untersuchungen indessen verhältnismäßig weit abliegen von den eigentlichen mathematischen Arbeiten von Hultsch — denen wir uns doch schließlich einmal werden zuwenden wollen —, so muß ich mich hier ganz kurz fassen. Als erste numismatische Abhandlung ist die Programmschrift vom Jahre 1862 *De Damareteo argenteo Syracusanorum nummo* hervorzuheben, mit der sich Hultsch in die Kreuzschule einführte. Sodann erinnere ich an die bereits früher genannten ausführlichen Besprechungen, die Hultsch 1862 und 1867 den Werken von Mommsen und von Brandis in Fleckeisens Jahrbüchern hat zuteil werden lassen, und die viel Selbständiges enthalten; ich nenne ferner die ebenfalls in Fleckeisens Jahrbüchern befindlichen Aufsätze *Der Denar Diokletians* (1880) und *Zu dem Komiker Krates* (1894) und hebe endlich unter Verweisung auf das am Schlusse dieser Biographie befindliche Verzeichnis der Publikationen von Hultsch noch die beiden umfangreichen Abhandlungen *Die Gewichte des Altertums nach ihrem Zusammenhange dargestellt* und *Die Ptolemäischen Münz- und Rechnungswerte* hervor, die Hultsch 1898 und 1903 in den Abhandlungen der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften hat erscheinen lassen. In der ersten dieser beiden Abhandlungen leitet Hultsch die Entwickelung der Gewichte des Altertums nicht mehr, wie in seiner *Metrologie*, aus dem babylonischen, sondern aus dem ägyptischen Gewichtssysteme ab, indem er die ägyptische Kite als Maß für alle anderen Gewichte des Altertums bezeichnet, für die ägyptischen, die babylonischen, die kleinasiatischen, die griechischen, die römischen und die karthagischen. Von der zweiten Abhandlung ist soeben (Mai 1908)

eine erweiterte Bearbeitung für Svoronos' Werk über die Münzen der Ptolemäer unter dem Titel *Die Gewichte und Werte der Ptolemäischen Münzen* erschienen, deren von Poland besorgte Korrektur gerade mit dem Tode von Hultsch zum Abschluß kam. Svoronos sagt darüber in der Vorrede:

„Schon als der greise Gelehrte die Neubearbeitung begann, und auch während des ganzen Jahres, in dem er dieser Beschäftigung oblag, war er leider ernstlich krank, und während der Drucklegung verschlimmerte sich sein Zustand dermaßen, daß er die Korrektur der Druckbogen und die Zusammenstellung der Tabellen seinem hervorragenden Freunde Herrn Prof. Franz Poland übertragen mußte, der mir mit der Beendigung der Arbeit zu meinem großen Bedauern auch das Hinscheiden des verehrten Gelehrten meldete; ich habe somit die schmerzliche Freude, hier sein letztes Werk der Öffentlichkeit zu übergeben."

Der ägyptischen Metrologie waren überhaupt die letzten größeren Arbeiten von Hultsch gewidmet. Es sei nur noch an seine *Beiträge zur ägyptischen Metrologie*, 1903—1906, erinnert. Und wie sich bei ihm auch sonst metrologische und mathematische Untersuchungen in eins verschmolzen, so auch hier. Denn in die ägyptische Metrologie greifen z. B. auch die Abhandlungen *Das elfte Problem des mathematischen Papyrus von Akhmim* (1894) und *Die Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung* (1895) über, die der ägyptischen Rechenkunst angehören und die uns daher noch später beschäftigen werden.

Obwohl es durchaus nicht meine Absicht sein kann, die so vielgestaltige Tätigkeit von Hultsch auf dem weiten Gebiete der Metrologie auch nur einigermaßen erschöpfend zu schildern — ich bin zufrieden, wenn es mir gelungen ist, dem Leser eine ungefähre Vorstellung von der Arbeit zu geben, die Hultsch hier bewältigt hat —, so wäre meine Darstellung doch allzu unvollständig, wollte ich nicht noch, wenn auch nur ganz kurz, der zahlreichen metrologischen Beiträge gedenken, die Hultsch der *Realencyklopädie* von Pauly-Wissowa zugewendet hat. Nur als Beispiele seien von diesen die Artikel *Artabe*, *Βῆμα*, *Χοῖνιξ*, *Damarete* und *Damareteion*, *Dareikos*, *Decussis*, *Δεκανουμμίον*, *Denarius*, *Didrachmon*, *Drachme*, *Dupondius* genannt, von denen einige freilich, wie besonders die umfang- und inhaltreichen Artikel *Denarius* (13 Spalten) und *Drachme* (21 Spalten), selbständigen größeren Abhandlungen gleichkommen.

Doch nun dürfte es endlich an der Zeit sein, daß wir uns den eigentlichen mathematisch-historischen Arbeiten von Hultsch zuwenden. Aber auch dazu müssen wir erst noch einmal zur Metrologie zurückkehren, denn aus ihr zunächst sind diese Arbeiten hervorgegangen, so wie die metrologischen ursprünglich aus den rein philologischen. Schon in der ersten Auflage seiner *Metrologie* (1862) sagt Hultsch bei der Besprechung der Quellen für die Metrologie, insbesondere der aus dem Altertume erhaltenen metrologischen Schriften:

„Die nachweislich älteste Erwähnung von metrologischen Schriftstellern findet sich bei Galen, von dem *οἱ περὶ τῶν σταθμῶν καὶ μέτρων γράψαντες* mehrfach angeführt werden. Eine Schrift des Dardanos *περὶ σταθμῶν* wird von Lydos erwähnt, darin befand sich auch die Nachricht über das vorsolonische attische Talent. Ein anderer Schriftsteller auf diesem Gebiete, Diodoros, wird von Suidas zitiert. Er hat ebenfalls eine Schrift *περὶ σταθμῶν* verfaßt und darin die Bestimmung des Talentes und seiner Teile gegeben. Näheres kennen wir nicht über ihn.

Was wir sonst von metrologischen Schriften wissen, verdanken wir den verschiedenen Fragmenten über Maße und Gewichte, die uns noch erhalten sind. Das der Zeit der Abfassung nach älteste ist vermutlich das kleine in den Analekten der Benediktiner[1]) veröffentlichte Stück *περὶ μέτρων καὶ σταθμῶν καὶ τῶν δηλούντων αὐτὰ σημάτων*, denn hier erscheint noch die Bestimmung des Denars zu $\frac{1}{84}$ Pfund, es muß also vor Nero abgefaßt sein. Wir zitieren den anonymen Verfasser mit Böckh als den Metrologen der Benediktiner. Weit umfänglicher sind die unter Herons Namen überlieferten Fragmente. Die Untersuchung über den Verfasser und besonders über die Zeit der Abfassung ist mit großem Eifer von verschiedenen Gelehrten geführt worden, kann aber trotzdem noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden. Denn trotz der umfänglichen Werke Letronnes und Martins, die in neuester Zeit diese Frage behandelt, und trotz der Beiträge, welche von deutschen Gelehrten besonders Böckh dazu geliefert hat, ist ein sicheres Resultat noch nicht erzielt ... Nun besitzen wir unter Herons Namen verschiedene Bruchstücke, welche sämtlich auf ein größeres, verloren gegangenes Werk über Geodäsie zurückgehen. Dieses Werk, welches vielleicht *γεωμετρούμενα* betitelt war, enthielt eine vollständige Auseinandersetzung über die praktische Geometrie oder die Kunst des Feldmessens. Auch befand sich darin eine Erklärung und Übersicht über die Maße, nach welchen die Steuern erhoben wurden; dies müssen die von Eutokios zitierten *μετρικά* des Heron sein, und ebendaher rühren die drei so wichtigen metrologischen Fragmente, welche Herons Namen tragen. Das erste enthält die zur Zeit des Kompilators gültigen Längenmaße, das zweite die älteren damals nicht mehr gebräuchlichen. Wir haben in dieser zweiten Tabelle die vollständige Darstellung des ägyptischen Maßsystems, wie es unter Einfluß der griechischen Maße von den Ptolemäern gebildet und später unter römischer Herrschaft noch um einige römische Maße bereichert war. Die dritte Tabelle steht der ersten parallel, enthält aber viele abweichende Bestimmungen. Die beiden ersten Fragmente sind zuerst in den Analekten der Benediktiner veröffentlicht und neuerdings von Letronne aus den Manuskripten der Pariser Bibliothek nebst dem dritten Fragmente herausgegeben worden."

Ich habe diese Worte von Hultsch aus dem Jahre 1862 hier absichtlich wiedergegeben, um die damalige Situation kurz zu kennzeichnen. Was Hultsch in bezug auf Heron vorfand, waren im wesentlichen die Arbeiten von J. A. Letronne (1851 von A. I. H. Vincent herausgegeben) und H. Martin (1854). Als er sich daher bei der Bearbeitung des ersten Bändchens der *Metrologici scriptores* eingehender mit den metrologischen Fragmenten Herons, sowohl den planimetrischen als den stereometrischen, zu beschäftigen hatte, da stellte sich für ihn die unabweisbare Notwendigkeit heraus, die Beziehungen dieser Stücke zueinander und zum

1) *Analecta Graeca ... eruerunt monachi Benedictini.* Paris 1688.

Ganzen so gut als möglich ins klare zu bringen. Das mußte aber zu der Aufgabe führen, die geometrischen und stereometrischen Werke Herons, soweit sie in den damals bekannten Handschriften vorlagen, im Urtexte herauszugeben. Dieser keineswegs leichten Aufgabe unterzog sich Hultsch mit solcher Energie, daß er noch in demselben Jahre 1864, in dem der erste Band der *Metrologici scriptores* erschien, auch *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae* herausgeben konnte.[1])

Über die der Ausgabe zugrunde liegenden Handschriften berichtet Hultsch in der Vorrede (V—XXIV): es sind neun Pariser und eine Münchner. Mit Ausnahme des Parisinus A (Paris. gr. 1670), der dem 13. Jahrhnndert angehört, reichen sie aber alle nicht über das 16. Jahrhundert znrück. Überdies ist keine einzige vollständig, einzelne enthalten sogar nur geringe Fragmente. So mußte Hultsch für die einzelnen Abschnitte seiner Ausgabe bald die eine, bald die andere Handschrift auswählen, oder er mußte den Text dnrch passende Kombination feststellen. Über alle diese Verhältnisse, die wir hier nicht eingehender verfolgen können, gibt die Vorrede ausführliche Auskunft. Dort finden sich auch die weiteren Mitteilungen über Inhalt nnd Anordnnng der ganzen Ausgabe. Sie zerfällt in zehn Abschnitte. Der erste (S. 1—40) enthält *Heronis definitiones nominum geometriae*, der zweite (S. 41—140) *Heronis geometria*. Am Schlusse dieses zweiten Abschnittes (S. 138) findet sich, offenbar nachträglich beigefügt, die Maßtafel, die ehemals als die zweite gezählt wurde, jetzt aber als die älteste gilt und daher auch in den *Metrologici scriptores* (I, 180) als Tabula Heroniana I die Reihe eröffnet.[2]) Diese Tafel, die bereits römische Maße (ὁ Ἰταλικὸς πούς) aufweist, wird von Hultsch dem 1. oder 2. Jahrhundert n. Chr. zugewiesen. Sie galt ihm nicht als Herons Original, sondern vielmehr als „die Überarbeitung einer aus der Ptolemäerzeit stammenden ältesten Tafel“. Diese Auffassung steht natürlich im engsten Zusammenhang mit der Heron-Frage, d h. mit der Frage, wann eigentlich Heron gelebt hat. Hultsch (*Metrol. script.* I, 9) hatte ihn als Schüler des Ktesibius in die zweite

1) Siehe hierzu die Besprechungen von C. Wex nnd R. Hoche in Fleckeisens Jahrbüchern 1865, 41—44 und 461—466. Diese Besprechungen umfassen zugleich auch die Abhandlung über den Heronischen Dreiecksatz, von der gleich nachher die Rede sein wird.

2) Ebenfalls im zweiten Abschnitt (S. 47) befindet sich die bereits früher erwähnte, mit den Worten *τὰ δὲ μέτρα ἐξηύρηνται ἐξ ἀνθρωπίνων μελῶν* beginnende Maßtafel, die Hultsch in den *Metrologici scriptores* (I, 187) als Tabula Heroniana V bezeichnet, und die er dem 3. Jahrhundert n. Chr. zuweist (s. *Metrologie* 2. Aufl., S. 9, Anm. 2 nnd 3). Den Schluß des ersten Abschnittes (S. 39) bildet die Tabula Heroniana VII (*Metrol. script.* I, 193). Diese drei Tafeln I, V, VII sind die wichtigsten. Sie waren auch schon von Letronne, die Tafeln I und V vorher bereits von Montfaucon herausgegeben worden.

Hälfte des 2. Jahrhunderts v. Chr. gesetzt und an dieser Auffassung auch später noch festgehalten. Indessen kann es unmöglich meine Absicht sein, hier auf diese Streitfrage, in der das letzte Wort noch nicht gesprochen ist, näher einzutreten, und ich begnüge mich daher, auf die Argumente hinzuweisen, die Wilhelm Schmidt (*Heronis opera* I, p. XI u. flg.) gegen Hultsch geltend gemacht hat, und kehre nun nach dieser Abschweifung zur Heron-Ausgabe von 1864 zurück.

Der dritte Abschnitt (S. 141—152) enthält *Heronis geodaesia*, der vierte (S. 153—171) *Heronis introductiones stereometricorum*, der fünfte (S. 172—187) *Heronis stereometricorum collectio altera*, der sechste (S. 188 bis 207) *Heronis mensurae* (*μετρήσεις*), der siebente (S. 208—234) *Heronis liber geeponicus*. Besonders bemerkenswert ist der achte Abschnitt (S. 235—237) *Heronis mensura trianguli* (excerpta e libro *περὶ διόπτρας*), in dem die Aufgabe gelöst wird, den Inhalt eines Dreiecks zu finden, von dem die drei Seiten gegeben sind. „Infinitum paene laborem attulit mihi Heronis gravissimum illud theorema, quo areae trianguIaris mensura ex tribus lateribus efficitur“, sagt Hultsch von diesem Abschnitt in der Vorrede. Wir halten uns indessen an dieser Stelle nicht weiter dabei auf, da Hultsch diesem „Heronischen Lehrsatz“ eine besondere Abhandlung gewidmet hat, die fast gleichzeitig mit seiner Heron-Ausgabe erschienen ist, und von der noch ausführlicher zu sprechen sein wird.

Die beiden letzten Abschnitte der Ausgabe enthalten Zusätze. Der neunte (S. 238—244) bringt *Didymi Alexandrini mensurae marmorum ac lignorum* (*Διδύμου Ἀλεξανδρέως μέτρα μαρμάρων καὶ παντοίων ξύλων*), die Hultsch wegen der Übereinstimmung der darin enthaltenen Maßtafeln mit denen Herons aufgenommen hat. Der zehnte und letzte Abschnitt (S. 245—280) enthält *Anonymi variae collectiones ex Herone, Euclide, Gemino, Proclo, Anatolio, in codicibus continuo adscriptae ad Heronis definitiones*.

Die Ausgabe von Hultsch ist eine reine Textausgabe ohne Übersetzung. Um so größere Sorgfalt wurde auf den Text selbst verwendet und auf den ihn Seite für Seite begleitenden kritischen Apparat, der in eingehendster Weise über die handschriftlichen Varianten Rechenschaft gibt, zugleich aber auch einen Einblick in die mühevolle Tätigkeit des Herausgebers gewährt. „Wer jemals selbst kritische Studien an den griechischen Mathematikern gemacht hat, kennt die unsäglichen Schwierigkeiten, welche eine Textfeststellung mit sich bringt. Die Handschriften rühren mit sehr wenigen Ausnahmen aus spätester Zeit — wenige liegen vor dem 15., die meisten stammen sogar erst aus dem 16. und 17. Jahrhundert —, dazu der Umstand, daß selten eine Schrift in ihrer ursprünglichen Gestalt überliefert ist, sondern meist zwei oder noch mehr Rezensionen durchgemacht hat, ferner die oscitantia librariorum, welche nirgends so entsetzlich

zutage tritt wie bei mathematischen Schriften mit ihrem meist völlig unverstandenen Inhalt, dazu die Sprache, deren Gebrauch festzustellen höchstens bei den an Eukleides sich anschließenden Geometern mit einiger Sicherheit erreicht werden kann, endlich die Flut von Abbreviaturen, welche sich häufig aller Erklärung entziehen, meist nur durch Konjektur und äußerst mühselige Vergleichung entziffert werden können, zumal diese ganz besonders der Willkür und dem Unverstande der Abschreiber preisgegeben waren — alles dieses muß man berücksichtigen, um den ganzen Wert einer Ausgabe würdigen zu können, wie die vorliegende des Heron aus Alexandreia.“ So äußerte sich R. Hoche in der oben erwähnten Besprechung.

Den Schluß des Werkes bilden die Indices. Der erste (S. 281—315) ist ein Index verborum, der sich aber nur auf die Abschnitte I—IX, d. h. auf Heron und Didymus, bezieht. Hultsch hatte geglaubt, diesen Index von dem zweiten Index verborum (S. 316—333), der die *Variae collectiones* im letzten Abschnitt umfaßt, vollständig abtrennen zu sollen. Dementsprechend sind denn auch bei dem dritten Index (S. 333), dem Conspectus auctorum, die beiden ersten auseinandergehalten.

Fast vierzig Jahre lang war die Ausgabe von Hultsch die Hauptquelle für das Studium der geometrischen Schriften Herons gewesen. Freilich — daß diese Schriften in der vorliegenden Form direkt auf Heron zurückzuführen seien, das glaubte Hultsch natürlich nicht. Darüber hatte er sich ja auch schon bei Besprechung der Heronschen Maßtafeln (z. B. *Metrol. script.* I, 23) geäußert, und er ist dann auch später noch bei anderen Gelegenheiten auf diese Frage zurückgekommen, so z. B. 1894 bei seiner Besprechung von Cantors *Vorlesungen* I². Dort sagt er:

„Die bis auf unsere Zeit gekommenen Heronischen Texte sind echt, insofern sie den Autornamen und in der Hauptsache auch die ursprüngliche Anlage und Gestaltung der Heronischen Werke bewahrt haben, unecht aber insofern, als sie im stetigen Dienste der Praxis zu wiederholten Malen neu aufgelegt und dabei je nach den Zeitbedürfnissen überarbeitet worden sind. Selbstverständlich hat der arabische Übersetzer der Mechanik eine solche Neubearbeitung benutzt; jene älteren Texte, die einst dem Vitruv und den Gromatikern vorgelegen haben, waren im Mittelalter ebensowenig noch vorhanden wie heutigentags.“

Zu den letzteren Worten durfte nun freilich Wilhelm Schmidt (*Heronis opera* I, p. XXI) mit Recht bemerken: „Um mit dem letzten Argumente zu beginnen, so folgt daraus, daß wir heute keine älteren Texte mehr haben, noch keineswegs, daß die Araber auch keinen hatten. Zur Vorsicht in solchen Dingen mahnt jedenfalls der Umstand, daß R. Schöne vor zwei Jahren die *Μετρικά* in einer alten Handschrift entdeckt hat (Ende 1896 in der Konstantinopeler Handschrift Nr. 1 des alten Serails aus dem 11. Jahrhundert), eine Schrift Herons, von der man doch seit den Zeiten

des Pappus und Eutokios, dem Ende des 3. und dem 6. Jahrhundert n. Chr., keine Spur wieder hatte finden können."

Mit der Veröffentlichung der *Μετρικά* (durch H. Schöne im 3. Bande der neuen Heron-Ausgabe, 1903) ist die Frage nach der „Echtheit" der von Hultsch herausgegebenen Schriften in ein neues Stadium getreten, und ihr Anrecht an die Autorschaft Herons ist in noch höherem Maße als früher zweifelhaft geworden. Indessen sind die Akten darüber doch noch nicht geschlossen, und die uns vorliegenden Arbeiten von Hultsch gehen auch keine Veranlassung, noch länger bei dieser Frage zu verweilen.[1]) Wie aber auch schließlich die Entscheidung ausfallen möge, die Ausgabe von Hultsch wird doch immer ihren Wert behalten als eine sehr willkommene Bereicherung unserer Kenntnis der mathematischen Wissenschaft des Altertums.

Fast gleichzeitig mit der Heron-Ausgabe hat Hultsch, wie schon früher erwähnt wurde, eine Abhandlung veröffentlicht, die speziell dem „Heronischen Lehrsatz" gewidmet ist. In dieser inhaltreichen Abhandlung, die R. Hoche[2]) mit Recht „ein wahres Muster einer kritischen Untersuchung" genannt hat, gibt Hultsch zunächst eine kurze Übersicht über die Geschichte der Heronischen Frage. Diese Übersicht knüpft an die uns bekannten Vorarbeiten vor Hultsch an, nämlich die schon mehrfach zitierten Veröffentlichungen von B. de Montfaucon (1688), J. A. Letronne (1851 durch Vincent) und H. Martin (1854), um dann speziell bei dem Werke von G. Venturi, *Commentari sopra la storia e le teorie dell'ottica*, tomo I, Bologna 1814, zu verweilen. In diesem Werke hatte nämlich Venturi gezeigt, „daß das Problem, die Fläche des Dreieckes aus den drei Seiten zu bestimmen, dasselbe, das man anfangs Gelehrten des 15. Jahrhunderts, dann den Arabern, zuletzt den Indern zuschrieb, bereits von Heron gefunden, und die vollständige Beweisführung in der Heronischen Schrift *περὶ διόπτρας* enthalten sei". Die *διοπτρικὴ τέχνη* der Alten hatte mit der Wissenschaft der Optik nichts zu tun, sondern war „ein Teil der praktischen Geometrie, insofern dieselbe zur Raummessung sich des Instrumentes bediente, welches den Namen *διόπτρα* führt. Die Heronische Schrift *περὶ διόπτρας* enthält zunächst eine Beschreibung dieses Instrumentes, und danach zahlreiche Aufgaben, in denen dasselbe seine Anwendung findet, außerdem aber auch einige Probleme der praktischen Geometrie und der Mechanik, die nichts mit dem Diopter zu tun haben. Diese haben sicher nicht ursprünglich zu dem Werke gehört, sie sind von einem späteren Bearbeiter aus anderen Heronischen Schriften eingeschoben worden.

1) Die umfangreiche Literatur zu dieser Frage, wie zu der Heron-Frage überhaupt, findet sich in dem wertvollen Berichte *Mathematik, Mechanik und Astronomie 1902—1905*, den K. Tittel in Bursians Jahresbericht 1906 erstattet hat (s. dort S. 157—168). 2) Siehe S. 347 Anm. 1.

Wir sind hier einmal in dem Falle, einem unberufenen Interpolator Dank zu wissen, denn nur durch ihn ist uns der Satz über das Dreieck erhalten". Diese letzteren Ausführungen von HULTSCH haben nun freilich heute keine Gültigkeit mehr. Denn einerseits befindet sich der HERONische Dreiecksatz mit fast denselben Worten auch in den *Μετρικά* (*HERONIS opera* III, p. 20, 6), und sodann hat H. SCHÖNE in der Vorrede (p. XIX) zu diesem dritten Bande nachgewiesen, daß das von HULTSCH als interpoliert bezeichnete Kapitel XXX tatsächlich in die Dioptra gehört.

HULTSCH gibt nun zunächst eine wortgetreue Übertragung von VENTURIS Übersetzung, wobei er der neu zu zeichnenden Figur wegen einige zweckmäßige Modifikationen einführt, um dann unmittelbar darauf den bisher noch nicht edierten Originaltext folgen zu lassen, wie er sich in dem Pariser cod. graec. 2430 befindet, demselben, den auch VENTURI benutzt hatte. Um eine einfache Abschrift handelte es sich dabei freilich nicht, und man versteht die bereits früher (S. 348) zitierten Worte „infinitum paene laborem etc.", wenn man liest, was HULTSCH darüber schreibt: „Die Handschrift ist, wie die meisten, in welchen die griechischen Mathematiker uns überliefert sind, sehr jung; sie gehört dem 16. Jahrhundert an. Eine große Schwierigkeit machten die ungewöhnlichen Abkürzungen, mit denen sie geschrieben ist. Ich entnahm daher eine in jedem Zug getreue Kopie und probierte dann die verschiedenen fast hieroglyphischen Zeichen so lange durch, bis alles untereinander stimmte." HULTSCH berichtet nun über die mühsame Entzifferung der verschiedenen rätselhaften Zeichen noch genauer, bevor er seinen so bereinigten griechischen Text folgen läßt. Nach einer sich daran anschließenden ausführlichen Erläuterung des Originaltextes und einer Begründung der darin vorgenommenen Änderungen fährt HULTSCH fort:

„Dies ist der HERONische Beweis, der nun, so hoffen wir, für alle in seiner vollen, schönen Klarheit sich darstellt. Daß NEWTON, EULER u. a.[1]) für denselben Lehrsatz andere Beweise erfunden haben, kann dem Verdienste des alten Alexandriners keinen Eintrag tun; im Gegenteil, dasselbe muß um so glänzender hervorstrahlen, da er fast zwei Jahrtausende früher mit viel beschränkteren wissenschaftlichen Mitteln dasselbe Ziel erreicht hat. Nicht weniger interessant aber als der Lehrsatz selbst ist dessen weitere Geschichte, über die wir jetzt noch einige Bemerkungen hinzufügen wollen."

Der Beweis des Satzes erscheint nirgends wieder, der Satz selbst aber, und zwar allgemein ausgesprochen, doch ohne Beweis, findet sich noch einmal in der *Geodäsie HERONS* (S. 151 der Ausgabe von HULTSCH), und sodann speziell für das Dreieck mit den Seiten 13, 14, 15 in der *Geometrie* (S. 71). Dieselbe Aufgabe ist zuletzt wiederholt bei dem

1) Den näheren Nachweis gibt KLÜGEL im mathematischen Wörterbuch unter Dreieck § 36. Vgl. auch CHASLES, *Geschichte der Geometrie*, S. 481, 483.

Byzantiner Johannes Pediasimus, der im 14. Jahrhundert eine Bearbeitung der Heronischen Geometrie verfaßte. Sodann ist von römischen Gromatikern M. Junius Nipsus zu nennen, der im 2. Jahrhundert einen allerdings sehr entstellten Auszug aus Heron angefertigt hat, in dem sich das gleiche Beispiel vorfindet. Aber auch zu den Hindus hat der Satz seinen Weg gefunden, Brahmegupta und später Bhaskara haben ihn bearbeitet. Das alles wird von Hultsch an Hand der Übersetzung Colebrookes ausführlich auseinandergesetzt. Den Schluß der trefflichen Abhandlung bildet der Nachweis des Weges, den der Satz von den Griechen zu den Arabern und von diesen durch Leonardo von Pisa und Pacioli nach dem Abendlande genommen hat. „Gerade dieser Beweis darf für ein Muster besonnener Kritik erklärt werden; ein Widerspruch ist schlechterdings nicht möglich", sagt Hoche am Schlusse seiner mehrfach zitierten Besprechung. Diese Worte beziehen sich auf die charakteristische Reihenfolge der Buchstaben, die in dem Beweise von Leonardo verwendet sind, nämlich *a b g t e z h k l m n*, eine Reihenfolge, der das griechische Alphabet zugrunde gelegen haben muß. Hultsch zeigt nun — und diese Erkennungsmethode hat er zuerst angewandt —, daß gerade diese Reihenfolge für arabische Bearbeitungen griechischer Schriften charakteristisch ist, und daß daher im vorliegenden Falle die Buchstabenfolge mit Sicherheit den griechischen Ursprung des von Leonardo überlieferten Beweises bekundet. —

Indem wir scheinbar einen Zeitraum von zwölf Jahren überspringen, wenden wir uns nun zu dem Werke, durch das Hultsch seinen Namen mit unauslöschlichen Zügen in die Annalen der mathematisch-historischen Wissenschaft eingeschrieben hat, und das allein ausreichen würde, ihm für alle Zeiten die dankbare Anerkennung der Nachwelt zu sichern. Es ist kaum nötig hinzuzufügen, daß von der Ausgabe der mathematischen Sammlung des Pappus die Rede ist.

In der Tat, für den Mathematiker ist Hultsch in erster Linie der Herausgeber des Pappus! Aber auch von Hultsch selbst darf gesagt werden, daß unter allen den ausgezeichneten Arbeiten, mit denen er die Wissenschaft bereichert hat, die Ausgabe des Pappus unzweifelhaft in vorderster Reihe steht, und daß ihr vielleicht nur noch die Polybius-Ausgabe an die Seite gestellt werden kann. Hat er doch auch der Pappus-Ausgabe mehr als ein Jahrzehnt seines Lebens gewidmet, und ist doch auch sie wiederum für ihn eine fast unerschöpfliche Quelle weiterer Forschungen gewesen.

Über die Entstehungsgeschichte, über Umfang und Inhalt, sowie über die Bedeutung seiner Ausgabe der *Collectio* des Pappus hat uns Hultsch selbst sehr eingehend berichtet: zunächst in den Vorreden, die

jedem der drei Bände des großen Werkes vorausgehen, und sodann in den Selbstanzeigen (1879), die sich im Repertorium von Königsberger und Zeuner und im Bullettino von Boncompagni finden. Danach hatte er den Plan zu dem Werke schon sehr früh gefaßt, aber erst 1864, nachdem er die Heron-Ausgabe und anderes, was damit zusammenhing, abgeschlossen hatte, war es ihm möglich geworden, die Arbeit in Angriff zu nehmen. Dafür begann sie dann auch gleich unter den günstigsten Auspizien. Denn als sich Hultsch mit einer Anfrage an Mommsen wandte, ob sich nicht vielleicht in Italien, insbesondere in der vatikanischen Bibliothek, eine ältere Pappus-Handschrift befände, da die Pariser und die anderen damals bekannten verhältnismäßig neu seien, da konnte ihm dieser antworten, daß in der Tat eine solche von Kurt Wachsmuth eingesehen worden sei. Durch Wachsmuth und namentlich dann durch Adolf Kiessling wurde nun Hultsch mit diesem vatikanischen Codex bekannt gemacht, der sich gleich von Anfang an als allen übrigen Handschriften überlegen zeigte, und von dem Hultsch dann in der Folge nachweisen konnte, daß er überhaupt der Archetypus aller bisher bekannten sei. Das war natürlich eine Entdeckung von nicht geringer Bedeutung.

Bevor nun aber Hultsch zur Untersuchung und Verwertung dieses Vaticanus nach Rom reiste, stellte er sich zunächst auf Grund anderer Handschriften einen zusammenhängenden griechischen Text her, um mit diesem dann den Vaticanus vergleichen zu können. Diese Arbeit führte er im Sommer des Jahres 1865 aus, indem er sich aus Paris und Leiden diejenigen Codices, die zunächst zu berücksichtigen waren, schicken ließ, aus Paris den Parisinus 2440 aus dem 15. Jahrhundert und aus Leiden den Scaligeranus und den Vossianus. Mit der so angefertigten vorläufigen Urschrift ausgerüstet und daher aufs beste versehen, reiste nun Hultsch im Jahre 1866 nach Rom.

Die in der vatikanischen Bibliothek befindliche Pappus-Handschrift, die das eigentliche Reiseziel bildete, und die nun von Hultsch an das Tageslicht gezogen und zur Grundlage seiner klassischen Pappus-Ausgabe gemacht werden sollte, ist der Vaticanus Graecus 218 aus dem 12. Jahrhundert. Schon durch sein Alter ist er bemerkenswert. Daß er aber auch allen anderen vorhandenen Handschriften mittelbar oder unmittelbar als Vorlage gedient hatte, konnte Hultsch mit Sicherheit aus folgenden Merkmalen feststellen: der Vaticanus weist nämlich vielfach am unteren Rande der Blätter allerlei Schäden auf, indem durch Feuchtigkeit, Schmutz oder andere Ursachen die Schrift unleserlich geworden ist. Da nun genau an denselben Stellen alle jüngeren Handschriften Lücken aufweisen, so geht daraus klar hervor, daß sie alle von dem Vaticanus selbst und nicht etwa von einem älteren Codex abstammen. Aus dieser wichtigen Ent-

deckung ergab sich nun zunächst die Folgerung, daß gegenüber dem Vaticanus alle anderen Handschriften wertlos sind und nur noch insofern Berücksichtigung verdienen, als sie etwa brauchbare Konjekturen darbieten. In dieser Hinsicht sind nun freilich von besonderem Werte der Vossianus und namentlich der Scaligeranns, welch letzterer sehr viele, von SCALIGER herrührende Emendationen aufweist. Außer diesen Codices bespricht nun HULTSCH in der Vorrede zum ersten Bande noch eine ganze Reihe von PAPPUS-Handschriften aus Paris, Oxford, Mailand, Wolfenbüttel, Urbino, Neapel, Wien, die er zum Teil selbst eingesehen hat, und die, wie gesagt, alle deutlich verraten, daß sie von dem Vaticanus abstammen.

So hat denn HULTSCH seine PAPPUS-Ausgabe zunächst natürlich ganz auf die Autorität dieser vatikanischen Handschrift gestützt. Daneben aber hat er namentlich den Parisinus 2440 berücksichtigt und in den Anmerkungen alles sorgfältig notiert, was etwa darin von verschiedenen Gelehrten verbessert oder sonst geändert worden war. Gewissermaßen als Vertreter aller neueren Handschriften wurde der Scaligeranus ausgewählt, doch wurden, wo immer es nötig schien, auch der Vossianus, der Codex des COMMANDINO (von dem bald geredet werden wird) und die Parisini 2368 und 2369 ausdrücklich in den Anmerknngen zitiert. Wir müssen es uns leider versagen, der Entstehungsgeschichte der PAPPUS-Ansgabe, insbesondere der genaueren Besprechung des zugrunde gelegten handschriftlichen Materiales, die in der Vorrede zum ersten Bande bis zu S. XV reicht, weiter nachzugehen, so viel Interesse sie auch darbietet. Wohl aber darf aus dieser Vorrede noch nachgetragen werden, daß HULTSCH darin dankbar der Unterstützung gedenkt, die ihm bei der mühsamen Arbeit des Kollationierens AUGUST WILMANNS, HUGO HINCK, AUGUST MAU und LUDWIG MENDELSSOHN in uneigennütziger Weise hatten zuteil werden lassen.

Der erste Band von *PAPPI Alexandrini collectionis quae supersunt* erschien 1876. Man wird den Zwischenraum von zehn Jahren zu würdigen wissen, wenn man einerseits das gewaltige Material, das zu verarbeiten war, berücksichtigt nnd anderseits sich daran erinnert, daß in diesem Zeitraum, nämlich in den Jahren 1867—1872, zugleich auch die große POLYBIUS-Ausgabe erschienen ist. Und neben diesen beiden großen Werken gingen noch mancherlei andere wissenschaftliche Arbeiten einher, vor allem aber eine ausgedehnte und anstrengende Tätigkeit im Dienste der Schule. Schon 1877 erschien der zweite Band der *Collectio*, und im folgenden Jahre, 1878, lag das große Werk vollendet vor. Die Berliner Akademie der Wissenschaften hatte in dankenswerter Weise die erforderlichen Mittel für die Herausgabe bewilligt.

Wenden wir uns nun zu einer kurzen Darlegung des Inhaltes der drei Bände der Pappus-Ausgabe. Es ist bereits von den Vorreden gesprochen worden, die jeden der drei Bände eröffnen, und aus der Vorrede zum ersten ist auch schon das Wesentlichste von dem mitgeteilt worden, was sich auf die Handschriften und auf die eigentliche Entstehungsgeschichte des Werkes bezieht. Es verlohnt sich aber, diese Vorreden noch weiter zu verfolgen, da sie sich weit über das gewöhnliche Niveau erheben und den Rang selbständiger, wissenschaftlicher Abhandlungen besitzen. Aus der Vorrede zum ersten Bande ist vor allem noch zu erwähnen die ausführliche und sorgfältige Zusammenstellung aller der Arbeiten, in denen bisher Fragmente des Pappus herausgegeben, bearbeitet oder übersetzt worden waren. Diese sehr interessanten bibliographischen Notizen erstrecken sich von S. XV bis S. XXII und behandeln (in alphabetischer Folge) die Arbeiten von P. Breton, J. W. Camerer, M. Chasles, F. Commandino, H. J. Eisenmann, C. I. Gerhardt, E. Halley, C. G. Haumann, S. Horsley, J. Scaliger, R. Simson, J. Torelli, A. J. H. Vincent, J. Wallis. Von diesen Arbeiten beschäftigen sich allerdings die meisten nur mittelbar mit Pappus und auch nur mit einzelnen Teilen der *Collectio*. Hultsch hat aber auch diese bei seiner Ausgabe verwertet und abweichende Lesarten allenthalben notiert. Ganz besonders aber ist unter den genannten Autoren Federigo Commandino (1509—1575) hervorzuheben, der seinen vielen fleißigen Übersetzungen von Euklid, Aristarch, Archimedes, Apollonius, Heron, Ptolemäus auch eine lateinische Übersetzung der *Collectio* des Pappus (*Pappi Alexandrini mathematicae collectiones* heißt der Titel bei Commandino, und so wird das Werk vielfach auch heute noch fälschlich zitiert) hinzugefügt hat. Die mit ausführlichem Kommentar versehene Übersetzung erschien 1588, nach dem Tode Commandinos, und wurde dann (wie es scheint 1589 und) nochmals 1602 verlegt. Die Übersetzung Commandinos ist um so bedeutungsvoller, als sie bis zur Ausgabe von Hultsch, also fast drei Jahrhunderte lang, nicht nur die einzige geblieben ist, die es überhaupt gab, sondern auch zugleich den griechischen Urtext ersetzen mußte, der, von einzelnen Fragmenten abgesehen, vor Hultsch überhaupt noch niemals gedruckt worden war. Welchen Codex Commandino seiner Übersetzung zugrunde gelegt hat, läßt sich nicht mehr genau angeben. Nach Hultsch kommt dieser Codex am nächsten an den Parisinus 2440 heran, aber doch so, daß er wahrscheinlich nicht aus diesem selbst, sondern aus einem anderen, sehr ähnlichen, abgeschrieben worden war. Für die Arbeit seines Vorgängers hat Hultsch nur Worte höchster Anerkennung, und er sagt ausdrücklich, daß er nicht nur jede von Commandino herrührende Verbesserung ganz besonders als solche hervorgehoben habe, sondern daß er auch da, wo er die Konjekturen Commandinos

nicht habe annehmen können, diese trotzdem (ins Griechische zurückübersetzt) mit den Worten „voluit Co“ in die Anmerkungen zum Texte mitaufgenommen habe.

Wir werden noch Gelegenheit haben, auf die kurze Vorrede zum zweiten Bande zurückzukommen, und wenden uns daher jetzt sofort zu der des dritten. Gleich zu Anfang wird die Frage nach der Zeit aufgeworfen, zu der Pappus gelebt hat. Bis vor kurzem hatte man, gestützt auf Suidas, den bekannten Lexikographen aus dem 10. Jahrhundert, allgemein angenommen, daß Pappus ein Zeitgenosse des Theon von Alexandria gewesen sei, also unter der Regierung von Theodosius dem Großen (379 bis 395) gelebt habe. Nun hatte aber Usener in der Notiz *Vergessenes* (Rhein. Museum f. Philol. 28, 1873, 403—404) auf die alte Leidener Handschrift Nr. 78 der *Theonischen Handtafeln* aufmerksam gemacht, die in den Jahren 913—920 angefertigt worden ist, und in der sich unter anderen Scholien, die am Rande der Regentenlisten stehen, bei der Regierungszeit des Diokletian (284—305) die Bemerkung findet: „unter diesem hat Pappus geschrieben“. Hultsch schließt sich nun dieser, von Usener noch genauer motivierten Zeitbestimmung an, um so mehr, als es für ihn ausgemacht war, daß Pappus vor Theon gelebt haben müsse. Sodann stellt Hultsch fest, daß der Titel des Pappusschen Werkes, das ursprünglich aus acht Büchern bestand, *συναγωγή* gelautet hat, wie allein schon aus der Stelle (lib. III, 30, 21) *ἐν τῷ τρίτῳ τούτῳ τῆς συναγωγῆς βιβλίῳ* deutlich hervorgeht.

Den weitaus größten Teil der Vorrede zum dritten Bande widmet aber Hultsch einer sorgfältigen Zusammenstellung und Besprechung aller vorhandenen Hinweise auf Schriften, die Pappus außer der *συναγωγή* verfaßt hat. Solche Hinweise finden sich u. a. bei Suidas, Proklus, Eutokius, aber auch in der *Collectio* des Pappus selbst. Dort (IV, 246, 1) erwähnt nämlich Pappus einen Kommentar, den er zu dem *Analemma* des Diodorus[1]) geschrieben habe. Zu diesem, auf den ersten Blick etwas befremdlichen Titel gibt nun Hultsch, gestützt auf Vitruv und Ptolemäus, die genauere Erklärung (descriptio circulorum sphaerae caelestis in plano = orthographische Projektion), mit der er zugleich eine früher geäußerte Konjektur (Anm. zu IV, 246, 1) zurücknahm.[2]) Die übrigen Arbeiten des Pappus, die Hultsch aufzählt, sind namentlich Kommentare zu den *Elementen* und zu den *Daten* des Euklid und zu dem *Almagest* des Ptolemäus. Diesen letzteren widmet Hultsch eine besonders ausführliche Besprechung; ist er doch auch später noch wiederholt auf diese wichtigen Arbeiten zurück-

---

1) Siehe den Artikel Diodoros, Nr. 53, von Hultsch bei Pauly-Wissowa.
2) Vgl. S. 359.

gekommen. Er zeigt, daß die Angabe des Suidas, Pappus habe nur zu den vier ersten Büchern des *Almagest* Kommentare geschrieben, unrichtig ist, denn es sind noch jetzt Bruchstücke seiner Kommentare zum fünften und sechsten Buche vorhanden. Wahrscheinlich aber hat Pappus zu allen 13 Büchern des *Almagest* Kommentare verfaßt, und dann könnte die Angabe des Suidas auf der irrtümlichen Lesart $\varDelta$ (= 4) für $I\Gamma$ (= 13) beruhen. Pappus hat jedem dieser Kommentare den Titel *σχόλιον* gegeben, den *Almagest* selbst hat er *τὰ μαθηματικά* genannt. Die Kommentare, die Theon von Alexandria zu demselben Werke geschrieben hat, führten, jeder einzeln, den Titel *ὑπόμνημα*. Sie benutzen die Scholien des Pappus und ergänzen sie zum Teil, woraus hervorgeht, daß Theon *nach* Pappus gelebt haben muß. Hultsch war nun in der glücklichen Lage, den erwähnten Bruchstücken der *Scholien* des Pappus noch weitere Beiträge hinzuzufügen. Denn dieselbe vatikanische Handschrift (Vaticanus Graecus 184), der er die Abhandlung eines Anonymus über die isoperimetrischen Figuren[1]) entnommen hatte, lieferte ihm zugleich auch die interessanten *Prolegomena des Pappus zur Syntax des Ptolemäus*, mit denen Hultsch nun die inhaltreiche Vorrede zum dritten Bande abschloß.

Doch kehren wir jetzt zu der *Collectio* selbst zurück. Wie schon erwähnt, bestand das Werk ursprünglich aus acht Büchern. Davon ist das erste ganz und von dem zweiten etwa die Hälfte verloren gegangen. Der Umstand, daß die vatikanische Handschrift, die der Pappus-Ausgabe zugrunde liegt, unvermittelt mit dem unvollständigen Satze *γὰρ αὐτοὺς ἐλάσσονας μὲν εἶναι* beginnt, zeigt, daß auch schon in dem Archetypus, der dem Vaticanus als Vorlage gedient hat, der Anfang des Werkes verloren war.

Es kann natürlich nicht meine Absicht sein, eine ausführliche Besprechung[2]) des überreichen Inhaltes der *Collectio* zu geben, aber eine kurze Übersicht dürfen wir uns doch nicht versagen, wenn wir einen richtigen Einblick in die oft scheinbar weit auseinander liegenden Arbeitsgebiete von Hultsch gewinnen wollen. Ja, man darf sogar sagen, daß ohne die Kenntnis des Inhaltes der *Collectio* das Lebenswerk von Hultsch in seinem Zusammenhange gar nicht verstanden werden kann.

1) Siehe S. 365.

2) Eine solche gibt Hultsch selbst in der schon erwähnten Selbstanzeige in Boncompagnis **Bullettino**. Sodann aber ist namentlich auf die sehr eingehenden Besprechungen zu verweisen, die Cantor den drei Bänden der Pappus-Ausgabe gleich nach ihrem Erscheinen hat zuteil werden lassen. Sie finden sich in der **Zeitschr. für Math. u. Phys.** (historisch-liter. Abt.) **21**, 1876, 70—80; **22**, 1877, 173—179; **24**, 1879, 126—132, und sie liegen natürlich auch der Darstellung in Cantors *Vorlesungen* zugrunde.

Da, wie schon gesagt, der Anfang der *Collectio* verloren ist, so läßt sich auch nicht mehr mit Sicherheit feststellen, was für ein Plan dem ganzen Werke zugrunde gelegen hat. Was vom zweiten Buche übriggeblieben ist (S. 1—29 der Ausg. v. HULTSCH), betrifft die Myriadenrechnung und die Multiplikationsmethode des APOLLONIUS (s. hierzu auch den Artikel APOLLONIOS von HULTSCH bei PAULY-WISSOWA). Das dritte Buch (S. 30 bis 177) besteht aus vier Teilen, die deutlich voneinander geschieden sind. Der erste (c. 2—27) handelt von der Aufgabe, zu zwei gegebenen Längen zwei mittlere geometrische Proportionalen zu finden, und überliefert uns Methoden von ERATOSTHENES, NIKOMEDES, HERON und eine, die von PAPPUS selbst herrührt (c. 27). Die Aufgabe verdankt bekanntlich ihre Berühmtheit dem Probleme von der Würfelverdoppelung. Der zweite Teil (c. 28—57) beschäftigt sich mit den verschiedenen *Mitteln* zwischen zwei Strecken, dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen, dargestellt in einer einzigen Figur. Daran schließen sich noch andere Medietäten an, im ganzen zehn, die schließlich in Zahlenbeispielen tabellarisch zusammengestellt werden. Im dritten Teile (c. 58—74) werden die sogenannten Paradoxa des ERYCINUS behandelt und mannigfach erweitert. Zieht man nämlich von einem Punkte im Inneren eines Dreiecks Verbindungslinien nach den Endpunkten der Basis, so ist (EUKLID I 21) ihre Summe kleiner als die Summe der beiden sie umschließenden Dreiecksseiten. Wählt man aber statt der Endpunkte der Basis Zwischenpunkte, so kann die Summe dieser Verbindungslinien ebenso groß oder auch größer werden als die Summe der beiden Dreiecksseiten. Der vierte Teil endlich (c. 75—104) ist der Aufgabe gewidmet, einer Kugel die fünf regulären Polyeder einzuschreiben. Dieser Aufgabe schickt PAPPUS einige Lemmata voraus, die sich auf die *Sphärik* des THEODOSIUS stützen. Mit dieser *Sphärik* hat sich HULTSCH, wie wir sehen werden, später noch wiederholt in eingehender Weise beschäftigt.

Auch das vierte Buch (S. 176—303), dessen Anfang verstümmelt ist (es fehlen Titel und Vorrede), umfaßt mehrere ganz getrennte Untersuchungen, die äußerlich allerdings nicht so deutlich geschieden sind, wie im dritten Buche. An der Spitze (c. 1) steht eine Theorie der Kreistransversalen, und dann kommt nach einigen Lemmata als Hauptaufgabe die, um drei sich berührende Kreise einen Kreis zu beschreiben (c. 15). Nach einer ganzen Reihe von weiteren Berührungsaufgaben über Kreise und Halbkreise, unter denen namentlich das auf ARCHIMEDES zurückgehende Problem vom Arbelos (c. 26) hervorzuheben ist, wendet sich PAPPUS sodann zur Spirale des ARCHIMEDES (c. 30—38) und zur Konchoide des NIKOMEDES (c. 39—44), die von diesem zur Würfelverdoppelung eingeführt worden war. Hier (c. 40) spricht auch PAPPUS von dem Kommentar, den er zu

dem *Analemma* des Diodorus geschrieben habe. Hultsch hatte anfänglich den Titel ἀνάλημμα für verdächtig gehalten und geglaubt, er sei aus α' oder κα' λῆμμα korrumpiert. Er hat dann aber, wie wir gesehen haben[1]), in der Vorrede zum dritten Bande diese irrtümliche Konjektur zurückgenommen. Und nun folgt (c. 45—50) die sachlich und historisch so überaus wichtige Abhandlung über die Quadratrix, die „von Dinostratus, Nikomedes und einigen Jüngeren zur Quadratur des Kreises verwendet worden ist". Den eigentlichen Erfinder, Hippias von Elis, nennt Pappus auffallenderweise nicht, und auch Hultsch, der in seinen reichhaltigen und trefflichen Anmerkungen sonst so sehr auf Vollständigkeit hält, hat den Namen Hippias nicht hinzugefügt. Den Schluß (c. 51—80) des vierten Buches bilden weitere Untersuchungen, die meist mit der Quadratrix zusammenhängen: Beziehungen der Quadratrix zur Spirale, Spirale auf der Kugelfläche, Dreiteilung des Winkels, Konstruktion regulärer Polygone von beliebiger Seitenzahl, Konstruktion eines Kreisbogens zu einer gegebenen Sehne, die zu jenem ein gegebenes Verhältnis hat, Konstruktion inkommensurabler Winkel.

Mit dem fünften Buche (S. 303—471) schließt der erste Band der Pappus-Ausgabe ab. Von diesem fünften Buche (und ebenso von den drei letzten) ist auch noch der Titel erhalten, und in diesem findet sich das Wort συναγωγή als Titel des ganzen Werkes. Das fünfte Buch zerfällt in drei Teile. Im ersten (c. 1—32) gibt Pappus im wesentlichen die ungemein interessante Abhandlung des Zenodorus über die isoperimetrischen Figuren wieder, und zwar allenthalben verbessert. Wir werden auf diese wichtige Abhandlung, in der u. a. bewiesen wird, daß unter allen isoperimetrischen Figuren der Kreis den größten Flächeninhalt habe, noch wiederholt zurückkommen, da sich gerade an sie verschiedene Untersuchungen und Entdeckungen von Hultsch anschließen. Von diesen wird aber eine vielleicht passend gleich hier besprochen werden, wenn auch dadurch die Übersicht über den Inhalt der *Collectio* eine kurze Unterbrechung erleidet.

Nach der stimmungsvollen Einleitung zum fünften Buche, auf die Hultsch noch in einer besonderen, weiter unten zu besprechenden Abhandlung zurückgekommen ist, folgt bei Pappus der Beweis des Satzes,

1) S. 356. Die dort (in der Vorrede zum dritten Bande) gegebene, sachlich ganz richtige Übersetzung durch „orthographische Projektion" hatte Hultsch von Richard Baltzer übernommen. Wir haben übrigens im Deutschen dafür einen durchaus passenden terminus technicus, der den Vorteil hat, eine ganz wörtliche Übersetzung von ἀνάλημμα zu sein, nämlich „Aufnahme". So ist auch ἀνάλημμα in dem gleichnamigen Artikel von G. Kaufmann bei Pauly-Wissowa übersetzt. Und auch schon bei Polybius (VIII, 37. 2) wird ἀναλαμβάνειν τι in der Bedeutung von: die Höhe eines Gegenstandes „aufnehmen" gebraucht. Siehe hierzu noch den Artikel Diodoros, Nr. 53, von Hultsch bei Pauly-Wissowa.

daß von zwei isoperimetrischen regulären Polygonen stets das mehreckige (τὸ πολυγωνότερον) den größeren Inhalt habe, und bei diesem Beweise wird mit den Worten (Pappus I, S. 310, 5) „τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς εἰς τὰ σφαιρικὰ λήμμασιν δέδεικται" auf eine Sammlnng von Hilfssätzen hingewiesen, die gänzlich verloren zu sein schien. Nun konnte zwar Hultsch im dritten Bande seiner Pappus-Ansgabe (Appendix, S. 1234) gleich drei Stellen nachweisen[1]), an denen das bezeichnete Lemma bewiesen wird (es lautet: beschreibt man über einer gemeinschaftlichen Kathete zwei rechtwinklige Dreiecke, so ist das Verhältnis der größeren Kathete zur kleineren größer als das Verhältnis des größeren gegenüberliegenden Winkels zum kleineren), und diese Stellen weisen auch deutlich auf eine gemeinsame Quelle hin, nämlich auf Theon von Alexandria, der, wie es danach scheint, nicht nur zum *Almagest*[2]), sondern auch zu dem später (beim sechsten Buche von Pappus) zn besprechenden μικρὸς ἀστρονομούμενος einen Kommentar geschrieben hat, aber da der Hinweis auf jene λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά in der viel älteren Abhandlung des Zenodorus vorkommt, so war für Hultsch die Aufgabe gestellt, nach den noch älteren Quellen zu suchen, aus denen Zenodorus geschöpft hatte. Dieser Untersnchung ist die in Fleckeisens Jahrbüchern (1883) veröffentlichte Abhandlung *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά, Reste einer verloren geglaubten Handschrift*, gewidmet. Hultsch hatte nämlich das eine Lemma, nnd zwar gerade das, worauf sich Pappus hier bezieht, in einer Münchener Handschrift (Codex Monacensis gr. CCCI) aufgefunden, und merkwürdigerweise unter dem Namen des Autolykus, der bekanntlich noch vor Euklid gelebt hat. Nach diesem Codex Monacensis teilt nun Hultsch in der genannten Abhandlung den Text der mit der Überschrift *Αὐτολύκου, περὶ κινουμένης σφαίρας* versehenen Untersuchnng mit und fügt einige vergleichende Betrachtungen hinzu. In dem jetzt vorliegenden Beweise schließt sich das Lemma, auch in den geometrischen Buchstaben, eng an den 11. Satz des dritten Bnches der *Sphärik* des Theodosius an, die dem 1. Jahrhnndert v. Chr. angehört. Und zwischen Autolykus nnd Theodosius finden wir das Lemma bei Archimedes im ψαμμίτης (Arch. ed. Heiberg II, 260). So hatte denn Hultsch die Quelle gefunden, aus der auch Zenodorus geschöpft hatte, und auf die jene drei im Appendix namhaft gemachten Stellen zurückzuführen sind.

Doch kehren wir jetzt zum fünften Buche des Pappus zurück. Der zweite Teil (c. 33—71) handelt von den sogenannten Archimedischen Körpern. Es wird gezeigt, daß bei gleicher Oberfläche Kegel und Zylinder kleineres Volumen haben als die Kugel. Im dritten Teile (c. 72—105) endlich

1) Vgl. S 365 2) Siehe hierzu S. 357.

wird bewiesen, daß von den fünf regulären Polyedern, den sogenannten PLATONischen Körpern, bei gleicher Oberfläche immer das den größeren Inhalt habe, das die größere Zahl von Ecken besitzt.

Das sechste Buch (S. 474—633), das den zweiten Band eröffnet, ist der Astronomie gewidmet. Schon die Überschrift besagt, daß es die in dem *μικρὸς ἀστρονομούμενος* (zu ergänzen ist *τόπος*) befindlichen Schwierigkeiten beseitigen wolle. Dieser *τόπος* war eine Sammlung von Schriften, die *nach* den *Elementen* des EUKLID, aber *vor* dem *Almagest* (dem *μέγας ἀστρονόμος*) gelesen werden sollten, und die bei den Arabern den Titel „mittlere Bücher" führten.[1]) Von diesen Schriften kommentiert nun PAPPUS die folgenden: die *Sphärik* des THEODOSIUS (c. 2—32), die Abhandlung des AUTOLYKUS *über die sich bewegende Kugel* (c. 33—47), die Abhandlung des THEODOSIUS *über Tag und Nacht* (c. 48—68), die Abhandlung des ARISTARCH *über Größe und Entfernung von Sonne und Mond* (c. 69—79), die *Optik* des EUKLID (c. 80—103), die *Phaenomena* des EUKLID (c. 104—130). Wir werden auf mehrere dieser Schriften noch zurückkommen, da sie Gegenstand besonderer Veröffentlichnngen von HULTSCH geworden sind, und ich bemerke hier nnr noch, daß wohl niemand berufener hätte sein können, gerade dieses sechste Bnch des PAPPUS herauszugeben, als HULTSCH, da es ihm gelnngen war, während eines dreimonatigen Aufenthaltes in Italien im Jahre 1876, weitere, bisher unbekannt gebliebene Handschriften zu THEODOSIUS nnd AUTOLYKUS zu entdecken und für seine PAPPUS-Ausgabe zu verwerten. HULTSCH berichtet darüber ansführlicher in der Vorrede zum zweiten Bande; wir werden das Erforderliche an geeigneter Stelle noch nachtragen.

Wie das sechste Bnch dem *μικρὸς ἀστρονομούμενος* gewidmet ist, so bezieht sich das umfangreiche siebente Buch (S. 634—1020) auf ein anderes berühmtes Sammelwerk, den *τόπος*[2]) *ἀναλυόμενος*. Dieser *τόπος* nmfaßt Schriften des EUKLID[3]), APOLLONIUS und ARISTÄUS des Älteren, nnd zwar nach der Aufzählung des PAPPUS die *Daten* des EUKLID, den *Ver-*

1) Siehe die Abh. von STEINSCHNEIDER in der Zeitschr für Math. n. Phys. **10**, 1865, 456.

2) HULTSCH übersetzt hier *τόπος* ganz korrekt mit *locus* (was seiner Übersetzung von *τόπος ἀστρονομούμενος* mit astronomiae disciplina durchaus entspricht). Daß er dabei *locus* in dem wissenschaftlichen Sinne nimmt, den anch Gow (*A short history of greek mathematics*, **211**, Anm.) fordert, sagt er deutlich im Index graecitatis, wo es nnter *τόπος* heißt: „locus, i. e. quidqnid aliqua mathematicorum parte comprehenditur". Den locus resolutus freilich hat Gow mit gutem Recht beanstandet, aber den hat auch HULTSCH in dem Index durch locus de resolutione, id est doctrina analytica, ersetzt. Im Deutschen gebranchen wir übrigens am besten die Übersetzung „Gebiet".

3) In bezug auf diese Schriften sind besonders die *Literargeschichtlichen Studien über EUKLID* von J. L. HEIBERG, Leipzig 1882, nachznsehen.

hältnisschnitt, den *Raumschnitt*, den *bestimmten Schnitt* und die *Berührungen* des Apollonius, die *Porismen* des Euklid, die *Neigungen*, die *ebenen Örter* und die *Kegelschnitte* des Apollonius, die *körperlichen Örter* des Aristäus, die *Örter auf der Oberfläche* des Euklid und endlich die *Mittelgrößen* des Eratosthenes, im ganzen 33 Bücher. An diese Aufzählung, der erst noch eine Erklärung der Begriffe Analyse und Synthese vorausgeschickt ist, schließen sich zunächst kurze Inhaltsangaben an, und dann fügt Pappus zahlreiche und ungemein wertvolle Lemmata zu den genannten Schriften hinzu.

Das achte und letzte Buch (S. 1022—1135) eröffnet den dritten Band der Pappus-Ausgabe. Es enthält, wie die Überschrift sagt, allerlei anmutige (ἀνθηρά) mechanische Probleme. Als solche werden Schwerpunktsaufgaben und die Theorie der schiefen Ebene behandelt, sodann die Aufgabe, gegebene Lasten durch gegebene Gewichte mit Hilfe von Zahnrädern zu bewegen. Ferner führt die Aufgabe, einen zu bewegenden Körper unter Beibehaltung seiner Gestalt in einem gegebenen Verhältnis zu vergrößern, wieder zur Einschiebung zweier geometrischer Mittel und damit wieder zum Problem der Würfelverdoppelung. Weiter behandelt Pappus die Aufgabe, den Durchmesser eines Kreiszylinders zu finden, dessen beide Grundflächen derart verstümmelt sind, daß keine direkte Messung vorgenommen werden kann. Daran schließen sich nun wieder allerlei anmutige geometrische Aufgaben, wie z. B. einem Kreise sieben reguläre Sechsecke mit einem in der Mitte einzuschreiben, eine Aufgabe, die mit der Theorie der Zahnräder in Zusammenhang steht. Den Schluß des achten Buches bilden Exzerpte aus der *Mechanik* Herons. Nun stützt sich zwar das achte Buch im großen und ganzen überhaupt auf die mechanischen Schriften Herons, dessen βαρουλκός z. B. zweimal ausdrücklich zitiert wird, trotzdem aber glaubt Hultsch, daß diese Exzerpte nicht auf Pappus selbst zurückzuführen seien, sondern daß sie wahrscheinlich von demselben Schreiber hinzugefügt worden sind, der auch am Anfang des Buches die ursprüngliche Darstellung vielfach verändert und durch Ergänzungen erweitert hat.

Diese Verhältnisse hatte Hultsch schon vor dem Erscheinen des dritten Bandes zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung gemacht, nämlich in der Abhandlung *De Heronis mechanicorum reliquiis in Pappi collectione servatis*, die sich in den *Commentationes philologae in honorem Theodori Mommseni* (Berlin 1877) befindet, einem Sammelbande, der Mommsen zu seinem 60. Geburtstage von 78 Freunden gewidmet worden war. In dieser Abhandlung beschäftigt sich Hultsch zunächst eingehend mit der Sprache, dem Stil des Pappus. Er weist dort z. B. speziell auf die Einleitung zum fünften Buche hin, in der Pappus in sinniger Weise,

als Vorbereitung auf die Isoperimetrie, den Bau der Wachszellen bespricht, die die Bienen mit geradezu geometrischem Instinkte bereiten. Bei der Schilderung der wunderbaren Tätigkeit dieser kleinen Wesen erhebt sich, sagt Hultsch, die Sprache des Pappus zu einer solchen Schönheit, daß man an das Beste gemahnt wird, was in griechischer Sprache geschrieben worden ist. Aus Vergleichen dieser Art glaubte daher Hultsch mit Sicherheit feststellen zu dürfen, daß die Vorrede zum achten Buche nicht in der von Pappus herrührenden Form auf uns gekommen sei. Und ähnlich verhalte es sich auch mit dem Schluß und mit den Exzerpten aus Heron. Hultsch verfolgt nun die Spuren Herons durch das ganze achte Buch hindurch und stellt alles zusammen, was sich darin an Hinweisen auf die im Originale verloren gegangene *Mechanik* Herons vorfindet, um auf diese Weise, soweit möglich, wenigstens eine ungefähre Übersicht über den Inhalt der drei Bücher dieses merkwürdigen Werkes zu gewinnen. Bekanntlich ist es im Jahre 1893 Carra de Vaux gelungen, in einer Leidener Handschrift eine arabische Übersetzung der *Mechanik* zu entdecken, und nun bildet diese, mit der *Katoptrik* zusammen, den zweiten, von L. Nix und W. Schmidt besorgten Band der neuen Heron-Ausgabe. Ihr Inhalt zeigt, daß Hultsch bei seinem Rekonstruktionsversuche im wesentlichen das Richtige getroffen hatte, soweit das billigerweise erwartet werden durfte. Umgekehrt aber bildete der Text der im achten Buche des Pappus enthaltenen Heron-Fragmente einen nicht zu unterschätzenden Beleg für die Echtheit der wiedergefundenen *Mechanik*. Nix sagt darüber in der Vorrede zu Heron II (S. XXII): „Daß das uns vorliegende, von Kosta ben Luka [ums Jahr 865] aus dem Griechischen ins Arabische übersetzte und unter Herons Namen überlieferte Buch echt sei, erhellt aus den unten angeführten und im Anhang im griechischen Text von dem Herausgeber des ersten Bandes [W. Schmidt] beigegebenen Fragmenten, die sich an verschiedenen Stellen bei Pappus finden und daselbst ausdrücklich als aus Heron herübergenommen bezeichnet werden. Alle Stellen Herons, auf die Pappus anspielt, oder die er wörtlich anführt, finden sich in unserem arabischen Texte.“ Es folgt sodann (S. XXVI—XXVIII) eine Übersicht über die Exzerpte des Pappus aus der Mechanik des Heron und eine Vergleichung mit den entsprechenden Stellen der neuen Ausgabe.

Es ist hier nicht wohl möglich, noch ausführlicher auf die hohe Bedeutung des klassischen Werkes des Pappus einzutreten. Daß die *Collectio* ein Quellenwerk allerersten Ranges ist, daß sie uns die wertvollsten Aufschlüsse gibt über eine ganze Reihe von hervorragenden Arbeiten, die leider verloren gegangen sind, zeigt schon zur Genüge die flüchtige Inhaltsangabe, die wir nicht einmal des Werkes selbst wegen, sondern nur

zum besseren Verständnis der wissenschaftlichen Arbeit des Herausgebers der *Collectio* vorgenommen haben. Und wenn auch nichts weiteres vorläge als nur der griechische Text, so wie ihn jetzt Hultsch zum ersten Male gedruckt hat erscheinen lassen, so hätte die Wissenschaft schon alle Ursache, dem gelehrten Herausgeber dankbare Anerkennung zu zollen Wir haben freilich gesehen, mit wieviel Verständnis, mit wieviel Umsicht, Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt der Text hergestellt worden ist, und wie Hultsch keine Mühe gescheut hat, alles handschriftliche und gedruckte Material, das nur irgendwie herangezogen werden konnte, für seine Ausgabe zu verwerten.

Aber Hultsch hat sich nicht damit begnügt, nnr einen möglichst zuverlässigen und brauchbaren Text zu liefern. Wir haben schon bei der Entstehungsgeschichte der Ausgabe wiederholt von dem kritischen Apparat zu sprechen gehabt, der den griechischen Text Seite für Seite und oft in ganz beträchtlicher Ausdehnung begleitet. Wieviel Selbständigkeit aber Hultsch den vorhandenen Vorlagen gegenüber bekundet hat, und wie oft er in die Lage kam, auch von sich aus den Text festzustellen, das zeigen die zahllosen, fast anf jeder Seite auftretenden Noten Hu, durch die er seine eigenen Verbesserungen oder Konjekturen gekennzeichnet hat.

Sodann hat Hultsch dem Texte eine lateinische Übersetzung gegenübergestellt. Daß er damit vorbildlich gewirkt hat, hat Heiberg in der Vorrede zn seiner Archimedes-Ausgabe ausdrücklich ausgesprochen. Ich glaube zwar, daß den Mathematikern wenigstens die Pappus-Ausgabe zugänglicher geworden wäre, wenn sich Hultsch (wie z. B. später Manitius und Wilhelm Schmidt bei den Ausgaben des Geminus und des Heron) bei der Übersetzung der deutschen Sprache bedient hätte, indessen — wir haben doch allen Grund, für das Gebotene dankbar zu sein, nm so mehr, als sich Hultsch nicht mit einer einfachen wörtlichen Übersetzung begnügt hat. Denn er hat allenthalben, wo immer nur der Text zu knapp oder gar lückenhaft war, oder wo die Ausdrucksweise nicht deutlich genug erschien, erklärende Zusätze, und zwar einzelne Wörter oder auch ganze Sätze, mit in die Übersetzung aufgenommen, oder er hat durch Verweisungen auf andere Stellen das Verständnis zu erleichtern gesucht. Selbstredend sind alle derartigen Zutaten durch besondere Schrift kenntlich gemacht. Bei Formeln hat er sich, soweit es anging, der modernen Formelsprache bedient. Sodann aber hat er auch noch, und zwar fast auf jeder Seite, kleinere oder größere Fußnoten hinzugefügt, sei es zur Erklärung des Textes oder der Übersetzung, sei es, um auf andere Schriften antiker oder auch moderner Autoren hinzuweisen. Diese Anmerkungen bilden eine wahre Fundgrube für die mathematisch-historische Forschung Aber damit noch nicht zufrieden, hat Hultsch noch eine

ganze Reihe von Anmerkungen sachlicher und historischer Natur, die zu umfangreich waren, um unter den Text gesetzt zu werden, zu einem besonderen Appendix zusammengefaßt und den Supplementen hinzugefügt. Dieser Appendix umfaßt nicht weniger als 65 Seiten. Die darin enthaltenen Anmerkungen, falls man die wissenschaftlichen Nachträge mit diesem bescheidenen Namen bezeichnen will, erstrecken sich über alle die vorhandenen Bücher der *Collectio*. Ganz besonders darf dabei aufmerksam gemacht werden auf die Beiträge, die Hultsch den Anregungen und Mitteilungen von A. Amthor, R. Baltzer, M. Cantor, A. Eberhard und R. Heger zu verdanken hatte. Hervorzuheben ist ferner die Untersuchung S. 1236—1240, die Hultsch der Vergleichung von Pappus und Zenodorus widmet. Und S. 1234—1235 finden wir auch jene drei Stellen bezeichnet, auf die Hultsch in der früher besprochenen Abhandlung *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά* hingewiesen hatte (s. S. 360). Von diesen drei Stellen ist die erste dem Kommentare Theons zum *Almagest* entnommen, die zweite der in den Supplementen zur Pappus-Ausgabe befindlichen Abhandlung des Anonymus über die isoperimetrischen Figuren und die dritte den Scholien, die in den Supplementen auf diese Abhandlung folgen.

Die Supplemente, die Hultsch noch in seine Pappus-Ausgabe aufgenommen hat, und die, zusammen mit dem achten Buche der *Collectio*, den ersten Teil des dritten Bandes füllen, werden eröffnet von der schon früher (S. 357) und soeben wieder erwähnten Abhandlung eines Anonymus über die isoperimetrischen Figuren (Pappus III, S. 1138—1165). Auch dieser Abhandlung hat Hultsch eine lateinische Übersetzung gegenübergestellt und zugleich zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, aus denen die Abhängigkeit der Abhandlung von Zenodorus hervorgeht.

An diese Arbeit schließt sich (S. 1166—1188) eine Zusammenstellung von Scholien an, die am Rande des Vaticanus Graecus 218 angemerkt sind. Daß Hultsch es nicht verschmäht hat, sie in seine Ausgabe aufzunehmen, ist ein beredtes Zeugnis für die große Pietät, die er allen auf Pappus bezüglichen Überlieferungen entgegengebracht hat. Die Scholien sind übrigens auch nicht ohne Interesse. Von ungleich größerer Wichtigkeit freilich ist die nun folgende Abhandlung (S. 1189—1211) des Zenodorus über die isometrischen[1]) Figuren, die Hultsch dem Kommentare

1) Hultsch macht ausdrücklich darauf aufmerksam, daß in dem Kommentare Theons, sowohl in der Baseler Ausgabe von 1538 als in der von Halma, der Titel *περὶ ἰσομέτρων σχημάτων* lautet und nicht *ἰσοπεριμέτρων*, wie Nokk in der Programmabhandlung *Zenodorus Abhandlung über die isoperimetrischen Figuren, nach den Auszügen, welche uns die Alexandriner Theon und Pappus aus denselben überliefert haben*, (Freiburg, 1860) konjiziert hatte. Zenodorus hatte eben nicht nur über die *ebenen* isoperimetrischen Figuren geschrieben, sondern auch bewiesen, daß von allen Körpern mit gleicher Oberfläche die Kugel den größten Inhalt habe.

THEONS zum ersten Buche des *Almagest* (ed. HALMA, 33—49) entnommen hat, und die er nun in lateinischer Übersetzung mitteilt. Daß es sich dabei wirklich um eine Abhandlung des ZENODORUS handelt, das sagt THEON gleich zu Anfang (p. 33) ausdrücklich selbst. Die genaue Vergleichung, die nun HULTSCH Seite für Seite zwischen dieser Abhandlung und der im fünften Buche der *Collectio* befindlichen anstellt, läßt eine vollständige, vielfach sogar wörtliche[1]) Übereinstimmung erkennen und beweist daher, daß auch diese Abhandlung ganz auf ZENODORUS beruht, obwohl PAPPUS den Namen nirgends nennt. Auf dieselbe Weise konnte HULTSCH feststellen, daß sich auch die von ihm mitgeteilte Abhandlung jenes Anonymus auf ZENODORUS stützt. So besitzen wir also von den ausgezeichneten Untersuchungen dieses Mathematikers nunmehr drei gesicherte, gut miteinander übereinstimmende Überlieferungen.

Im Anschluß an NOKK[2]) und CANTOR[3]) bespricht HULTSCH in der Einleitung zu der Abhandlung des ZENODORUS auch die Frage, in welche Zeit dieser Mathematiker, von dem sonst so wenig bekannt ist, zu versetzen sei, und er kommt zu dem Resultate, daß ZENODORUS selbstverständlich nach ARCHIMEDES, den er ja zitiert, gelebt habe, aber wahrscheinlich nicht viel später, also etwa um die Wende des 3. Jahrhunderts v. Chr.

Als viertes Supplement folgt (S. 1212—1276) der Appendix, von dem wir schon (S. 365) gesprochen haben. Daran schließt sich, als fünftes Supplement (S. 1277—1286), eine Zusammenstellung verschiedener aus dem vatikanischen Codex notierter Schreibarten. Da dieser Codex die einzige Quelle auch für die altertümliche Schreibweise ist, so hat es HULTSCH nicht für überflüssig erachtet, auffallende Abweichungen, nament-

1) Daß die Darstellungen bei THEON und PAPPUS dem *Inhalte* nach übereinstimmen, war natürlich auch schon vor HULTSCH bekannt. Darauf hatte z. B. auch NOKK seine deutsche Bearbeitung gegründet. Aber NOKK besaß für PAPPUS nur die lateinische Übersetzung des COMMANDINO, den griechischen Text kannte er nicht.

2) Siehe S. 365, Anm. 1.

3) In der zweiten der S. 357, Anm. 2 genannten Besprechungen der PAPPUS-Ausgabe versetzt CANTOR den ZENODORUS in die Zeit zwischen ARCHIMEDES und QUINTILIAN, der etwa in den Jahren 35—95 n. Chr. gelebt hat. Dabei macht CANTOR auf die interessante Stelle bei POLYBIUS (IX, 21, S. 686 der Ausg. v. HULTSCH) aufmerksam, wo u. a. gesagt wird, es erscheine vielen unglaublich, daß ein Lager im Umfange von 40 Stadien doppelt so groß sein könne als ein solches von 100 Stadien. Ich verweise auch noch auf die Abhandlung *Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertume* (Biblioth. Mathem 2_3, 1901, 5—8) von W. SCHMIDT, der sich darin den Ausführungen von W. CRÖNERT anschließt, wonach ZENODORUS in der ersten Hälfte des 2. Jahrhunderts v. Chr. gelebt haben müsse. Dadurch würden also die Schlußfolgerungen, die HULTSCH aus der Darstellungsweise des ZENODORUS glaubte ziehen zu sollen, durchaus bestätigt.

lich Unregelmäßigkeiten im Akzent (es wird z. B. beständig διχά statt δίχα geschrieben), im Spiritus u. dgl. besonders herauszuschreiben und der Reihe nach mitzuteilen. Als letztes Supplement folgen schließlich noch Corrigenda (S. 1287—1288).

Den zweiten Teil des dritten Bandes füllen die Indices, unter denen der Index graecitatis (S. 1—125), auch dem Umfange nach, der weitaus bedeutendste ist. Wenn Hultsch in der mehrfach erwähnten Selbstanzeige in Boncompagnis Bullettino sagt: „gli indices relativi a Pappo possono per ora tener luogo di un lexicon totius dictionis mathematicae graecae", so ist das nur eine bescheidene Charakterisierung dieser ausgezeichneten Arbeit. Denn in Wahrheit gibt der Index viel mehr. Zunächst ist jedes Wort, das in der *Collectio*, und jedes nur irgendwie erwähnenswerte Wort, das in den Supplementen vorkommt, mit Stellenangabe und der Übersetzung notiert, die der betreffenden Stelle entspricht. Gewöhnlich ist die ganze Wortfolge herausgeschrieben, so daß auch die Konstruktion und die spezielle Wortform zum Ausdruck kommen. Das gilt besonders von den Verben, von denen stets alle vorkommenden Verbalformen, nach Genus, Tempus und Modus geordnet, ausdrücklich aufgeführt sind. Auch die Regeln der Grammatik sind herangezogen, und überall finden sich sprachliche und sachliche Erklärungen, Verweisungen und Orientierungen jeder Art. Einzelne der Artikel (s. z. B. γίνεσθαι, διδόναι, εἶναι, θέσις, λαμβάνειν) haben auf diese Weise einen nicht unbeträchtlichen Umfang angenommen, andere, wie z. B. Ἀπολλώνιος, Ἀρχιμήδης, Εὐκλείδης, Πάππος, enthalten ganze Bibliographien, wieder andere, wie z. B. die von Hultsch mehrfach selbst hervorgehobenen ἀναλύειν, ἀνάλυσις, λῆμμα, λόγος, στοιχεῖον, τόπος, geben sonst bemerkenswerte Aufschlüsse. Wer die Sorgfalt, mit der der Index zusammengestellt ist, im einzelnen verfolgt, der wird es verstehen, wenn Hultsch sagt, er habe auf diese Arbeit ein ganzes Jahr verwendet. Eine derartige Erschließung, eine derartige systematische Verarbeitung der mathematischen Sprache der Griechen war vor Hultsch überhaupt noch nie geleistet worden. Und da bei Pappus fast alle Gebiete der Mathematik, der reinen und der angewandten, berührt werden, und überdies Mathematiker aus den verschiedensten Jahrhunderten zum Wort kommen, so ist dieses Wörterbuch von ganz besonderem Werte.

Daß eine derartige Arbeit zugleich eine gesicherte Grundlage abgibt für die Textkritik überhaupt, das konnte Hultsch gleich selbst in der Notiz *Zur Terminologie der griechischen Mathematiker* (1879) dartun. In seiner Ausgabe der *Astronomie* Theons von Smyrna hatte H. Martin an einer bestimmten Stelle geglaubt, das handschriftliche ἀπολάβωμεν in ὑπολάβωμεν — „wenn wir annehmen" — verwandeln zu müssen. Hultsch stellte aber die Lesart ἀπολάβωμεν — „wenn wir (gleiche Kreisbogen)

abschneiden" — wieder her, da dieser Gebrauch von ἀπολαμβάνειν im Index zu Pappus durch viele Beispiele gesichert sei.

An den Index graecitatis schließt sich (S. 126—132) eine Zusammenstellung der verschiedenen Wortabkürzungen und tachygraphischen Zeichen an, die im Vaticanus, besonders in den am Rande befindlichen Scholien, benutzt worden sind. In der soeben erwähnten Notiz *Zur Terminologie der griechischen Mathematiker* hebt Hultsch hervor, daß die neueren paläographischen Werke keinen Anlaß gehabt hätten, diese Abkürzungen und Zeichen der mathematischen Texte zu berücksichtigen. Man wird aber kaum fehlgehen, wenn man annimmt, daß Hultsch diese sehr dankenswerte Zusammenstellung unternommen hat in der Erinnerung an die Mühe, die er wiederholt selbst auf die Entzifferung der oft ganz rätselhaften Abkürzungen hatte verwenden müssen, und über die er z. B. in seiner Abhandlung über den Heronischen Lehrsatz ausführlich berichtet hat. Auf Grund des von ihm gesammelten Materials war er nun auch in der Lage, in jener terminologischen Notiz ein tachygraphisches Zeichen, das Martin in dem Fragmente des Serenus (S. 340 der vorhin genannten Theon-Ausgabe) als ἐπιφανείας gelesen hatte, als das für ὅτι festgestellte Zeichen anzusprechen, das offenbar vom Rande einer älteren Handschrift hinweg an falsche Stelle mitten in den Text geraten war. Und so konnte Hultsch die Stelle bei Martin berichtigen.

Erwähnen wir jetzt noch ein mathematisches Sachregister (S. 133 bis 142), in dem sich allenthalben auch wieder Verweisungen auf den Index graecitatis finden, und zum Schlusse noch ein Verzeichnis der (älteren und neueren) Autoren (S. 143—144), so haben wir nun endlich den Inhalt der Pappus-Ausgabe erschöpft.

Das Urteil, in das einst Cantor seine Besprechung zusammengefaßt hat, darf auch hier wiederholt werden: Hultsch hat uns mit einer klassischen Ausgabe eines klassischen Schriftstellers beschenkt. Und so glaube ich auch, keinem Vorwurfe zu begegnen, wenn ich mich so lange von diesem Meisterwerke habe festhalten lassen. Ja, es ist selbst jetzt noch nicht möglich, sogleich zu einem anderen Thema überzugehen, da wir durchaus auch noch die Selbstanzeige kennen lernen müssen, die Hultsch im Repertorium von Königsberger und Zeuner (1879) hat erscheinen lassen.[1])

„Die hohe Bedeutung," so beginnt Hultsch, „welche die mathematische Sammlung des Pappus von Alexandria als Quellenwerk auch für die neuere mathematische Forschung hat, ist zu keiner Zeit seit dem Wiedererwachen der Wissenschaften verkannt worden. Nachdem Commandino im Jahre 1588 seine lateinische Übersetzung

1) Die in Boncompagnis Bullettino (1879) ist im wesentlichen eine Inhaltsangabe und darf daher als erledigt betrachtet werden.

nebst ausführlichen Kommentaren veröffentlicht hatte, verbreitete sich eine gewisse, freilich nur lückenhafte Kenntnis von dem Inhalte des Werkes bei den Forschern auf historisch-mathematischem Gebiete. Mehr als hundert Jahre waren seit dem Erscheinen der Commandinoschen Bearbeitung vergangen, als die Erinnerung an Pappus von neuem wachgerufen und das Studium des Originaltextes zum erstenmal versucht wurde von Wallis und Halley."

Und nun folgt eine kurze Übersicht über alle die verschiedenen Bearbeitungen bis herab zu Chasles, die in der Vorrede zum ersten Bande ausführlich besprochen worden sind. Allerdings wurde durch diese Veröffentlichungen

„das Bedürfnis nach einer Gesamtausgabe des Originaltextes eher beiseite geschoben als befördert. Man schien ein stillschweigendes Übereinkommen dahin getroffen zu haben, daß alles, was in dem Sammelwerke des Pappus für die Gegenwart von Wichtigkeit ist, nunmehr behandelt sei und als Gesamtausgabe die Bearbeitung Commandinos genüge. Allein anderseits erhoben sich doch manche Stimmen für die vollständige Veröffentlichung des griechischen Textes, da nur auf diese Weise eine zuverlässige Beurteilung der bisher veröffentlichten Fragmente möglich sei. Denn wie konnte man mit Sicherheit über die Methode urteilen, nach welcher die Lemmen des Pappus zur Wiederherstellung einer verloren gegangenen Schrift zu benutzen seien, wenn man nicht alle übrigen Teile des Sammelwerkes zur Vergleichung herbeizog? Wie konnte man über so viele schwierige, dunkle und mehrdeutige Ausdrücke klar werden, wenn man nicht einen gut beglaubigten Text vor sich hatte und mit Hilfe eines genauen lexikalischen Nachweises für jeden einzelnen Fall alle ähnlichen Stellen zugleich in Betracht zu ziehen imstande war? Die Beantwortung dieser Fragen wird für niemanden zweifelhaft sein, nachdem die vollständige Ausgabe vorliegt".

Hultsch hebt nun zunächst das literarhistorische Interesse hervor, das der Pappus-Ausgabe innewohnt. Einige bisher unbekannte Namen alexandrinischer Mathematiker sind jetzt ans Licht gezogen worden:

„In dem *Index Scriptorum in Pappi mathematica collectione laudatorum*, welchen Fabricius *Bibliotheca Graeca* lib. 5 cap. 22 gibt, fehlen die Namen der gelehrten Freunde des Pappus, Pandrosion und Megethion, welchen zwei Bücher der Sammlung gewidmet sind, ferner die auch anderweitig bekannten alexandrinischen Mathematiker Dionorus und Menelaus. Ein zu Pappus Zeit namhafter alexandrinischer Gelehrter hieß Hieraius, nicht Hieronymus (wie bei Commandino und Fabricius). Ferner der Verfasser der Paradoxa, welche im dritten Buche, Propos. 28—42, behandelt werden, Erycinus, nicht Erycemus."

Sodann sind mehrere fast verschollene Werke wieder zu unserer Kenntnis gelangt,

„eine Menge einzelner Fragen werden fortan durch Eindringen in den Originaltext (oft ist es ja nur eine Zeile, oft nur ein Wort, worin die Entscheidung liegt) klarer sich darstellen lassen. Auch das ist gewiß nicht gering anzuschlagen, daß wir aus Pappus Sammlung einen überraschenden Gesamtüberblick über die Blüte der mathematischen Studien in dem Zeitalter des Schriftstellers erhalten; ja dieser Überblick erstreckt sich selbst noch auf die Zeit nach Pappus bis zum Ersterben der antiken Kultur in Ägypten, wenn anders unsere Vermutung richtig ist, daß auch nach Pappus Tode seine Schule noch eine Zeitlang fortblühte, und daß die Sammlung,

wie sie jetzt vorliegt, einige und zwar sachlich wertvolle Zusätze eines oder mehrerer späteren Bearbeiter enthält".

Sodann bietet für die Geschichte der **Entwickelung der griechischen Mathematik** kaum irgend ein anderes Quellenwerk so reichliches und mannigfaltiges Material als die Sammlung des Pappus.

„Wenn von den *Elementen* der alten Mathematik gesprochen wird, so denkt man mit Recht vorerst an Euklid, der ja schon im Altertume ὁ στοιχειωτής schlechthin genannt zu werden pflegte. Doch erkannte man nicht minder bereits im Altertume, daß Euklids Bücher durchaus nicht sämtliche Elemente der Mathematik umfassen. Es kann in dieser Beziehung vergleichsweise auf die von Simson und Späteren erweiterten Ausgaben des Euklid verwiesen werden, welche in England noch heutigentags dem mathematischen Unterrichte zugrunde gelegt werden. Ganz ähnlich ließe sich ein griechischer erweiterter Euklid in der Weise herstellen, daß an den geeigneten Stellen diejenigen ergänzenden Elementarsätze eingefügt würden, von denen sich nachweisen läßt, daß sie von alten Mathematikern bereits angewendet worden sind. Und gerade bei Pappus findet sich eine große Zahl solcher Sätze ausdrücklich mitgeteilt, während andere von Commandino, Simson und dem Herausgeber durch Vervollständigung der bei Pappus oft auf das äußerste abgekürzten Beweise restituiert worden sind. Aber selbst ein derartig erweiterter Euklid würde durchaus nicht alles enthalten, was die fortgeschrittene Mathematik des Altertums unter dem Namen der Elemente zusammenfaßte. Denn als στοιχεῖα im weiteren Sinne wurde eine Reihe grundlegender Werke, wie die *Conica* des Aristäus und vielleicht auch die des Apollonius, die *Phaenomena* Euklids, die Schrift des Apollonius über die ebenen Örter und andere bezeichnet, im Gegensatze zu welchen dann die *Elemente* Euklids τὰ πρῶτα στοιχεῖα genannt wurden (der nähere Nachweis hierüber ist aus den im Index graecitatis unter στοιχεῖον angeführten Stellen zu entnehmen).

Ferner sind für die Entwickelungsgeschichte der griechischen Mathematik von besonderem Interesse solche Partien bei Pappus, wo eine Einzelfrage der elementaren Geometrie nach allen Seiten hin erweitert und möglichst abschließend behandelt wird. Offenbar wurde also schon im Altertum ein Anlauf genommen, von der Behandlung des einzelnen Falles, bei welchem allein die älteste Schule stehen geblieben war, überzugehen zur allgemeinen Betrachtung aller möglichen Fälle, und somit der neueren Methode sich zu nähern."

Als Beispiele hierfür hebt Hultsch die schönen Untersuchungen über die isoperimetrischen Figuren hervor, die sich im fünften Buche befinden, und die Anfänge kombinatorischer Betrachtungen, die im siebenten Buche in der Schrift des Apollonius über die Berührungen deutlich wahrzunehmen sind.

Und nun bietet Hultsch seinen Lesern eine Überraschung ganz eigener Art. Denn so dürfen wohl die Auszüge genannt werden, die er zum Schlusse aus einer unveröffentlichten Jugendschrift Carl Gustav Jacobis mitteilt:

„Die Abhandlung umfaßt 22 Quartblätter und trägt den Titel: *Pappi Alexandrini collectiones mathematicas descripsit explicavit C. G. Jacobi, semin. philol. sod., Berolini, Jan. mense a. 1824.* Wir haben es also mit einer Seminararbeit zu tun, welche Jacobi bald nach Erfüllung seines 19. Lebensjahres (er ist am 10. Dez. 1804

geboren) abgefaßt hat. Dem Berichterstatter ist die Schrift schon seit längerer Zeit durch die Güte des Herrn Professor Borchardt in Berlin mit der Ermächtigung überlassen worden, daraus zu veröffentlichen, was noch jetzt von Interesse scheine."

Auf eine in Form einer Dedikation gehaltene Einleitung läßt Jacobi aus der *Bibliotheca Graeca* des Fabricius Notizen über das Zeitalter und die Werke des Pappus folgen, um dann zu einer ausführlicheren Besprechung der Übersetzung Commandinos überzugehen, wobei er zwar die Brauchbarkeit dieser Arbeit anerkennt, aber auch nicht unterläßt, die Wünschbarkeit einer Herausgabe des griechischen Textes zu betonen. Die mit eigenen, oft recht beachtenswerten Bemerkungen und Konjekturen versehene Besprechung Jacobis bezieht sich besonders auf das dritte Buch des Pappus; am Schlusse wendet er sich aber auch noch zum vierten und siebenten. Indessen müssen wir uns hier doch darauf beschränken, auf die Auszüge zu verweisen, die Hultsch mitgeteilt und mit verbindendem Texte und mit Anmerkungen versehen hat. —

War Hultsch schon durch die Metrologie und sodann namentlich durch die Heron-Ausgabe veranlaßt worden, weite Gebiete der antiken Mathematik zu durchstreifen — es darf aber hinzugefügt werden, daß er dazu vielfach auch schon ganz direkt durch Polybius angeregt wurde —, so führte ihn in noch viel höherem Maße die Beschäftigung mit Pappus dazu, die Gesamtheit der mathematischen Wissenschaften des Altertums, und nicht nur der Griechen, sondern auch der Römer und ferner der Ägypter, der Babylonier und der übrigen Völker des Orients zum Gegenstand seiner Forscherarbeit zu machen. In der Tat spiegelt sich ja in der *Collectio* die ganze niedere und höhere Mathematik der Alten wider, die reine wie die angewandte. Auf allen diesen Gebieten treffen wir Arbeiten von Hultsch an, seien es selbständige Publikationen, seien es Besprechungen der Arbeiten anderer. Aber auch in diese Besprechungen, die in den verschiedensten Zeitschriften zerstreut sind, und deren Zahl außerordentlich groß ist, hat Hultsch vielfach wertvolle selbständige Untersuchungen eingeflochten. Und nicht unerwähnt dürfen ferner die Beiträge bleiben, die Hultsch „in den Büchern anderer niedergelegt hat, die ihn als den besten Kenner dieses Wissensfeldes um seine Mitarbeit ersuchten" (Lipsius).

Alle diese zahlreichen Publikationen einzeln zu besprechen, kann natürlich nicht Aufgabe des Biographen sein, das würde ja auch schon der zur Verfügung stehende Raum nicht zulassen. Wir werden also versuchen, die mathematisch-historischen Arbeiten von Hultsch, soweit sie nicht schon im Zusammenhange mit den Ausgaben von Heron und Pappus besprochen worden sind, in Gruppen zusammenzufassen und über diese allemal eine orientierende Übersicht zu geben. Dabei wird sich

jeweilen ganz von selbst Gelegenheit bieten, bei einzelnen Arbeiten ausführlicher zu verweilen.

Eine erste Gruppe betrifft die reine Mathematik, und zwar zunächst die Arithmetik. Von diesem Gebiete, soweit es sich um Griechen und Römer handelt, hat HULTSCH selbst eine zusammenfassende Darstellung verfaßt, und zwar in dem Artikel *Arithmetica* (sc. *ars*) in PAULY-WISSOWAS Encyklopädie. Dieser Artikel umfaßt nicht weniger als 50 Spalten, und er gehört unstreitig zum Besten, was seit NESSELMANN über die Arithmetik der Alten geschrieben worden ist. Nach einer Übersicht über die vorhandene Literatur und nach einer Besprechung des Unterschiedes zwischen *λογιστική* und *ἀριθμητική* (Rechenkunst einerseits und allgemeine Arithmetik einschließlich Zahlentheorie und unbestimmte Analytik anderseits) wendet sich der Verfasser zunächst zur *Rechenkunst der Griechen*. Er behandelt das Kopfrechnen, das Fingerrechnen, das instrumentale Rechnen mit dem Abacus (das letztere unter Verweisung auf seinen Artikel *Abacus* bei PAULY-WISSOWA), um dann zu einer ausführlichen Darstellung des Rechnens vermittels der Zahlzeichen überzugehen. Wir werden durch übersichtliche, der Literatur, z. B. EUTOKIUS, entlehnte Beispiele darüber orientiert, wie die Griechen mit den als Zahlzeichen dienenden Buchstaben addierten, subtrahierten, multiplizierten und dividierten, und wie sich dabei durch die Praxis ganz von selbst eine Anordnung der Zahlzeichen herausbildete, die dem Stellenwert im dekadischen System entsprach. Es folgt sodann die Besprechung des Sexagesimalsystems und der sexagesimalen Bruchrechnung. Für die Brauchbarkeit des Systems macht HULTSCH „die praktische Bezeichnung der Ganzen sowohl als der Teile" geltend. „Vor die Einheiten der Peripherie wurde *μοῖραι*, vor die des Diameters und der Sehnen *τμήματα* gesetzt, wobei statt *μοῖραι* auch die Abkürzung $\mathring{\mu}$ eintrat (das später übliche Zeichen des Grades ^{0} scheint hierauf zurückzuführen zu sein)." Die gewöhnliche Bezeichnung der Brüche lehnte sich eng an die Aussprache derselben an. Bei der Besprechung dieser Bezeichnung hatte HULTSCH wiederholt Veranlassung, auf eigene Arbeiten (*Metrol. script.* I, 174; Jahrb. f. Phil. 1893, 750; *Histor. Unters. f.* FÖRSTEMANN, Leipzig 1894, 44, 54, u. a.) hinzuweisen. Ausführlich wird sodann das Wurzelausziehen behandelt. Die Darstellung stützt sich einerseits auf die bekannten Werke von NESSELMANN, FRIEDLEIN und GÜNTHER, namentlich auch auf GÜNTHERS große Abhandlung *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* vom Jahre 1882, anderseits aber auf Untersuchungen, die HULTSCH selber angestellt hat. In erster Linie ist hier seine Göttinger Abhandlung *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei* ARCHIMEDES vom Jahre 1893 zu nennen. In dieser Abhandlung bespricht HULTSCH zunächst die Näherungswerte für $\sqrt{2}$, die

auf PYTHAGORAS, PLATON nnd besonders auf ARISTARCH von Samos zurückgehen. Bei ARISTARCHS Berechnung spielt auch wieder jenes Lemma eine Rolle, auf das PAPPUS im fünften Buche der *Collectio* hinweist, nnd das HULTSCH in der früher besprochenen Münchener Handschrift unter dem Namen des AUTOLYKUS aufgefunden hatte. Es folgt sodann eine kritische Besprechung der Näherungswerte für $\sqrt{3}$ und andere Wurzeln, die THEODORUS von Kyrene dargestellt und als irrational bewiesen hat, nnd über die uns PLATON im *Theaetet* berichtet. Und nun wendet sich HULTSCH zu ARCHIMEDES und besonders zn der Ungleichheit $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$, die dieser bekanntlich in seiner *Kreismessung* ohne weitere Begründung als fertiges Resultat mitgeteilt hat. Dem Versuche, dieses Rätsel zu lösen, mit dem sich schon so viele (siehe die genannte Abhandlung von GÜNTHER) beschäftigt hatten, ist der größte Teil der Abhandlung von HULTSCH gewidmet. HULTSCH nnternimmt es zunächst, den ganzen Beweis des dritten Satzes der Kreismessung derart zu ergänzen, daß die von ARCHIMEDES weggelassenen Zwischenglieder seiner Schlußfolgerungen je an Ort und Stelle (in Kursivschrift) eingefügt werden. Um nun aber zu erklären, auf welchem Wege ARCHIMEDES zu den vorkommenden Annäherungen von Qnadratwnrzeln, insbesondere von $\sqrt{3}$, gelangt ist, schickt HULTSCH einige Hilfssätze (λήμματα) voraus, die nach seiner Meinung, „wenn anch nicht der Form, so doch dem Inhalte nach mit Sätzen sich decken, die von ARCHIMEDES als erwiesen vorausgesetzt worden sind, ehe er an seine Wurzelausrechnungen heranging". Von diesen Hilfssätzen — es sind ihrer sechs — lassen sich die drei letzten in die Ungleichheit

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$$

zusammenfassen, nnd aus dieser leitet nun HULTSCH die näherungsweise Berechnung der in der *Kreismessung* auftretenden Quadratwurzeln ab. Am Schlusse seiner Abhandlung, die in ihren zahlreichen Noten eine Fülle wertvollen historischen Materiales darbietet, wendet er sich sodann noch zu der Erörterung, wie ARCHIMEDES aus großen ganzen Zahlen die Quadratwurzel ausgezogen und wie er für die in der Rechnnng anslaufenden Brüche bequeme Näherungen bestimmt hat. Und endlich untersucht er noch, wie nun ARCHIMEDES zuletzt auf die Annäherung $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ gekommen ist. Diese Untersuchung hat HULTSCH dann 1894 fortgesetzt in der Abhandlung *Zur Kreismessung des* ARCHIMEDES. Es galt zu zeigen, wie wohl ARCHIMEDES zu jenen einfachen Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ gekommen war, nachdem ihn seine Ausrechnnngen znnächst doch auf die weit komplizierteren Umgrenzungen

$$3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} > \pi > 3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$$

geführt hatten. HULTSCH verfolgt sodann die Geschichte der Kreismessung von APOLLONIUS und PHILON (nach den Berichten des EUTOKIUS) an bis auf LUDOLPH VAN CEULEN und ADRIAAN METIUS, um zu zeigen, wie die Methode des ARCHIMEDES im Laufe der Jahrhunderte zu immer vollkommeneren Annäherungen geführt hat.

Mit der Ermittelung von Näherungswerten von Quadratwurzeln bei den Alten hat sich HULTSCH auch noch in anderen Arbeiten beschäftigt, so z. B. in der Abhandlung *Eine Näherungsrechnung der alten Poliorketiker* (1897), in der er Stellen bei POLYBIUS (z. B. IX 12 und IX 19), die sich auf die Berechnung der Länge von Sturmleitern und auf die Messung der Höhe einer Mauer aus der Ferne beziehen, von diesem Gesichtspunkte der Näherungsrechnung aus bespricht. Die Bemerkungen, die HULTSCH dabei über den streng mathematischen Sprachgebrauch und den des praktischen Lebens hinzufügt, machen die kleine Abhandlung auch für den Philologen interessant. Hier findet sich z. B. auch der Hinweis auf den Gebrauch von *ἀναλαμβάνειν* bei POLYBIUS, von dem S. 359 Anm. 1 die Rede war.

Doch kehren wir jetzt wieder zu dem Sammelartikel *Arithmetica* zurück. Auf die Logistik folgt nun die allgemeine Arithmetik und Zahlentheorie. Die Zahlenreihe ist zuerst von den Pythagoreern nach verschiedenen Richtungen hin untersucht worden. Die Unterscheidung der geraden und ungeraden Zahlen hatte sie schon früh dazu geführt, daß man durch fortgesetzte Summierung der ungeraden Zahlen der Reihe nach die Quadrate aller Zahlen erhalten kann. Dabei ergab sich die wichtige Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$, die dem PYTHAGORAS vielleicht den Weg zu seinem Lehrsatz gezeigt hat. Eine besondere Stellung nahm in der pythagoreischen Philosophie die Zehnzahl ein. Sie hieß die vollkommene (*τέλειος*), weil sie alle Zahlen zu umfassen schien. Ihre Vollkommenheit hat man namentlich in ihren mannigfachen Beziehungen zu den Zahlen 1 bis 9 nachzuweisen gesucht. „Zunächst faßte man sie auf als die Summe der vier ersten Glieder der Zahlenreihe. Das war die heilige *τετρακτύς* der Pythagoreer, auf welche sie ihren Schwur leisteten, dabei des Stifters ihrer Schule, als des Erfinders dieser Geheimlehre, gedenkend.“ Auf der Zehnzahl hat auch PLATON die nach ihm benannte merkwürdige Zahl aufgebaut, in die er so viel hineingeheimnißt hat. Dieser Zahl und den mit ihr zusammenhängenden Untersuchungen hat HULTSCH selbst mehrere Arbeiten gewidmet, vor allem die inhaltreiche Abhandlung *Die geometrische Zahl in PLATONS VIII. Buche vom Staate* aus dem Jahre 1882. Zu dieser Arbeit war HULTSCH durch die Schrift von J. DUPUIS *Le nombre géométrique de PLATON*, Paris 1881, veranlaßt worden, nachdem er sich schon früher, 1873, in der Note *Zu PLATONS Timaeos* mit der Frage beschäftigt und sie damals als unlösbar angesehen hatte. HULTSCH verfolgt nun genau, mit

philologischer wie mit mathematischer Sorgfalt, alle die geheimnisvollen Bedingungen, die Platon seiner Zahl auferlegt hat, und die zu so vielen Meinungsverschiedenheiten, nicht nur in bezug auf die Größe, sondern sogar auch in bezug auf die Bedeutung der Zahl, geführt haben, und er kommt zu dem Schlusse, daß diese Bedingungen am besten durch die Zahl 3600^2 erfüllt werden, während z. B. Tannery 2700 und Dupuis 21600 als Gesamtzahl angenommen hatten.[1]) Nach der Auffassung von Hultsch handelt es sich dabei um 3600^2 Tage, d. h. nach runder Schätzung um 36000 Jahre, die die große, auch von Platon so genannte Periode bilden. Für den Wert 3600^2 spricht nach Hultsch auch die an das pythagoreische Dreieck erinnernde Zerlegung der Zahl in $3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4$, sowie ihre Einordnung in das Sexagesimalsystem in der Form 60^4. Sodann sucht Hultsch, unter Berufung auf Varro und Censorinus *(De die natali)*, aus der von ihm bestimmten Platonischen Zahl, die ja auch die „hochzeitliche" heißt, da sie die Heiraten regelt, kürzere Zeitperioden herauszufinden, die, mit Platon zu reden, für „das menschlich Erzeugte" bedeutungsvoll sind. Den Schluß der Abhandlung bilden Betrachtungen über die „vollkommene Zahl", die Platon an derselben Stelle anführt, und zwar als „dem göttlich Erzeugten" eigentümlich.

Mit der Platonischen Zahl hat sich Hultsch auch noch später beschäftigt: zunächst 1886, als R. Schoell zum erstenmal Fragmente aus den Kommentaren des Proklus zu Platons Büchern vom Staate herausgab. Unter dem Titel *De numero Platonis a Proclo enarrato disputatio* fügte damals Hultsch auf Wunsch des Herausgebers einige Erläuterungen zu der Ausgabe hinzu. Und sodann 1901 im dritten der *Drei Exkurse,* die sich im zweiten Bande der von W. Kroll auf Grund der neu aufgefundenen Vatikanischen Handschrift besorgten Ausgabe von *Procli Diadochi in Platonis rem publicam commentarii* befinden. Proklus behandelt die geometrische Zahl Platons unter den Gesichtspunkten: ἀριθμητικῶς, γεωμετρικῶς, μουσικῶς, ἀστρονομικῶς, διαλεκτικῶς. „Im ganzen", sagt Hultsch bei seiner Besprechung der arithmetischen Erklärung, „hat der bei Proklos überlieferte Versuch, die geometrische Zahl Platons zu erklären, zu keinem befriedigenden Ergebnisse geführt, aber nachdem so viele andere Versuche von den Neueren angestellt worden sind, werden weitere Untersuchungen jedenfalls die Aufschlüsse berücksichtigen müssen, die Proklos über einzelne Punkte der schwierigen Frage gegeben hat." Hultsch betrachtet also selbst die ganze Frage über den geheimnisvollen ἀριθμὸς γεωμετρικός als noch nicht völlig abgeschlossen.

1) In der kürzlich erschienenen Schrift von G. Albert, *Die Platonische Zahl als Präzessionszahl,* Leipzig 1907, wird $3600 \cdot 2592$ als Wert angenommen.

Wir kehren nun wieder zu dem Artikel *Arithmetica* bei PAULY-WISSOWA zurück. „Nicht zu verwechseln mit dem pythagoreischen τέλειος ἀριθμός sind die τέλειοι ἀριθμοί, welche zuerst in EUKLIDS *Elementen* (VII defin. 22, IX propos. 36), dann bei NIKOMACHOS (*Arithm.* I 16, 2), THEO von Smyrna (45 f. HILLER) und anderen erscheinen." Gemeint sind die Zahlen der Form $(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n)\, 2^n = (2^{n+1} - 1)\, 2^n$, vorausgesetzt, daß $2^{n+1} - 1$ eine Primzahl ist. Die so gebildeten Zahlen haben die Eigenschaft, gleich der Summe ihrer Teiler zu sein. Mit diesen Zahlen beschäftigt sich HULTSCH in der Göttinger Abhandlung von 1895, *Erläuterungen zu dem Berichte des JAMBLICHOS über die vollkommenen Zahlen.* NIKOMACHUS hatte in seiner ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή (I, 16, 2—7, S. 39 ff. der Ausg. v. HOCHE) die vier ersten vollkommenen Zahlen $2\,(2^2 - 1) = 6$, $2^2\,(2^3 - 1) = 28$, $2^4\,(2^5 - 1) = 496$, $2^6\,(2^7 - 1) = 8128$ ermittelt und dazu bemerkt, daß die vollkommenen Zahlen sehr selten seien, da unter den Einern, Zehnern, Hunderten, Tausenden je nur eine Zahl dieser Art sich finde. „Diesen Gedanken hat JAMBLICHOS, der Erklärer des NIKOMACHOS, aufgenommen, indem er je eine vollkommene Zahl der ersten und der zweiten Stufe der Myriaden zuteilt und zugleich die Vermutung ausspricht, daß auch jede folgende Stufe ihre vollkommene Zahl aufweisen werde." Hier setzt nun HULTSCH ein, indem er die vier nächsten[1]) vollkommenen Zahlen $2^{12}\,(2^{13} - 1)$, $2^{16}\,(2^{17} - 1)$, $2^{18}\,(2^{19} - 1)$, $2^{30}\,(2^{31} - 1)$ berechnet und den verfrühten Analogieschluß des JAMBLICHUS korrigiert. Zum Schlusse vergleicht noch HULTSCH die von JAMBLICHUS gebrauchten Ausdrücke „erste, zweite usw. Stufe der Myriaden" mit den Bezeichnungen, die ARCHIMEDES, APOLLONIUS, DIOPHANT für hohe Zahlen verwendet haben. In einem Nachtrage, der 1897 in den Göttinger Abhandlungen erschienen ist, beschäftigt sich HULTSCH auch noch mit der neunten vollkommenen Zahl, nämlich mit der von P. SEELHOFF[2]) als solche erkannten Zahl $2^{60}\,(2^{61} - 1)$. Diese Zahl hat 37 Stellen. Nach der Bezeichnungsweise des JAMBLICHUS steht sie auf der neunten Stufe der Myriaden, so daß also die 5., 6., 7. und 8. Stufe, entgegen der Meinung des JAMBLICHUS, gar keine vollkommenen Zahlen aufzuweisen haben. „Die vollkommenen Zahlen sind also in noch weit strengerem Sinne, als NIKOMACHOS an der schon früher angeführten Stelle es erwarten konnte, äußerst selten."

Aus dem Artikel *Arithmetica* sei noch besonders hervorgehoben die lichtvolle Darstellung der Lehre von den Proportionen, den arithmetischen, geometrischen und harmonischen, eine Darstellung, die allenthalben Neues bietet und Früheres (z. B. NESSELMANN) verbessert. Die Besprechung der

1) Über die fünfte vollkommene Zahl 33550336 siehe den von HULTSCH (nachträglich) erwähnten Aufsatz von M. CURTZE, Biblioth. Mathem 9_2, 1895, 39—42.

2) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 31, 1886, 174—178.

Medietäten (μεσότητες), zu denen die Proportionen in einer eigentümlichen Weise von den griechischen Mathematikern umgebildet wurden, führt vielfach wieder auf Pappus (drittes Buch) zurück. Den Schluß des Artikels, soweit er sich auf die Griechen bezieht, bildet die Darstellung der unbestimmten Analytik. Auch zu diesem Gebiete der Arithmetik hat Pythagoras den ersten Zugang eröffnet, und zwar durch die unbestimmte Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Eine Fundstätte für Lösungen dieser Gleichung bieten Platon und Proklus, letzterer in seinem Kommentare zu Platons Büchern vom Staate (siehe die Ausgaben von Schoell und Kroll und die von Hultsch hinzugefügten Erläuterungen). Die weitere Verfolgung der Frage führt zu Diophant, und mit der Erwähnung dieses Namens „sind wir an das Ende der Leistungen des Altertums im Gebiete der unbestimmten Analytik gekommen. Weit seine Vorgänger überragend hat er ganz neue Wege des arithmetischen Denkens eröffnet, neue Bezeichnungen geschaffen, allenthalben vom einzelnen Falle sich erhoben zur allgemeinen Anschauung, endlich auch da, wo er selbst innehielt, die Bahnen gezeigt, auf denen die Neueren weiter fortgeschritten sind. Alles das wird unter Diophantos zu behandeln sein." Ich muß mich freilich hier mit dieser allgemeinen Charakteristik des großen Alexandriners begnügen. Auf den 21 Spalten umfassenden Artikel Diophantos bei Pauly-Wissowa im einzelnen einzutreten, ist des Raumes wegen nicht möglich. Immerhin aber darf darauf hingewiesen werden, daß Hultsch in diesem Artikel (§ 7) ganz besonders die Verwandtschaft der diophantischen mit der ägyptischen Rechnungsweise hervorhebt und namentlich die Sequem- und Hau-Rechnungen der alten Ägypter und die Elemente ihrer Teilungsrechnung zur Vergleichung heranzieht. Freilich sind es nur „gewisse Grundzüge und elementare Übungen, in denen Diophantos sich als abhängig von jener älteren [der ägyptischen] Tradition zeigt; darüber hinaus aber tritt seine geniale schöpferische Tätigkeit unzweideutig hervor".

Auf die Arithmetik der Griechen folgt als letzter Abschnitt in dem Artikel *Arithmetica* die *Rechenkunst und Arithmetisches bei den Römern.* „Im Rechnen sind die Römer nie weiter gegangen, als es der alltägliche Bedarf des privaten und öffentlichen Lebens verlangte." Soweit dieses Rechnen ein Rechnen mit Geld oder mit Maßen war, verweist Hultsch selbst auf seine *Metrologie.* Außerdem sind zu diesem letzten Abschnitte zu nennen seine Abhandlungen *Die Bruchzeichen bei Vitruvius* (1876) und *Ein Beitrag zur Kenntnis des volkstümlichen Rechnens bei den Römern* (1889). In der ersten handelte es sich namentlich darum, die ganz korrumpierten Zahlen- und Bruchzeichen wiederherzustellen, die sich in Vitruvs Schrift *De architectura* bei den Maßbestimmungen gewisser Kriegsmaschinen finden.

Dem Artikel *Arithmetica* wäre nun der Artikel *Geometria*[1]) gegenüberzustellen. Dieser zwar im Satz befindliche, aber noch nicht veröffentlichte Artikel umfaßt freilich nur neun Spalten, er ist aber, wie HULTSCH selbst sagt, zu ergänzen durch die Artikel über die einzelnen Geometer. Von diesen wird gleich die Rede sein. HULTSCH referiert in dem Artikel *Geometria* zunächst über die Entwickelung der älteren Geometrie nach dem bekannten Abriß, den PROKLUS „aus der *μαθημάτων θεωρία* des GEMINOS entnommen und dieser wiederum von dem Peripatetiker EUDEMOS von Rhodos, einem Zeitgenossen des THEOPHRAST, entlehnt hatte", um dann zu einigen Materien allgemeinen Inhalts, die sich nicht streng an einzelne Autoren anschließen, überzugehen. Dazu gehört eine kurze Besprechung der Methoden der geometrischen Beweisführung, der analytischen, der trennenden (*διαιρετική*) und der apagogischen, zu denen nach PAPPUS (VII, 634—636) noch die synthetische als Gegenstück der analytischen zu fügen ist. Bei Erwähnung der *γεωμετρίας ὑποτύπωσις* des ANAXIMANDER (611—545) entscheidet sich HULTSCH gegen BRETSCHNEIDER für die Übersetzung „Abriß" der Geometrie, worin ihm übrigens schon W. SCHMIDT unter Verweisung auf des PROKLUS *ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* und des SEXTUS EMPIRICUS *Πυρρώνειοι ὑποτυπώσεις* vorausgegangen war. Von den drei großen Problemen des Altertums, Kreisquadratur, Winkelteilung, Würfelverdoppelung, wird am ausführlichsten und mit besonderer Benutzung der Arbeiten von A. STURM das dritte behandelt, es nimmt fast die Hälfte des ganzen Artikels ein. Den Schluß bilden Erörterungen über die geometrischen Voraussetzungen (*ἀρχαί*), die *ὑποθέσεις*, die *αἰτήματα* und die *ἀξιώματα*. Die Stelle, an der sich PROKLUS darüber ausspricht (*PROCL. in EUCL.* 75, 27ff.) ist, „wie unzählige andere, aus GEMINOS geschöpft".

Unter den Artikeln über die einzelnen Geometer, die mit *Geometria* zusammen in der Realencyklopädie einen Überblick über die Geschichte

1) Herr Prof. WISSOWA hat die große Freundlichkeit gehabt, mir ein vollständiges Verzeichnis der sämtlichen Beiträge von HULTSCH zur Realencyklopädie zusammenzustellen. Obwohl diese erst bis zu *Eutychos* vorgeschritten ist, so hat HULTSCH doch noch darüber hinaus mehrere Artikel vorbereitet. Die aus dem Buchstaben G, darunter namentlich *Geometria*, hat mir Herr Prof. KROLL, als Nachfolger von Herrn WISSOWA, in einem Abzuge freundlichst zur Verfügung gestellt. Beiden Herren danke ich auch an dieser Stelle herzlich für ihre Hilfe. Mit Erlaubnis des Herrn WISSOWA entnehme ich seinem Schreiben überdies noch folgende charakteristische Stelle: „HULTSCH war das Ideal eines Mitarbeiters, nicht nur stets auf den Tag pünktlich und akkurat bis auf den I-Punkt seiner geradezu kalligraphisch schönen Manuskripte, sondern auch von der größten Opferwilligkeit; mehr als einmal ist er in zwölfter Stunde für behinderte oder unpünktliche Mitarbeiter eingesprungen, z. B. mit dem großen und inhaltreichen Artikel *Astronomia*, der eigentlich gar nicht in sein Ressort gehörte."

der griechischen Geometrie geben, stehen natürlich im Vordergrnnde: Eudoxos (20 Spalten), Eukleides (49 Sp.), Archimedes (32 Sp.) und Apollonios (10 Sp.). Ich würde aber den zur Verfügung stehenden Raum weit überschreiten, wollte ich auf eine ausführlichere, der Bedeutung dieser Artikel angemessene Besprechung eintreten, und so muß ich mich hier darauf beschränken, einige wenige Einzelheiten herauszugreifen. Entgegen Susemihl, dem sich in der 3. Auflage auch Cantor angeschlossen hat, hält Hultsch für die Lebenszeit des Eudoxus an der früheren Bestimmung 408—355 fest. Ausführlich weiß er sodann über die Lebensverhältnisse des Eudoxus zu berichten. Von besonderem Interesse ist das Verhältnis von Eudoxus zu Euklid, von dem natürlich in beiden Artikeln gehandelt wird. „Das ganze V. Buch der *Elemente* hat Eukleides (s. d. § 7. 15) von Eudoxos übernommen, insbesondere auch die Lehre von den ὁμογενῆ μεγέθη, seien diese nun kommensurable oder inkommensurable." Für wahrscheinlich hält es Hultsch, daß auch Teile des VI. Buches, insbesondere die Sätze 29 und 30, dem Eudoxus zuzusprechen seien. Etwa die Hälfte des ganzen Artikels ist den astronomischen Leistungen des Eudoxus, des „Begründers der wissenschaftlichen Astronomie", gewidmet, insbesondere seinem Werke φαινόμενα. Darüber handelt Hultsch natürlich auch ausführlich in seinem Artikel *Astronomie* bei Pauly-Wissowa. Die astronomischen Leistungen des Eudoxus hat er überdies zum Gegenstande eines besonderen, popnlär-wissenschaftlichen Aufsatzes gemacht, der 1904 in der Zeitschrift Das Weltall erschienen ist.

Daß sich der Artikel Eukleides im wesentlichen anf Heiberg stützt, ist selbstverständlich. Als mittleres Jahr der Blütezeit Euklids setzt Hultsch 295 v. Chr. an „mit dem Hinzufügen, daß seine schriftstellerische Tätigkeit, nach den teils noch erhaltenen, teils verloren gegangenen Schriften zu schließen, auf eine lange Reihe von Jahren sich erstreckt haben muß". Euklids bedeutendstes Werk sind die *Elemente*: τὰ Εὐκλείδου bedeutet bei Archimedes (übrigens auch sonst noch bis in die spätesten Zeiten, z. B. bei Simplicius) kein anderes Werk als die στοιχεῖα, und ihr Verfasser wurde schon frühzeitig schlechtweg als ὁ στοιχειωτής zitiert. Sehr ausführlich (6 Spalten) berichtet Hultsch über die Textgeschichte der *Elemente*, über die Handschriften, die Textausgaben, die Übersetzungen und Bearbeitungen (arabische, lateinische, moderne) bis zu der „auf den ältesten noch erreichbaren Überlieferungen fußenden, nach streng kritischer Methode durchgeführten Textesgestaltung", die wir Heiberg verdanken. Die *Elemente* sind bekanntlich in 13 Bücher eingeteilt. Eine lateinische Übersetzung aber aus dem 4. Jahrhundert, die eine Einteilung in 15 Bücher aufweist, und noch andere Umstände lassen es als nicht unwahrscheinlich erscheinen, daß das umfangreiche X. Buch früher

für drei Bücher zählte, die Gesamtzahl also in der Tat 15 war. Es folgt nun eine kritische, reich mit Literatur versehene Besprechung der einzelnen Bücher, die nicht weniger als 21 Spalten umfaßt. Bei Buch II weist HULTSCH darauf hin, daß Prop. 10, „wie aus PROKLOS (*in Plat. remp.* II, 27 ff. KROLL) hervorgeht, schon vor PLATON bekannt gewesen und von den Pythagoreern zur Bildung einer Doppelreihe von ganzen Zahlen benutzt worden" ist. Mit diesen Reihen hat sich HULTSCH eingehender beschäftigt in der Abhandlung *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen* (1900), in der er den Beweis für die aus THEON (THEON ed. HILLER, 43—45; s. auch CANTOR, *Vorles.* I², 436) bekannte Entwickelung der Seiten- und Diameterzahlen gibt, und ihnen ist auch der zweite jener drei *Exkurse* in KROLLS Ausgabe des PROKLUSSchen Kommentares zu PLATON (II, 393—400) gewidmet. Es handelt sich dabei um eine Reihe von Quadraten der Art, daß die Seite jedes folgenden Quadrates gleich der Summe aus der Seite und der Diagonale des vorhergehenden ist. Nach HULTSCH hat THEON den Abschnitt über die Pythagoreische Zahlenreihe wahrscheinlich aus ADRASTUS, und zwar aus dessen Kommentar zum *Timaeus*, geschöpft, und derselben Quelle entstammt augenscheinlich auch die Darstellung bei PROKLUS.

An die Besprechung der *Elemente* schließt HULTSCH eine solche der Kommentare zu den *Elementen* an, unter denen er an erster Stelle den des HERON (s. ANARITIUS ed. CURTZE) nennt. Daran schließen sich POSEIDONIUS, GEMINUS, PORPHYRIUS, PAPPUS, PROKLUS, SIMPLICIUS usw. Eine ansehnliche Sammlung von Scholien ist von HEIBERG (EUCL. V) herausgegeben und später (1903) durch Nachträge ergänzt worden. Die Quellen der Scholien gehen zurück bis auf THEODORUS, den Lehrer PLATONS. In den Scholien zum X. Buche ist eine große Anzahl von sexagesimalen Ausrechnungen überliefert. Von diesen hat HULTSCH in der Abhandlung *Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu EUKLIDS Elementen* (1904) eine Auswahl mitgeteilt, „um einen Einblick in die Methoden zu gewähren, nach welchen die Griechen die sechs Rechnungsarten vom Summieren bis zum Wurzelansziehen ausführten".

Der Schluß des Artikels ist den übrigen Schriften des EUKLID gewidmet (11 Sp), insbesondere den *Data* und den anderen von PAPPUS im 6. nnd 7. Buche seiner *Collectio* kommentierten.

Auch der Artikel ARCHIMEDES ist in der Hauptsache auf die Arbeiten HEIBERGS gegründet. Außerdem benutzt HULTSCH (wie natürlich auch bei den anderen Geometern) SUSEMIHLS *Griechische Literaturgeschichte.* Auf eine kurze Übersicht über die äußeren Lebensverhältnisse des ARCHIMEDES folgt eine Besprechung der überlieferten Handschriften und der ver-

schiedenen Ausgaben und Übersetzungen bis zur Ausgabe von Heiberg. Daran schließt sich, als Hauptbestandteil des Artikels, eine Analyse der Schriften selbst. Hier darf besonders hervorgehoben werden, was Hultsch über die Anstrengungen des Archimedes, „bis weit über alle Grenzen menschlichen Erfassens fortzuzählen“ und „mit griechischen Worten die Zahlenreihe immer noch weiter zu führen“, berichtet, die dieser in seinen Oktadenrechnungen und im ψαμμίτης (erg. ἀριθμός) niedergelegt hat. Bei der Besprechung der *Kreismessung* bezieht sich Hultsch natürlich auch auf seine eigenen Arbeiten, die wir bereits kennen gelernt haben. Bei Pappus (Bd. I, 312) findet sich einmal die κύκλου μέτρησις mit den Worten ἐν τῷ περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας zitiert, woraus aber nicht mit Tannery zu folgern ist, daß jene nur ein Auszug aus einer größeren Schrift des Archimedes περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας sei. An einer anderen Stelle weist Pappus (Bd. I, 234) die Erfindung der archimedischen Spirale dem Konon zu, eine Ansicht, der auch Heiberg und Susemihl beistimmen. Hultsch will aber lieber hier einen Irrtum des sonst zwar sehr zuverlässigen Pappus annehmen und mit Nizze und Cantor die Spirale dem Archimedes zusprechen. Im Anschluß an ein weiteres Zitat bei Pappus (Bd. III, 1034) nimmt Hultsch an, der ursprüngliche Titel der beiden Bücher vom Gleichgewichte der Ebenen habe ἰσορροπίαι[1]) (nicht ἐπιπέδων ἰσορροπίαι) geheißen. In dieser Vermutung wird er durch W. Schmidt unterstützt, der in seiner Besprechung des Artikels (in Bursians Jahresbericht 1901) eine Stelle aus Herons *Mechanik* (Heron, *op.* II, 64, 32) hierfür heranzieht. Bei der Besprechung der Schrift über die schwimmenden Körper — περὶ τῶν ὀχουμένων sei der wahrscheinliche Titel gewesen — wendet sich Hultsch gegen die Ansicht von Heiberg, wonach der überlieferte griechische Text erst im 16. Jahrhundert aus einer lateinischen Vorlage zurückübersetzt worden sei. Die Folgezeit hat nun aber freilich Hultsch nicht recht gegeben. Denn seit dem großen Funde von Heiberg besitzen wir jetzt einen fast vollständigen Text der Schrift περὶ ὀχουμένων, von der bisher nur die lateinische Übersetzung von Wilhelm von Moerbeek vorhanden war, und es bestätigt sich nun, daß das griechische Fragment Archimedes (ed. Heiberg) II, 356—358 in der Tat unecht ist.

Sehr ausführlich behandelt sodann Hultsch das Rinderproblem, das bekanntlich Lessing in einer Wolfenbütteler Handschrift aufgefunden und 1773 herausgegeben hatte. Nach einer Zusammenstellung von Zitaten, die sich auf nicht mehr vorhandene Schriften des Archimedes beziehen

1) Siehe hierzu, was Heiberg in seiner der neuen Schrift des Archimedes gewidmeten Abhandlung (Hermes 42, 1907, 301) sagt.

(das *ἐφόδιον* gehört erfreulicherweise nun nicht mehr zu diesen), bespricht Hultsch sodann noch die astronomischen Arbeiten des großen Mathematikers und die mannigfachen mechanischen Erfindungen, die ihm zugeschrieben werden. Einer von diesen, dem sogenannten Himmelsglobus des Archimedes, hatte Hultsch schon 1877 eine besondere Besprechung gewidmet, die darin gipfelte, daß dieser Himmelsglobus wahrscheinlich durch ein hydraulisches Werk getrieben worden sei.

Aus dem Artikel Apollonios, der natürlich zum größeren Teile den *κωνικά* gewidmet ist, sei zunächst erwähnt, daß Hultsch die Geburt des Apollonius um 262 ansetzt. Sodann hebe ich die von Eutokius herrührende Notiz hervor, nach der Apollonius in seiner Schrift *ὠκυτόκιον* die Kreismessung des Archimedes dadurch verbessert habe, daß er andere Zahlen angewendet und so das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser in engere Grenzen habe einschließen können. Wie dies Apollonius wohl mit Hilfe seiner Myriadenrechnung angefangen haben mag, darüber hat Hultsch in dem bereits früher besprochenen Aufsatze *Zur Kreismessung des Archimedes* eine besondere Hypothese aufgestellt und sie rechnerisch durchgeführt. Ferner sei aus dem Artikel hervorgehoben, was Hultsch eben zu dieser Myriadenrechnung bemerkt. Zu dieser arithmetischen Untersuchung war Apollonius durch die Sandrechnung des Archimedes angeregt worden. Während sich aber Archimedes bei seinem Bestreben, die Zahlenreihe bis ins Unendliche zu verlängern und selbst die größten Zahlen noch in Worten auszusprechen, immerhin genötigt sah, neue, vom gewöhnlichen Sprachgebrauche abweichende Ausdrücke zu bilden, verzichtete Apollonius auf das Endziel des Archimedes, daß man jede ausgesprochene, auch noch so hohe Zahl durch eine andere noch höhere überbieten könne; dafür aber wies er nach, daß bis zu einer Zahlenhöhe, die schon weit über menschliches Vorstellungsvermögen hinausreicht, die Zahlen durch solche griechische Wörter, die der gewöhnlichen Sprache entlehnt sind, ausgedrückt werden können. Auch bot seine Theorie den Vorteil, daß die Zahlen nicht, wie bei Archimedes, künstlich in Oktaden zusammengepfercht, sondern ungezwungen nach Potenzen von Myriaden gruppiert wurden. Über alles das hat uns Pappus im 2. (im Anfange freilich verstümmelten) Buche seiner *Collectio* so eingehend orientiert, daß wir uns eine Vorstellung von der verlorenen Originalschrift, von der wir auch den Titel nicht kennen, sehr gut bilden können.

Den hier besprochenen Artikeln wäre nun noch eine stattliche Reihe anderer hinzuzufügen, die Hultsch in der Realencyklopädie über griechische Geometer verfaßt hat, und manche von diesen würden auch eine besondere Besprechung rechtfertigen. Allein — der Raum gestattet es nicht, und so muß ich mich damit begnügen, auf die am Schlusse des Schriften-

verzeichnisses namhaft gemachten Beiträge zu verweisen, die HULTSCH dem PAULY-WISSOWAschen Werke zugewendet hat.

Wir haben schon früher gesehen, wie HULTSCH bei der Neubearbeitung seiner *Metrologie* sich veranlaßt sah, auch die Metrologie der Ägypter und Babylonier in den Bereich seiner Forschungen aufzunehmen, und wie er dadurch auch dazu geführt wurde, der ägyptischen Rechenkunst, insbesondere der sogenannten Teilungsrechnung, seine Aufmerksamkeit zu widmen. Und von der anderen Seite führten ihn dazu die mannigfachen Beziehungen zwischen der ägyptischen und der griechischen Arithmetik, die HULTSCH selbst bei den verschiedensten Gelegenheiten auseinandergesetzt hat. Eine direkte Veranlassung, sich noch eingehender mit der Rechenkunst der Ägypter zu beschäftigen, war für ihn die Auffindung des mathematischen Papyrus von Akhmim, der 1892 von J. BAILLET veröffentlicht worden war (s. die Anzeige von HULTSCH in der Berl. phil. Wochenschr. 1894). Die aus dem 7. oder 8. Jahrhundert n. Chr. stammende griechische Schrift ist zwar um mehr als zwei Jahrtausende jünger als das Rechenbuch des AHMES, trotzdem aber „zeigt die jüngere Urkunde sich als eine aus derselben arithmetischen Schulung hervorgegangene Nachbildung der weit älteren Schrift". In der Abhandlung[1]) *Das elfte Problem des mathematischen Papyrus von Akhmim* (1894) behandelt HULTSCH eine Aufgabe, die der Verwaltungsgeschichte der Provinz Ägypten entnommen ist: „Einer hatte 7, ein anderer 8, noch ein anderer 9 Aruren mit Aussaat bestellt, und der Bewässerungsbeamte nahm im ganzen den Ertrag von $3\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ Aruren als Steuer in Anspruch. Wieviel wurde abgezogen dem, der 7, und dem, der 8, und dem, der 9 Aruren bestellt hatte?" Zunächst handelte es sich hier freilich um die nicht ganz einfache Entzifferung und Deutung des Originaltextes und der darin vorkommenden oft schwer verständlichen Zeichen, eine Arbeit, die Zeile für Zeile vorgenommen werden mußte, bevor HULTSCH zur eigentlichen Besprechung der Aufgabe und der zur Lösung gehörenden ägyptischen Rechnungsweisen übergehen konnte.

Im Jahre 1895 veröffentlichte sodann HULTSCH die große Abhandlung *Die Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung*, der er 1901 *Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung* folgen ließ. Diese Rechnung beruht auf der Eigentümlichkeit der alten Ägypter, daß sie (mit Ausnahme des Bruches $\frac{2}{3}$) nur Stammbrüche verwendet haben. Daraus entsprang dann vor allem die Aufgabe, einen beliebigen Bruch als Summe von Stamm-

1) Sie ist in der Festschrift für FÖRSTEMANN enthalten, die von der Historischen Gesellschaft zu Dresden herausgegeben worden ist. Den Schluß dieser Festschrift bildet ein Jahrbuch, das die Zeit 1870—1894 umfaßt, und das von etwa einem Dutzend Vorträgen berichtet, die HULTSCH (Mitglied seit 1873) in diesem Zeitraume namentlich über metrologische Themata in der Gesellschaft gehalten hat.

brüchen darzustellen (in der obigen Aufgabe des Papyrus von Akhmim z. B. ist $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} = 3\frac{1}{2}\frac{1}{4}$), wodurch die ursprünglichen Bruchrechnungen sich in „Teilungsrechnungen" verwandelten. Diese Rechnungen und die dabei zur Anwendung kommenden Bezeichnungen und Methoden verfolgt nun Hultsch in der ersten der beiden genannten Abhandlungen in eingehendster Weise auf Grund des von Eisenlohr herausgegebenen mathematischen Handbuches der alten Ägypter (des Rechenbuches des Ahmes), während er in der zweiten Abhandlung diese Untersuchungen ergänzt unter Benutzung eines dem 'Egypt Exploration Fund' angehörenden demotischen Papyrus, der nach Zeit und Inhalt eine Mittelstufe zwischen dem mathematischen Handbuche des Ahmes und dem mathematischen Papyrus von Akhmim einnimmt.

Und noch eine weitere Quelle für Beispiele zur ägyptischen Teilungsrechnung konnte Hultsch namhaft machen und verwerten, und zudem eine, die zu ganz unerwarteten Aufschlüssen führte. In dem dritten der wiederholt genannten *Exkurse*, die sich in Krolls Ausgabe des Proklusschen Kommentares zu Platon finden, verweist nämlich Hultsch (S. 409) auf den Bericht, den Proklus 40, 24—42, 10 über die Rechnung eines gewissen Paterius gibt. Dieser hat an die dort besprochenen Figuren des Nestorius „eine schülerhafte Ausrechnung angeknüpft, die jedoch von großem historischem Interesse ist, weil sie eine um drei bis vier Jahrhunderte vor der Niederschrift des mathematischen Papyrus von Akhmim zurückliegende Sammlung von Beispielen zur ägyptischen Teilungsrechnung bietet." Hultsch bespricht und ergänzt nun die Rechnungen, die Paterius nach ägyptischer Rechnungsweise unter Benutzung von Stammbrüchen vorgenommen hatte und die, obwohl an sich unbedeutend, jetzt für uns den Charakter eines wichtigen historischen Dokumentes besitzen. —

Mit dem bisher Besprochenen ist noch immer nicht alles erschöpft, was Hultsch auf dem Gebiete der Geschichte der antiken Mathematik geleistet hat. Denn wir haben bis jetzt im wesentlichen nur von der reinen Mathematik gehandelt, Hultsch hat aber auch der Geschichte der angewandten Mathematik eine nicht unbedeutende Zahl ausgezeichneter Arbeiten gewidmet. Die Richtung, in der sich diese Arbeiten bewegen, ist natürlich durch die Namen Heron und Pappus bestimmt, und so haben wir es im wesentlichen mit der praktischen Geometrie, d. h. der Feldmeßkunst, einerseits und mit der Astronomie anderseits zu tun.

Die der praktischen Geometrie zugewandten Arbeiten von Hultsch berühren sich natürlich vielfach mit seinen bereits früher besprochenen metrologischen Untersuchungen. Eine scharfe Trennung ist da kaum

möglich. Das gilt in besonderem Maße von dem Artikel *Gromatici*, der 1872 in der Encyklopädie von Ersch und Gruber erschienen ist. Hultsch setzt darin zunächst auseinander, wie die Anfänge der Feldmeßkunst von den Römern selbst auf die Etrusker zurückgeführt wurden. Es handelte sich bei diesen, wie dann später auch bei den Römern, im wesentlichen um die Absteckung der Linien von Ost nach West und von Süd nach Nord. Das kunstlose Instrument, das hierzu diente, hieß groma (unteritalisch *γνώμα*, verwandt mit *γνώμων*), wovon die römischen Feldmesser den Namen gromatici erhielten. Die ersten Anfänge einer gromatischen Literatur fallen in die Zeit des Augustus: Frontinus, Hyginus, Balbus sind die ersten Namen, die uns darin begegnen. Von ihren Schriften sind leider nur Bruchstücke auf uns gekommen (s. Hultsch, *Metrol. script.* II). Obwohl die Römer einem tieferen Studium der Geometrie abhold waren, so drang doch bei den Einsichtigeren die Erkenntnis durch, daß wenigstens eine summarische Darstellung der Elemente der Geometrie auch für die Zwecke der Praxis dringend vonnöten sei. Das ergibt sich aus der Schrift des Columella über den Landbau. Die Vorlage aber, die dieser dabei benutzt, ist nicht römischen, sondern griechischen Ursprungs, sie geht auf Heron zurück. Die Beziehungen zwischen Columella und Heron werden nun von Hultsch ausführlich besprochen. Von Heron abhängig ist auch die *Expositio et ratio omnium formarum* von Balbus. Das zeigt sich bereits deutlich, wenn man die Übersicht über die gebräuchlichen Maße, mit der auch Balbus beginnt, mit der zweiten Heronischen Maßtafel (*Metrol. script.* I, 184) vergleicht. Die Abhängigkeit der römischen Agrimensoren von Heron bildet dann überhaupt den wesentlichsten Bestandteil der weiteren Ausführungen von Hultsch. Insbesondere zeigt er noch, daß die römischen Gromatiker die Schrift Herons über die Dioptra benutzt haben. Frontinus, Hyginus und auch Nipsus haben aus dieser Quelle geschöpft, wahrscheinlich aber nicht aus dem Originale, sondern aus einer wohl von Balbus herrührenden Bearbeitung.

Die Erwähnung der Dioptra gibt Veranlassung, den gleichnamigen Artikel von Hultsch bei Pauly-Wissowa kurz zu besprechen. Er leitet zugleich zur Astronomie über. Nach einigen allgemeinen, sachlichen und historischen Bemerkungen, die sich auf die Verwendung der Dioptra beziehen — schon zu Polybius Zeit wurde die Höhe der Mauer einer belagerten Stadt mit Hilfe einer Dioptra gemessen —, gibt Hultsch eine Beschreibung des Instrumentes, wie sie durch Heron überliefert ist. Während aber der Herausgeber von Heron III, H. Schöne, der Ansicht ist, die Dioptra habe, zum Visieren und zum Nivellieren, zwei auswechselbare Aufsätze gehabt, glaubte Hultsch, es sei „nach dem Stande der Überlieferung“ wahrscheinlicher, daß nur ein Aufsatz vorhanden war. Dem-

gegenüber verweist Schöne[1]), wie mir scheint mit Recht, einerseits auf die Stelle Heron III, 214, 21 *κατεσκευάσθω ἡ διόπτρα ἡ δυναμένη ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις διοπτεύειν*, aus der doch wohl hervorgeht, daß das Instrument zu dem angegebenen Zwecke vor dem Gebrauche erst besonders hergerichtet wurde, und anderseits auf den Umstand, daß in der Beschreibung des Instrumentes 196, 2 durch Blattausfall eine (auch von Hultsch anerkannte) Lücke anzusetzen sei, und daß man gar nicht einsehen könne, was denn schließlich auf den vier Blättern der Handschrift, die verloren sind, noch gestanden haben sollte, da sich doch die Beschreibung nach der Lücke im Heron-Texte fortsetzt.

In der Darstellung bei Hultsch folgen nun auf die Beschreibung der Dioptra die verschiedenen Verwendungen des Instrumentes, einerseits für die Zwecke der Feldmeßkunst und der Ingenieurwissenschaft (zu der oben erwähnten Stelle Heron III 214 gibt übrigens Hultsch doch immerhin zu, daß der Apparat durch ein zweites Richtscheit vervollständigt wurde) und anderseits für die Zwecke der Astronomie. Die Aufgabe, *τὰ μεταξὺ τῶν ἀστέρων διαστήματα* zu messen, war auch schon von Heron (190, 6) ausdrücklich hervorgehoben worden. Sein Verfahren, den Abstand zweier Sterne zu bestimmen (Kap. 32, p. 286), wird nun von Hultsch kurz beschrieben.

In den Auszügen aus Geminus bei Proklus wird angedeutet, daß durch die Dioptra auch *αἱ ἀποχαὶ ἡλίου καὶ σελήνης καὶ τῶν ἄλλων ἄστρων* gemessen werden könnten. Gemeint sind damit die Entfernungen dieser Himmelskörper von der Erde, und um diese zu finden, müssen die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond gemessen werden. Die Darstellung, die Hultsch in dem Artikel *Dioptra* von dieser Untersuchung gibt, stützt sich auf die inhaltreiche Abhandlung *Winkelmessungen durch die Hipparchische Dioptra*, die er 1899 in der Festschrift für Cantor veröffentlicht hat. Hultsch berichtet darin zunächst von den ältesten Versuchen, das Verhältnis des Sonnendurchmessers zu dem von der Sonne in einem Tageslauf durchmessenen Himmelskreis durch gleichmäßig ablaufendes Wasser zu ermitteln. Dieses Verfahren ist von Heron vervollkommnet und in seinem Werke *Über Wasseruhren* beschrieben worden. Von dem kurzen, durch Proklus in seiner *ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* uns überlieferten Fragmente dieser Schrift gibt Hultsch eine Übersetzung.[2])

1) Briefliche Mitteilung. Schöne beanstandet bei dieser Gelegenheit auch den Schlußabsatz im Artikel *Dioptra*, worin Hultsch sagt, die römischen Feldmesser hätten von der komplizierten Einrichtung der Heronischen Dioptra nur das in horizontaler Ebene drehbare Winkelkreuz beibehalten. In der Tat haben Groma und Dioptra gar nichts miteinander zu tun, was auch schon aus Heron III, 288, 20ff. hervorgeht.

2) Das Fragment ist, mit Übersetzung, auch von W. Schmidt im ersten Bande der Heron-Ausgabe mitgeteilt.

Das Verdienst, den Winkel, unter dem der Sonnendurchmesser gesehen wird, zuerst direkt mit dem Auge gemessen zu haben, gebührt dem Archimedes. Die Beobachtungen, die er mit Hilfe eines μακρὸς κανών, dem jedoch noch eine Vorrichtung zum Visieren mangelte, angestellt hat, sind im ψαμμίτης beschrieben. Vervollkommnet wurde dieses Instrument durch Hipparch, der ihm die später von Heron und Ptolemäus beibehaltene Länge von vier Ellen gab. Hipparch war es sodann auch, der die schwerfällige Rechnung nach den Seiten eingeschriebener Vielecke beseitigte und sie durch die Sehnentafeln ersetzte, die dann später von Ptolemäus übernommen und vervollkommnet wurden. Eine ausführliche Beschreibung der einst von Hipparch angewendeten und von Ptolemäus wiederhergestellten Dioptra hat Pappus im Kommentare Theons znm V. Buche des Ptolemäus gegeben. Diesen Bericht des Pappus teilt Hultsch in freier Übersetzung mit, um sodann die Resultate der Messungen Hipparchs, namentlich der Messungen des Monddurchmessers, eingehend zu besprechen. Hipparch war zu dem beachtenswerten Ergebnis gekommen, daß der mittlere Monddurchmesser 0° 33′ 14″ betrage. Hultsch verteidigt sodann noch die Messungen Hipparchs gegen die Ausstellungen, die Ptolemäus, der doch ganz auf Hipparch aufgebaut habe, dagegen erhoben hat. Den Schluß der Abhandlung bildet eine Mitteilung über die Hipparchische Dioptra aus der *Hypotyposis* des Proklus. Hultsch wird dadurch zu einer Betrachtung über die Einführung des Sinus in die Trigonometrie geführt, und er erachtet es für wahrscheinlich, daß diese aus griechischer Quelle stamme.

Von den weiteren Arbeiten, die Hultsch der Geschichte der Astronomie gewidmet hat, sind namentlich zwei hervorzuheben, die mit der eben besprochenen mancherlei Berührungspunkte darbieten. Es sind die Abhandlungen *Poseidonios über die Größe und Entfernung der Sonne* (1897) und *Hipparchos über die Größe und Entfernung der Sonne* (1900). Der zugemessene Raum verbietet mir leider ausführlicheres Eintreten. Über die erste Abhandlung hat Manitius in der Berliner phil. Wochenschr. (1897, 1281—1288) eingehend referiert, und so begnüge ich mich hier damit, hervorzuheben, daß der stoische Philosoph Poseidonius, der Zeitgenosse Ciceros „über die Größe der Sonne eine besondere Schrift abgefaßt und darin die weit über Hipparchs Ansätze hinausgehende Hypothese aufgestellt hat, daß der Durchmesser der Sonne auf 3 Millionen Stadien und ihre Entfernung von der Erde auf 500 Millionen Stadien zu beziffern sei". Was wir von dieser Hypothese wissen, verdanken wir den Berichten, die uns Kleomedes in seiner κυκλικὴ θεωρία und Plinius in seiner *Historia naturalis* hinterlassen haben. Diese Berichte werden von Hultsch mitgeteilt, auf ihre Quellen untersucht und aufs eingehendste erklärt, ergänzt und kritisiert.

Die Abhandlung *HIPPARCHOS über die Größe und Entfernung der Sonne* stützt sich auf den Kommentar, den PAPPUS zum fünften Buche der *Syntax* des PTOLEMÄUS geschrieben, und in den er Auszüge aus HIPPARCHS Werk *Über die Größen und Entfernungen der Sonne und des Mondes* aufgenommen hat. Diese Auszüge waren zugleich mit dem übrigen Texte des PAPPUS von THEON seinem großen Kommentare zur *Syntax* einverleibt worden. HULTSCH war aber in der Lage gewesen, auf Grund neuer Handschriften und mit Benutzung der THEON-Ausgabe von CAMERARIUS den echten PAPPUS-Text wiederherzustellen, und er veröffentlicht nun in der genannten Abhandlung den Kommentar des PAPPUS zum 11. Kapitel des fünften Buches der *Syntax*, und zwar sowohl in der ursprünglichen Form als auch in der nur wenig abweichenden Überarbeitung durch THEON. Durch diese Autoren allein ist uns ein kurzer Bericht über HIPPARCHS Messung der Entfernung der Sonne erhalten. Den Bericht des PAPPUS teilt nun HULTSCH auch noch in deutscher Übersetzung mit, um dann zu einer Würdigung der großen Leistungen des HIPPARCH selbst überzugehen. Er hebt als entscheidende Tatsache hervor, „daß HIPPARCH an die wirkliche Entfernung der Sonne weit näher als sein Vorgänger ARISTARCH herangekommen ist und damit dem POSEIDONIOS den Weg zu seiner der Wirklichkeit noch mehr sich nähernden Hypothese geebnet hat, während PTOLEMAIOS diese großartigen Fortschritte unbeachtet ließ und bei seiner Abschätzung des Sonnenabstandes noch nicht einmal die Hälfte der HIPPARCHischen Zahl erreichte“. Der Schluß der Abhandlung beschäftigt sich sodann noch mit dem Zeitpunkt der von HIPPARCH erwähnten Sonnenfinsternis. HULTSCH entscheidet sich auf Grund der Angaben HIPPARCHS für das Jahr 129 und gewinnt dadurch zugleich Bestimmungen für die Zeit der Veröffentlichung der verschiedenen Schriften des großen Astronomen.

Ich muß es mir versagen, auf die Untersuchungen näher einzutreten, die HULTSCH in dem ersten der drei *Exkurse* zu PROKLUS (ed. KROLL) an die Bestimmung des großen Jahres des Astronomen SOSIGENES angeknüpft hat, Untersuchnngen, die mit den bis ins Unendliche aufsteigenden Zahlenreihen des ARCHIMEDES und des APOLLONIUS zusammenhängen — mehr als $^1/_3$ Trillion Jahre müssen nach SOSIGENES verfließen, bis die gleichzeitige Rückkehr der Sonne, des Mondes und der fünf Planeten zu den Anfangspunkten ihrer Bewegungen stattfinden —, ich kann auch nur kurz hinweisen auf die populär-wissenschaftlichen Aufsätze *Die Messungen der Größe und Entfernung der Sonne im Altertum* (1901) und *Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen* (1901), die sich natürlich besonders mit HIPPARCH beschäftigen: denn noch wäre ja der umfangreiche Artikel *Astronomie* (33 Spalten) bei PAULY-WISSOWA zu besprechen, der an Be-

deutung kaum hinter dem Artikel *Arithmetica* zurücksteht, — und die Zeit drängt. Es sei aber wenigstens gesagt, daß dieser Artikel eine vollständige, bis zur neuesten Literatur reichende Übersicht gibt über alles, was von der griechischen und römischen Astronomie von Thales bis Ptolemäus bekannt ist. Was Hultsch in diesem Artikel bietet, ist so konzentriert, daß kaum irgend etwas Nennenswertes übergangen wird, während doch die hervorragenderen Erscheinungen, die Leistungen eines Thales, eines Pythagoras und seiner Schule, eines Parmenides, eines Önopides, eines Platon, eines Herakleides — dem System dieses Astronomen hat Hultsch 1896 eine besondere Abhandlung gewidmet —, vor allem aber die des Eudoxus, des Aristarch, des Hipparch, des Poseidonius und des Ptolemäus eine sehr eingehende Würdigung erfahren. An die Übersicht über die Entwickelung der griechischen Astronomie schließt Hultsch noch einen Bericht über die verschiedenen Darstellungen der Himmelserscheinungen an, mögen diese nun durch Wort und Schrift, oder durch Abbilder des gestirnten Himmels gegeben worden sein. Hier begegnen uns die Namen Autolykus und Euklid, ferner Thales, Anaximander, Eudoxus, Archimedes, als Verfertiger von Himmelsgloben oder verwandter Mechanismen, und sodann wieder Ptolemäus. Der Schluß des trefflichen Artikels ist den Römern gewidmet. Diese haben zwar aus eigener Erfindung nichts zu den astronomischen Kenntnissen des Altertums beigetragen, aber da sie seit der Zeit, wo sie mit griechischer Wissenschaft sich befreundeten, ein reges Interesse für die Himmelskunde gezeigt haben, so ist in den Schriften des Cicero, Vitruvius, Plinius, Censorinus, und später noch in denen des Macrobius, Martianus Capella u. a., vieles erhalten, was für die Geschichte der Astronomie von Wichtigkeit ist.

Wie die anderen großen Sammelartikel von Hultsch bei Pauly-Wissowa, so ist auch der über die Astronomie durch die Artikel über die einzelnen Astronomen zu ergänzen. Unter diesen hebe ich (neben dem früher besprochenen Eudoxos) noch besonders die Artikel Aristarchos von Samos und Autolykos hervor.

Der Name Autolykus führt uns wieder zu Pappus zurück und damit zugleich zu den Arbeiten von Hultsch, die nun zum Schlusse noch kurz besprochen werden müssen. Das sechste Buch der *Collectio* des Pappus war, wie wir uns erinnern, dem μικρὸς ἀστρονομούμενος τόπος gewidmet. Unter den darin genannten und von Pappus kommentierten Schriften interessieren uns hier noch besonders die des Theodosius und des Autolykus. Mit der *Sphärik* des Theodosius hat sich Hultsch sehr viel beschäftigt. Schon in der Abhandlung *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά* (1883) war er zu der Überzeugung gekommen, „daß die uns erhaltene, wahrscheinlich dem 1. Jahrhundert v. Chr. angehörige *Sphärik* des Theodosios von Tripolis

auf einem älteren, wenig abweichenden Werke beruht, das bereits dem Autolykos vorgelegen hat". Diese Untersnchung hat Hultsch dann weiter verfolgt in den Arbeiten *Zu der Sphärik des Theodosios* (1884) und *Über die Sphärik des Theodosios und einige unedierte mathematische Texte* (1885). Der bereits früher ausgesprochene Satz wird nun nach genanerer Begründung als gesichertes Ergebnis hingestellt. Danach ist also Theodosius nur der Herausgeber, höchstens der Überarbeiter und Erweiterer eines um vieles älteren Lehrbnches der Sphärik gewesen, das schon um die Mitte des 4. Jahrhnnderts v. Chr. im wesentlichen den Inhalt der drei unter Theodosius Namen überlieferten Bücher der Sphärik besessen hat. Mit Heiberg und Tannery hält Hultsch es für sehr wahrscheinlich, daß Eudoxus der nrsprüngliche Verfasser gewesen sei.

Am Schlnsse der Abhandlung konnte Hultsch auf eine Scholiensammlung hinweisen, die er in Paris im Manuscrit grec 2342 aufznfinden das Glück gehabt hatte, so reichhaltig, wie sie ihm noch zn keinem anderen alten Mathematiker vor Angen gekommen war. Zu Autolykus lagen 200 Scholien vor, die einen fast fortlaufenden Kommentar zum Text bilden, und noch reichhaltiger waren die Scholien zu Theodosius. Diese letzteren hat Hultsch in der Abhandlung *Eine Sammlung von Scholien zur Sphärik des Theodosios* (1886) genauer beschrieben und sie dann — es sind ihrer 359 — als *Scholien zur Sphärik des Theodosios* (1887) in den Abhandlnngen der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften mit dem ganzen dazu gehörigen kritischen Apparate herausgegeben. Der Ausgabe liegt aber nicht nur die Pariser Handschrift 2342, die nur bis zum 14. Jahrhundert zurückreicht, zngrunde, sondern Hultsch war anch in der Lage, außerdem noch den von August Mau kollationierten Vaticanns graecus 204, der im wesentlichen dieselbe Sammlung enthält, aber um vier Jahrhunderte älter ist, verwerten zu können Von besonderem Interesse ist dabei das Scholion 337, das, auch dem Wortlaute nach, sich jenem von Pappus zitierten λῆμμα anschließt, dessen Beweis Hultsch in der Abhandlnng *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά* nach der Münchener Handschrift CCCI hatte wiedergeben können, und das für ihn überhaupt den ersten Anstoß zu allen diesen Nachforschungen gebildet hatte.

Schon in der Vorrede znm zweiten Bande von Pappus war Hultsch in der Lage gewesen, über neue Handschriften zu Theodosius nnd Autolykus zu berichten, die er 1876 in der Vatikanischen Bibliothek aufgefunden hatte. Es war der Vaticanus graecns 191, der ihm eine unerwartet reiche Ausbeute dargeboten hatte. Außer der von Pappus zitierten Schrift des Autolykus περὶ κινουμένης σφαίρας und dem Buche des Theodosius περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν enthält nämlich dieser Sammel-

kodex von Autolykus noch zwei Bücher περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων, ferner von Theodosius, außer dem einen von Pappus zitierten Bnche περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν, ein zweites unter demselben Titel, endlich von demselben eine kleine Schrift περὶ οἰκήσεων, d. i. eine Darstellnng, wie für jeden Bewohner der Erde, vom Äquator bis zum Pole, der gestirnte Himmel im Laufe eines Jahres sich darstellt.

Von diesen Schriften sind nun die des Autolykus von Hultsch noch vollständig herausgegeben worden. Die Herausgabe der Schriften des Theodosius war geplant, hat aber nicht mehr ausgeführt werden können.[1]) Die Ausgabe des Autolykus[2]) erschien 1885 in der Bibliotheca Teubneriana unter dem Titel *Autolyci De sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri duo, una cum scholiis antiquis e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* In der Vorrede (p. V—XXIII) beschäftigt sich Hultsch zunächst mit der Frage, wann Autolykus gelebt hat. Dieser Untersuchung und namentlich der Aufgabe, „diejenigen Sätze der älteren Sphärik [im Gegensatze zu der jüngeren Sphärik des Theodosius] im einzelnen nachznweisen, welche Autolykos, sei es unmittelbar, sei es mittelbar, benutzt hat", hat Hultsch eine besondere Abhandlung *Autolykos und Euklid* (1886) gewidmet, in der er im Anschlnß an Nokk und Heiberg zu dem Resultate kam, daß die von Autolykus benutzte Sphärik älter gewesen ist als alle Werke Euklids. Autolykus war zwar noch ein Zeitgenosse von Euklid, seine ganze schriftstellerische Tätigkeit ist aber der des Euklid vorausgegangen, denn dieser fußt in seinen *Phaenomena* auf den Schriften des Autolykus über die rotierende Kugel nnd über Auf- und Untergänge der Fixsterne (Diels, Rhein. Mus. **31**, 1876, 46 f.).

In der Vorrede zur Autolykus-Ausgabe berichtet Hultsch sodann weiter über frühere Bearbeitungen und Veröffentlichungen von Schriften des Autolykus, wie sie G. Valla 1501, Maurolycus 1558, Konrad Rauchfuss (Dasypodius) 1572, Joseph Auria 1587 und in neuerer Zeit R. Hoche 1877 unternommen hatten. Daran schließt sich eine Besprechung der Handschriften, die der nenen Ausgabe zugrunde liegen, und dann folgt (p. XXIV—LXIV) eine Zusammenstellung der verschiedenen, darin vorkommenden Lesarten. Dem griechischen Texte (S. 1—159) ist eine lateinische Übersetzung gegenübergestellt; darunter stehen die Scholien und die Anmerknngen des Herausgebers. Nach einem kurzen Appendix zum Buche *De sphaera quae movetur* folgen sodann die Scholien von Auria (S. 164—185),

1) Kollationen von Handschriften des Theodosius hat Hultsch hinterlassen — so schreibt mir Herr Prof. Poland.

2) Siehe die Besprechung von H. Menge in Fleckeisens Jahrbüchern 1886, 179—184, und von Cantor in Zeitschr. f. Math. u. Phys. **31**, 1886; hist.-lit. Abt. 152—154.

und dann kommt der bei Hultsch niemals fehlende und stets mit liebevoller Sorgfalt bearbeitete Index (S. 186—231). „Es ist wohl der Mühe wert," sagt er in der ausführlich besprochenen Leipziger Abhandlung von 1885, „den Nachlaß unseres ältesten Mathematikers auch in dieser Hinsicht sorgsam auszustatten und ein möglichst vollständiges Bild seines Wortvorrates und seines Sprachgebrauches zu geben." —

Ich bin zu Ende — oder vielmehr: ich muß schließen. Denn wieviele Arbeiten von Hultsch, philologische, metrologische, mathematisch-historische, die unsere Kenntnis von der Vergangenheit und unsere Einsicht in die Entwickelung der Wissenschaft mächtig gefördert haben, müßten noch ausführlicher behandelt werden, wollten wir alles, was die wahrhaft bewundernswerte Arbeitsenergie dieses Mannes geschaffen hat, in vollem Umfange würdigen! Unwillkürlich stellen sich mir die Worte ein: „Er hat sein Pfund nicht vergraben, sondern damit gewuchert. Er hat gearbeitet wie wenige, und Arbeit verdient immer Hochachtung. Gewirkt aber hat er wie noch wenigere, und da er auch für uns gewirkt hat, verdient er vor vielen unseren Dank."

Verzeichnis der Publikationen von Friedrich Hultsch in chronologischer Folge.

Die eigenen Arbeiten von Hultsch sind, wie ich hoffe, vollständig verzeichnet. Dagegen wäre es schon des Raumes wegen nicht möglich gewesen, auch alle die zahlreichen Besprechungen aufzunehmen. Die hier genannten dürften aber wohl die wichtigeren sein und überdies die, die Hultsch selbst wiederholt zitiert. Für Vervollständigung und Korrektur des Verzeichnisses bin ich Herrn Prof. Poland zu großem Danke verpflichtet.

1857.

1. *Emendationen zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. (= Jahrbücher für klassische Philologie, herausgeg. v. A. Fleckeisen) 1857, 832—834.

1858.

2. *Emendationen zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1858, 813—819.

1859.

3. *Quaestiones Polybianae.* Jahresbericht des Gymnasiums zu Zwickau 1858/59, 1—25.

1862.

4. *Griechische und römische Metrologie.* Berlin 1862. [XII u. 328 S.]

5. *De Damareteo argenteo Syracusanorum nummo.* Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden 1861/62, 1—36.

6. [Besprechung von *Th. Mommsen, Geschichte des römischen Münzwesens.* Berlin 1860.] Jahrb. f. Phil. 1862, 556—568.

7. *Über das babylonische und euboische Talent des Herodotos.* Jahrb. f. Phil. 1862, 387—394.

1863.

8. *Zur Lösung der Frage über den Philetärischen Fuß.* Jahrb. f. Phil. 1863, 162—170.

9. *Die staatsmännische Wirksamkeit des Demosthenes.* Jahrb. f. Phil. 1863 II, 149—163.

10. [Besprechung von *G. Friedlein, Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern.* Erlangen 1861.] Jahrb. f. Phil. 1863, 422—425.

1864.

11. *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae. Accedunt Didymi Alexandrini mensurae marmorum et Anonymi variae collectiones ex Herone, Euclide, Gemino, Proclo, Anatolio, aliisque. E libris manu scriptis edidit Fridericus Hultsch.* Berlin 1864 [XXIV u. 334 S.]

12. *Der Heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreieckes als Funktion der drei Seiten.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 9, 1864, 225—249.

13. *Metrologicorum scriptorum reliquiae. Collegit recensuit partim nunc primum edidit Fridericus Hultsch. Vol. I quo scriptores graeci continentur.* Leipzig 1864. [XXIV u. 356 S.]

14. [Besprechung von *G. Curtius, Griechische Schulgrammatik.* 6. Aufl. Prag 1864.] Jahrb. f. Phil. 1864, 433—448.

15. *Zu Proklos.* Rheinisches Museum f. Philologie 19, 1864, 450—455.

16. [*Programme aus dem Königreich Sachsen 1863.*] Jahrb. f. Phil. 1864 II, 572—580.

1865.

17. *Zur Sentenzenliteratur.* Jahrb. f. Phil. 1865, 431—432

1866.

18. *Metrologicorum scriptorum reliquiae. Collegit recensuit partim nunc primum edidit Fridericus Hultsch. Vol. II quo scriptores romani et indices continentur.* Leipzig 1866. [XXXII u. 264 S.]

19. [Besprechung von *G. Curtius, Griechische Schulgrammatik.* 7. Aufl. Prag 1866.] Jahrb. f. Phil. 1866, 127—130.

1867.

20. *Censorini de die natali liber. Recensuit Fridericus Hultsch.* Leipzig 1867. [XIV u. 98 S.]

21. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. I: Lib. I—III. Berlin 1867. [318 S.]

22. [Besprechung von *Polybii historia ed. L. Dindorf.*] Jahrb. f. Phil. 1867, 289—317.

23. [Dasselbe.] Liter. Centralblatt 1867, 329—330

24 [Besprechung von *J. Brandis, Das Münz-, Maß- und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf Alexander den Großen.* Berlin 1866.] Jahrb. f. Phil. 1867, 513—538.

25. [Dasselbe.] Liter. Centralblatt 1867, 497—499.

26. *Zu Suidas.* Jahrb. f. Phil. 1867, 335—336.

27. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1867, 564—566, 624, 676.

28. [Erwiderung auf den Vortrag von Th. Bergk über den Dreifuß des Gelon und die Münzen der Damarete, gehalten an der Philologen-Versammlung zu Halle 1867.] Verhandl. d. 25. Versamml. deutscher Philol. u. Schulmänner in Halle 1867, 37—41.

1868.

29. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1868, 392.

30. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. II: Lib. IV, V. Reliquiae lib. VI—VIII. Berlin 1868. [IV S. u. S. 319—664.]

31. [Besprechung von *G Friedlein, Die Geometrie des Pediasimus.* Ansbach 1866.] Jahrb. f. Phil. 1868, 55—58.

32. [Besprechung von *Nicomachi introductio arithmetica ed. R. Hoche.* Leipzig 1866.] Jahrb. f. Phil. 1868, 762—770.

1869.

33. *Quaestiones Polybianae, pars II.* Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden 1868/69, 1—21.

34. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1869, 456.

1870.

35. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. III: Reliquiae lib. IX—XIX. Berlin 1870. [IV S. u. S. 665—1024.]

36. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1870, 728, 735—736.

37. *Zu Galenos.* Jahrb. f. Phil. 1870, 744.

1871.

38. *Zu Galenos.* Jahrb. f. Phil. 1871, 35—36.

39. *Zu Hesychios.* Jahrb. f. Phil. 1871, 36.

1872.

40. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. IV: Reliquiae lib. XX—XXXIV. Indices. Berlin 1872. [S. 1025—1402 u. 86 S.]

41. *Über das System der ägyptischen Hohlmaße.* Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde 10, 1872, 122—124.

42. Artikel *Gromatici* in der Allgem. Encyklopädie von Ersch und Gruber 92, 1872, 97—105.

1873.

43. *Zur griechischen Lexikographie.* Jahrb. f. Phil. 1873, 223—224.

44. *Zu Platons Timaeos.* Jahrb. f. Phil. 1873, 493—501.

1874.

45. [Besprechung von *G. Curtius, Griechische Schulgrammatik.* 10. Aufl. Prag 1873.] Jahrb. f. Phil. 1874, 7—18.

1875.

46. [Besprechung von *F. de Saulcy, Numismatique de la Terre Sainte.*] Jahrb. f. Phil. 1875, 841—844.

47. *Zu Sophokles Antigone.* Jahrb. f. Phil. 1875, 476.

48. *Bericht über das fünfundzwanzigjährige Jubiläum des Prof. Dr. Georg Curtius in Leipzig.* Jahrb. f. Phil. 1875 II, 257—269.

1876.

49. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Vol. I. Insunt lib. II, III, IV, V reliquiae.* Berlin 1876 [XXIV S. u. S. 1—472.]

50. [Besprechung von *M. Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst* Leipzig 1875.] Jahrb. f Phil. 1876, 759—768

51. *Die Bruchzeichen bei Vitruvius.* Jahrb. f. Phil. 1876, 251—261.

1877.

52. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Vol. II. Insunt lib. VI et VII reliquiae.* Berlin 1877. [VIII S. u. S. 473—1020.]

53. *De Heronis mechanicorum reliquiis in Pappi collectione servatis.* Commentationes philologae in honorem Theodori Mommseni. Berlin 1877. S. 114—123.

54. *Über den Himmelsglobus des Archimedes.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **22**, 1877; hist.-lit. Abt. 106—107.

55. *Zu Kleomedes.* Jahrb. f. Phil. 1877, 840.

1878.

56. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Vol. III tom. I. Insunt libri VIII reliquiae. Supplementa in Pappi collectionem.* Berlin 1878. [XXII S. u. S. 1021—1288.] *Vol. III tom. II. Insunt Index graecitatis. Scripturae compendiorum conspectus. Index rerum ad mathematicam disciplinam spectantium. Conspectus auctorum.* Berlin 1878. [IV S. u. S. 1—144.]

1879.

57. *Zur Terminologie der griechischen Mathematiker.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **24**, 1879; hist.-lit. Abt. 41—42.

58. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* Vol. I—III, Berlin 1876—1878. [Selbstanzeige des Verfassers.] Repertorium von L. Königsberger und G. Zeuner **2**, 1879, 320—335.

59 *Pappi Alexandrini* . . . 1878. [Dasselbe. Selbstanzeige des Verfassers.] Traduzione dal tedesco del Dr. A. Sparagna. Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni **12**, 1879, 333—344.

60. [Besprechung von *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum primum edidit et notis illustravit C. Henry.* Halle 1879.] Zeitschr. f. Math. u. Phys. **24**, 1879; hist.-lit. Abt. 199—203.

61. [Besprechung von *J. L. Heiberg, Quaestiones Archimedeae.* Hauniae 1879.] Liter. Centralblatt 1879, 1122—1124.

1880.

62. *Das Grundmaß der griechischen Tempelbauten.* Archäol. Zeitung **38**, 1880, 91—98.

63. *Der Denar Diokletians.* Jahrb. f. Phil. 1880, 27—31.

64. *Zu Varro de re rustica.* Jahrb. f Phil 1880, 263—264.

65. *Zu dem Fragmentum Censorino adscriptum.* Jahrb. f. Phil. 1880, 288.

1881.

66. *Bestimmung des attischen Fußes nach dem Parthenon und Theseion.* Archäol. Zeitung **38**, 1881, 172—176.

67. *Heraion und Artemision, zwei Tempelbauten Ioniens.* Ein Vortrag. Berlin 1881. [52 S.]

68. *Die Maße des Heraion zu Samos und einiger anderen Tempel.* Archäol. Zeitung **39**, 1881, 97—128.

69. [Besprechung von *M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I.* Leipzig 1880.] Jahrb. f. Phil. 1881, 569—592.

1882.

70. *Griechische und römische Metrologie.* Zweite Bearbeitung. Berlin 1882. [XIV u. 746 S.]

71. *Die geometrische Zahl in PLATONS VIII. Buche vom Staate.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **27**, 1882; hist.-lit. Abt. 41—60.

1883.

72. *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά. Reste einer verloren geglaubten Schrift.* Jahrb. f. Phil. 1883, 415—420.

73. *Zu HORATIUS.* Jahrb. f. Phil. 1883, 612—614.

1884.

74. *Zur Erinnerung an Dr. CHRISTIAN ERNST AUGUST GRÖBEL, Rektor der Kreuzschule.* Gedächtnisrede in der Aula der Kreuzschule gehalten am 28. Januar 1884. Dresden 1884. [31 S.]

75. *Ein antiker Maßstab.* Archäol. Zeitung **42**, 1884, 191—198.

76. *Zu der Sphärik des THEODOSIOS.* Jahrb. f. Phil. 1884, 366—368.

77. *Adverbialer Gebrauch von ἀνά.* Jahrb. f. Phil. 1884, 741—742.

78. *Der absolute Genitiv des Infinitivs.* Jahrb. f. Phil. 1884, 742—744.

79. [Besprechung von *ARCHIMEDIS περὶ ὀχουμένων liber I graece restituit J. L. HEIBERG.* Paris 1884.] Liter. Centralblatt 1884, 856—857.

80. Besprechung von *TH. H. MARTIN,* 1) *Mémoire sur l'histoire des hypothèses astronomiques chez les Grecs et les Romains;* 2) *Mémoire sur les hypothèses astronomiques d'EUDOXE, de CALLIPE et d'ARISTOTE et de leur école.* Paris 1881.] Jahresbericht über die Fortschr. d. klass. Altertumswissensch., begründet von C. BURSIAN, **40**, 1884, 50a—50h.

1885.

81. *AUTOLYCI de sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri duo, una cum scholiis antiquis e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit FRIDERICUS HULTSCH.* Leipzig 1885. [LXIV u. 232 S.]

82. *Über die Sphärik des THEODOSIOS und einige unedierte mathematische Texte.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **37**, 1885, 167—174.

83. [Besprechung von *J. GOW, A short history of greek mathematics.* Cambridge 1884.] Berliner phil. Wochenschr. 1885, 568—570.

84. [Besprechung von *EUCLIDIS elementa. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG.* Vol. IV. Leipzig 1885.] Berliner phil. Wochenschr. 1885, 1452—1455.

1886.

85. *Über eine Sammlung von Scholien zur Sphärik des THEODOSIOS.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **38**, 1886, 119—128.

86. *AUTOLYKOS und EUKLID.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **38**, 1886, 128—155.

87. *De numero PLATONIS a PROCLO enarrato disputatio.* In: *PROCLI commentariorum in rempublicam PLATONIS partes ineditae ed. R. SCHOELL,* Berlin 1886, S. 140—148.

1887.

88. *Scholien zur Sphärik des THEODOSIOS.* Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **10**, 1887, 381—446.

89. *Zu Laertios Diogenes.* Jahrb. f. Phil. 1887, 223—225.

90. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1887, 763—766.

91. [Besprechung von *G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid.* Hermathena VI, Dublin 1886.] Berliner phil. Wochenschr. 1887, 246—247.

1888.

92. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. I: Lib. I—III. 2. Aufl. Berlin 1888. [LXXIII u. 339 S.]

93. [Besprechung von *W. Ridgeway, Metrological notes.* London 1888.] Liter. Centralblatt 1888, 1554—1555.

1889.

94. *Ein Beitrag zur Kenntnis des volkstümlichen Rechnens bei den Römern.* Jahrb. f. Phil. 1889, 335—343.

95. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1889, 741—744.

96 [Besprechung von *G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid.* Dublin 1889.] Bibliotb. Mathem. 3_2, 1889, 85—92.

97. [Besprechung von *Censorini de die natali liber rec. J. Cholodniak.* Petersburg 1889.] Berliner phil. Wochenschr. 1890, 1651—1656.

1890.

98. *Coniectanea in Polybium.* Commentationes Fleckeisenianae, Leipzig 1890, S. 81—92.

1891.

99. *Das Pheidonische Maßsystem nach Aristoteles.* Jahrb. f. Phil. 1891, 262—264.

100. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1891, 419—420.

101. [Besprechung von *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg.* Vol. I. Leipzig 1891.] Berliner phil. Wochenschr. 1891, 774—778.

102. [Besprechung von *G. Wertheim, Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria.* Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet. Leipzig 1890.] Berliner phil. Wochenschr. 1891, 587—590.

1892.

103. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. II: Lib. IV, V. Reliquiae lib. VI—VIII. 2 Aufl. Berlin 1892. [XVI u. 368 S.]

104. [Besprechung von *J. Adam, The nuptial number of Plato: its solution and significance.* London 1891.] Berliner phil. Wochenschr. 1892, 1256—1258.

105. *Metrologischer Exkurs zu einer thebanischen Inschrift.* Jahrb. f. Phil. 1892, 23—28.

1893.

106. *Die erzählenden Zeitformen bei Polybios. Ein Beitrag zur Syntax der gemeingriechischen Sprache.* I. 1891; II 1892. Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 13, 1893, 1—210, 347—468.

107. *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes.* Nachrichten v. d. Gesellsch. d. Wissensch. u. d. Georg-Augusts-Universität zu Göttingen 1893, 367—428.

108. *Zur Syntaxis des Ptolemaios.* Jahrb. f. Phil 1893, 748—752.

1894.

109. [Besprechung von *Philonis mechanicae syntaxis libri IV et V. Rec. R. Schoene.* Berlin 1893.] Liter. Centralblatt 1894, 214—216.

110. [Besprechung von *Th. Mommsen, Der Maximaltarif des Diokletian. Erläutert von H. Blümner.* Berlin 1893.] Liter. Centralblatt 1894, 220—222.

111. *Zu dem Komiker Krates.* Jahrb. f. Phil. 1894, 165—178.

112. *Zur Kreismessung des Archimedes.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 39, 1894; hist.-lit. Abt. 121—137, 161—172.

113. *Die erzählenden Zeitformen bei Polybios. Ein Beitrag zur Syntax der gemeingriechischen Sprache.* III. 1893. Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 14, 1894, 1—100.

114. [Besprechung von *M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* 1. 2. Aufl. Leipzig 1894.] Liter. Centralblatt 1894, 553—555.

115. *Das elfte Problem des mathematischen Papyrus von Akhmim.* Historische Untersuchungen. Ernst Förstemann zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet von der Historischen Gesellschaft zu Dresden, Leipzig 1894, S. 39—56.

116. [Besprechung von *J. Baillet, Le papyrus mathématique d'Akhmim.* Paris 1892.] Berliner phil. Wochenschr. 1894, 1327—1331.

117. [Besprechung von *Diophanti Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. Tannery.* Vol. I. Leipzig 1893.] Berliner phil. Wochenschr. 1894, 801—807.

1895.

118. *Drei Hohlmaße der römischen Provinz Ägypten.* Jahrb. f. Phil. 1895, 81—92.

119. *Die Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung.* Erste Abhandlung. Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 17, 1895, 1—192.

120. *Erläuterungen zu dem Berichte des Jamblichus über die vollkommenen Zahlen.* Nachrichten d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen; Phil.-hist. Cl. 1895, Heft 3. [10 S. Nachtrag s. 1897.]

121. [Besprechung von *Jamblichi in Nicomachi arithmeticam introductionem liber. Ed. H. Pistelli.* Leipzig 1894.] Berliner phil. Wochenschr. 1895, 774—776.

122. [Besprechung von *E. Pernice, Griechische Gewichte, gesammelt, beschrieben und erläutert.* Berlin 1894.] Liter. Centralblatt 1895, 261—264.

1896.

123. *Das astronomische System des Herakleides von Pontos.* Jahrb. f. Phil. 1896, 305—316.

124. [Besprechung von *Diophanti Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. Tannery.* Vol. II. Leipzig 1895.] Berliner phil. Wochenschr. 1896, 613—617.

125. [Besprechung von Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Siebentes Heft (Heiberg, Curtze, Rudio, Hurwitz, Engel). Leipzig 1895.] Berliner phil. Wochenschr. 1896, 718—721.

126. [Besprechung von *A. Sturm, Das delische Problem.* Linz 1895.] Berliner phil. Wochenschr. 1896, 758—760.

1897.

127. *Ein Flüssigkeitsmaß der Provinz Hispanien und die Fassungsräume einiger antiken Dolien.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **49**, 1897, 199—208.

128. *Zu Diophantos von Alexandreia.* Jahrb. f. Phil. 1897, 48.

129. *Eine Näherungsrechnung der alten Poliorketiker.* Jahrb. f. Phil. 1897, 49—54.

130. *Τετράμνων.* Jahrb. f. Phil. 1897, 174.

131. *Emendationen zu Domninos.* Jahrb. f. Phil. 1897, 507—511.

132. *Poseidonios über die Größe und Entfernung der Sonne.* Abhandl. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen; Phil.-hist. Cl. N. F. Bd. 1 Nr. 5. 1897. [48 S. Die beiden letzten Seiten sind dem Nachtrag über die neunte vollkommene Zahl gewidmet, s. *Erläuterungen etc.* 1895.]

133. [Besprechung von *Ch. Justice, Le „codex Schottanus" des extraits „de legationibus".* Gent 1896.] Berliner phil. Wochenschr. 1897, 37—40.

134. [Besprechung von *Euclidis opera omnia. Ed. J. L. Heiberg et H. Menge. Vol VI. Euclidis Data cum commentario Marini et scholiis antiquis ed. H. Menge.* Leipzig 1896.] Berliner phil. Wochenschr. 1897, 673—681.

135. [Besprechung von *A. Sturm, Das delische Problem.* Fortsetzung. Linz 1896.] Berliner phil. Wochenschr. 1897, 769—773.

136. [Besprechung von *F. Villicus, Die Geschichte der Rechenkunst vom Altertume bis zum XVIII. Jahrhundert.* 3. Aufl. Wien 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1897, 820—821.

1898.

137. *Die Gewichte des Altertums, nach ihrem Zusammenhange dargestellt.* Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **18**, 1898. [XIV u. 205 S.]

138. [Besprechung von *A. Sturm, Das delische Problem.* Schluß. Linz 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 43.

139. [Anmerkung zu dem Artikel von *E. Hübner, Additamenta nova ad corporis vol. II.* Ephemeris epigraphica vol. VIII] Ephemeris epigraphica vol. VIII, 1898, 481—484.

140. [Besprechung von *V. Mortet, La mesure des colonnes à la fin de l'époque romaine d'après un très-ancien formulaire.* Paris 1896.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 165—169.

141. [Besprechung von *Euklids Elementer I—II.* Oversat af Thyra Eibe. Med en Inledning af H. G. Zeuthen. Kopenhagen 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 833—836.

142. [Besprechung von *Damianos Schrift über Optik.* Mit Auszügen aus Geminos griechisch und deutsch herausg. v. R. Schöne. Berlin 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 1413—1417.

143. [Besprechung von *O. Birke, De particularum μή et οὐ usu Polybiano, Dionysiaco, Diodoreo, Straboniano.* Diss. inaug. Leipzig 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 1537—1541.

144. [Besprechung von *Le traité du quadrant de Maître Robert Anglès. Texte latin et ancienne traduction grecque publiés par P. Tannery.* Paris 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 1619—1620.

145. [Besprechung von *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia.* Vol. I. *Syntaxis mathematica* ed. J. L. Heiberg. Pars 1 libros I—VI continens. Leipzig 1898.] Liter. Centralblatt 1898, 1899—1900.

1899.

146. *Winkelmessungen durch die Hipparchische Dioptra.* Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 191—209.

147. [Besprechung von Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Achtes Heft (Curtze, Rosenberger, Simon, Fr. Schmidt, Wertheim, W. Schmidt). Leipzig 1898.] Berliner phil. Wochenschr. 1899, 45—48.

148. [Besprechung von *Euclidis opera omnia.* Ed. J. L. Heiberg et H. Menge. Supplementum: *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii* ed. M. Curtze. Leipzig 1899.] Berliner phil. Wochenschr. 1899, 1281—1286.

149. *Griechische und römische Gewichtsnormen.* Neue Jahrb. f. d. klass. Altertum, Geschichte u. deutsche Literatur **3**, 1899, 186—194.

1900.

150. *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen.* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 8—12.

151. *Hipparchos über die Größe und Entfernung der Sonne.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **52**, 1900, 169—200.

152. [Besprechung von *A. Bouché-Leclercq, L'astrologie grecque.* Paris 1899.] Berliner phil. Wochenschr. 1900, 628—632.

1901.

153. *Die Messungen der Größe und Entfernung der Sonne im Altertum.* Das Weltall **1**, 1900/1, 201—203, 218—221. Abdruck aus dem Dresdner Anzeiger, Montagsbeilage Nr. 26 vom 1. Juli 1901

154. *Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung.* Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 177—184.

155. *Drei Exkurse.* In: *Procli Diadochi in Platonis rem publicam commentarii* ed. Guilelmus Kroll. Vol. II, Leipzig 1901, S. 384—413. I.: *Über das große Jahr des Sosigenes,* 384—392; II.: *Die geometrische Darstellung einer pythagoreischen Zahlenreihe,* 393—400; III.: *Die geometrische Zahl Platons,* 400—413.

156. *Zu Agrippa aus Bithynien.* Berliner phil. Wochenschr. 1901, 1468.

1902.

157. *Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen.* Das Weltall **2**, 1901/2, 49—55.

158. *Das hebräische Talent bei Josephos.* Beiträge zur alten Geschichte herausg. v. C. F. Lehmann. II. Bd., S. 70—72

1903.

159. *Die Ptolemäischen Münz- und Rechnungswerte.* Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **22**, 1903. [60 S.]

160. *Die Maße und Gewichte des Berliner Papyrus 7094.* In: *C. Kalbfleisch, Papyri Graeci Musei Brit. et Mus. Berolinensis.* Lectionskatalog Rostock, Sommersemester 1902, S. 11—14.

161. *Beiträge zur ägyptischen Metrologie I. Beitr. z. ägypt. Metr. II. Die kleine ägyptische und die Solonisch-Ptolemäische Elle. Beitr. z. ägypt. Metr. III. Artabe und Choinix. Beitr. z. ägypt. Metr. IV. Der Medimnos von 48 Choiniken. Beitr. z. ägypt. Metr. V. Zwei Kotylen und ihre Teilmaße. Der römische Librarius Einteilung der Choinix.* Archiv für Papyrusforschung u verwandte Gebiete. **2**, 1903, 87—93, 273—283, 283—293, 521—523, 523—528.

162. *Die Frauen und die Mathematik.* Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 34, 1903, 82—85. Aus dem Dresdner Anzeiger.

1904.

163. *Eudoxos von Knidos.* Das Weltall 4, 1903/4, 208—214.

164. *Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu Euklids Elementen.* Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 225—233.

165. *Eine neu entdeckte karthagische Gewichtsform.* Berliner phil. Wochenschr. 1904, 1341—1342.

1905.

166. [Besprechung von *Polybii historiae. Editionem a Lud. Dindorfio curatam retractavit et instrumentum criticum addidit Theod. Büttner-Wobst.* Vol. IV, V. Leipzig 1904.] Berliner phil. Wochenschr. 1905, 1—5.

167. *Ein altkorinthisches Gewicht.* Journal international d'archéologie numismatique 1905, 5—6.

1906.

168. *Beiträge zur ägyptischen Metrologie VI. Verschiedene andere Hohlmaße. Beitr. z. ägypt. Metr. VII. Flüssigkeitsmaße. Beitr. z. ägypt. Metr. VIII. Das Oxyrhynchos-Fragment über Längen- und Flächenmaße. Rückblick.* Archiv f. Papyrusforschung u. verwandte Gebiete. 3, 1906, 425—442.

1908 (posthum).

169. *Die Gewichte und Werte der Ptolemäischen Münzen.* Zweite Bearbeitung der Schrift: *Die Ptolemäischen Münz- und Rechnungswerte.* In: *Die Münzen der Ptolemäer* von J. N. Svoronos, V. Bd. Athen 1908, Sp. 1—80.

---

170. *Schulnachrichten vom Rektor* in den Programmen des Gymnasiums zum heiligen Kreuz 1869—1889.

---

132 Beiträge zu Pauly-Wissowas Realencyklopädie.
Die Artikel ohne Längenangabe umfassen weniger als eine Spalte.

Band I (1894), 15 Artikel.

Abacus, Nr. 9, Rechenbrett (5 Sp.). *Acetabulum,* Nr. 1 3, drei Gefäße. *Achane Acnua. Actus,* Nr. 5, ital. Längen- und Flächenmaß *Addix. Akaina.* Ameristos. *Amma.* Ammon, Nr. 2, Geometer. *Amphora,* Nr. 2, Hohlmaß. Anatolius, Nr. 15, aus Alexandreia Anthemius, Nr. 4, aus Tralleis.

Band II (1896), 11 Artikel.

Apollonios, Nr. 112, von Perge (10 Sp.). Apollonios, Nr. 113, von Athen, Mechaniker. Archimedes, Nr. 3, von Syrakus (32 Sp.). Aristarchos, Nr. 25, von Samos (2 Sp.). Aristotheros. *Arithmetica* (50 Sp.). *Artabe* (1 Sp.). *Arura,* Nr. 2, Ackerfeld. *Astronomie* (33 Sp.). Athenaios, Nr. 23, Verf. von *περὶ μηχανημάτων.* Autolykos, Nr. 9, von Pitane (2 Sp.).

Band III (1899), 15 Artikel.

Βῆμα, Nr. 2, Längenmaß (1 Sp.). Billaros. Bion, Nr. 11, von Abdera (1 Sp.). *Cadus. Candetum. Carmen de ponderibus. Castrensis modius. Centumpondium.* Charias, Nr. 11, Ingenieur *Χήμη. Χοῖνιξ* (1 Sp.). *Chomer. Chorobates* (1 Sp.). *Χοῦς. Circinus.*

Band IV (1901), 32 Artikel.

Clima. *Cochlea*, Nr. 1, Schraube zum Wasserheben (1 Sp.). *Cochlear*, Nr. 2, Maß. *Concha.* *Concula.* *Congius.* *Constratus pes.* *Cubitus.* *Δακτυλοδόχμη.* *Δάκτυλος*, Nr. 3, Längenmaß. Damarete, Nr. 1, Gemahlin des Gelon von Syrakus (1 Sp.). Damarete, Nr. 2, Tochter Hierons II. *Damareteion* (1 Sp.). Damianos, Nr. 3, τοῦ Ἡλιοδώρου, Verf. einer Optik (1 Sp.). *Danake* (1 Sp.). Dardanios. Dardanos, Nr. 14, schrieb über griechische Gewichte. *Dareikos* (2 Sp.). *Decemmodia corbula.* *Decunx.* *Decussis* (1 Sp.). Deinostratos, Nr. 2, Bruder des Menaichmos (2 Sp.). *Dekadrachmon.* *Δεκάλιτρον Ἰταλικόν.* *Δεκάλιτρος στατήρ.* *Δεκανουμμίον* (1 Sp.). Demetrios, Nr. 115, Verf. einer Schrift gegen die ἀπορίαι des Polyainos. Demetrios, Nr. 116, aus Alexandreia. Demetrios, Nr. 117, Sohn des Rathenos. Demetrios, Nr. 118, Mathematiker in d. ersten Hälfte des 3. Jahrh. n. Chr. Demetrios, Nr. 119, Arzt. Demetrios, Nr. 120, Verf. v. περὶ τῶν κατ' Αἴγυπτον.

Band V (1905), 44 Artikel.

Demokleitos. *Denarios* (13 Sp.). *Deunx.* *Dextans.* *Diaulos*, Nr. 3, auch δίαυλον, Längenmaß. *Dichalkon.* *Διχάς.* *Διχοίνικον.* *Didrachmon* (3 Sp.). Didymos, Nr. 12. aus Alexandreia. *Digitus.* *Dikeration.* *Δικότυλον.* *Dilitron.* *Dimidia sextula*, *Δίμνουν.* *Diobolon.* Diodoros, Nr. 53, aus Alexandreia, Zeitgenosse von Cicero, (3 Sp.). Diodoros, Nr. 54, Metrolog des 4—5. Jahrh. Diodoros, Nr. 55, in d. zweiten Hälfte des 3. Jahrh. v. Chr. Diokles, Nr. 55, wahrscheinlich im 1. Jahrh. v. Chr. (1 Sp.). Dion, Nr. 23, von Neapolis. Dionysios, Nr. 143, Astronom in Alexandreia. Dionysios, Nr. 144, Astronom, Zeitgenosse Hipparchs. Dionysios, Nr. 145, Zeitgenosse des Eratosthenes. Dionysios, Nr. 146, in Herons *Defin.* als λαμπρότατε angeredet. Dionysios, Nr. 147, in Diophants *Arithmetik* als τιμιώτατέ μοι angeredet. Dionysodoros, Nr. 19, Mathematiker aus Amisene. Dionysodoros, Nr. 20, Geometer aus Melos. Dionysodoros, Nr. 21, aus Kaunos. Diophantos, Nr. 18, aus Alexandreia (21 Sp.). *Dioptra* (6 Sp.). Dioskurides, Nr. 13, gemeint ist Nr. 12, der Arzt. *Δίπτυον.* *Δοχμή.* *Dodekadrachmon.* *Dodrans.* *Δόλιχος*, Nr. 5, Längenmaß. Domninos, Nr. 4, aus Larisa (4 Sp.). *Δῶρον.* Dositheos, Nr. 9, aus Pelusion (1 Sp.). *Drachme* (21 Sp.). *Drusianus pes* (1 Sp.). *Dupondius* (2 Sp.).

Band VI_1 (1907), 3 Artikel (posthum).

Eudoxos, Nr. 8, von Knidos (20 Sp.). Eukleides, Nr. 7, „der Mathematiker" (49 Sp.). Eutokios.

Supplement I (1903), 7 Artikel.

Adrastos, Nr. 9, aus Kyzikos. Agesistratos, Nr. 4, Schüler des Mechanikers Apollonios, Nr. 113. Aischylos, Nr. 16, Schüler des Hippokrates von Chios. Aristotheros. *Artabe* (1 Sp.). *As* (3 Sp.). Athenaios, Nr. 23 (1 Sp. Umarbeitung des Artikels in Bd. II).

Für später erscheinende Bände hat Hultsch noch die folgenden 5, bereits im Satz befindlichen Artikel redigiert:

Exagium. *Geometria* (9 Sp.). *Gnomon* (2 Sp.). *Γράμμα.* *Γύη.*

Sul corso di storia delle matematiche fatto nella università di Napoli nel biennio 1905/06—1906/07.

Di F. Amodeo a Napoli.

Ebbi or sono quasi due anni l'onore di annunziare in questa rivista il programma di storia che io mi proponeva di svolgere nei due anni accademici 1905/06, 1906/07.[1]) Ora che i due anni sono trascorsi mi permetto di render conto qui del corso fatto.

Cominciai le mie lezioni con un discorso inaugurale[2]), col quale mi proposi di mostrare ai miei uditori, con un esempio tratto dalla storia delle sezioni coniche, che le ricerche storiche sono sempre alla portata di chiunque imprenda il lavoro con coscienza e scrupolo, e ciò feci allo scopo di incoraggiare i volenterosi a dedicarsi a questi importanti ed attraenti studi, e a far notare a tutti quelli che s'interessano alle matematiche come con lo studio delle opere classiche la mente è sempre indotta a nuove ricerche, anche quando queste opere riguardano teorie, che hanno l'apparenza di essere inadatte definitivamente ad un ulteriore sviluppo.

Misi come condizione fondamentale delle considerazioni storiche l'esistenza e l'esame dei documenti.

In tre lezioni percorsi rapidamente la storia delle matematiche presso i Cinesi, presso gli Egiziani e presso i Babilonesi e gli Assiri, e con una quarta lezione mostrai quale fosse la logistica dei Greci.

Due lezioni impiegai su Talete e la scuola Jonica; tre lezioni su Pitagora e la scuola pitagorica; due lezioni sulle altre scuole di Elea, di Atene, atomistica, sui sofisti, sulla scuola di Chio, e sui Pitagorei e Pitagoristi fino ad Archita.

Una lezione feci su Platone, sulle sue opere, sui suoi contemporanei e successori.

---

1) Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, p. 387—393.

2) *I trattati delle Sezioni coniche da Apollonio a Simson;* Atti del r. Istituto tecnico di Napoli 1906, p. 19—69.

Un'altra su Aristotile e sulle sue opere. Una lezione sulla scuola di Cizico e sulla invenzione delle Coniche.

E pervenni così in breve alla scuola di Alessandria.

Trattai a lungo di Euclide; impiegai su questo nome, e sull' esame delle sue opere cinque lezioni; tre delle quali furono necessarie per far conoscere il contenuto dei 13 libri degli Elementi, e due altre per esporre i Dati sull' edizione di Peyrard, la Divisione delle figure in base alle pubblicazioni di Woepcke e le altre opere pervenute a noi e per dare un cenno delle opere perdute e delle divinazioni fattene, e per mostrare l'influenza di esse sulla creazione della moderna Geometria.

Una lezione impiegai sui successori di Euclide fino ad Eratostene da Cirene, e sul problema di Delo e passai dopo ad Archimede.

Sei lezioni impiegai su Archimede. Nelle prime due lezioni esposi ordinatamente il primo libro dell' Equilibrio dei piani e dei loro centri di gravità e mostrai come egli dedusse la quadratura della parabola; poi esposi il secondo libro dell' Equilibrio dei piani, mostrando come ricavava il centro di gravità del segmento parabolico ad una e a due basi. Nella terza lezione esposi il trattato della sfera e del cilindro e quello della Misura del cerchio. Nella quarta esposi il trattato delle spirali, facendo notare le numerose proprietà che egli pervenne a trovare senz' altro sussidio che il potentissimo ingegno suo, e cominciai l'esposizione del trattato dei conoidi e sferoidi. Nella quinta continuai l'esame di questo trattato ed esposi l'Arenario. Nella sesta esposi il trattato dei Corpi galleggianti, i Lemmi e dissi delle altre opere non pervenuteci ed esposi il problema dei buoi del Sole.

Subito dopo entrai a parlare di Apollonio. Nella prima lezione su questo argomento parlai dell' uomo e delle vicende del suo Trattato sulle sezioni coniche, e dei commenti e delle successive edizioni fino a' tempi moderni. Nella seconda lezione esposi il 1°, 2° e 3° libro del trattato suddetto; nella terza esposi il 4° e 5° libro; nella quarta esposi il 6° e 7° libro e detti notizie delle divinazioni tentate del 5° e 6° e 7° da Maurolico e da Viviani, della scoperta fattane da Borelli e della divinazione dell' 8° libro tentata da Halley. In seguito riassunsi in breve le altre opere di Apollonio.

In poche lezioni mi sbrigai di Nicomede, Diocle, Perseo, Zenodoro Ipsicle da Alessandria, d'Ipparco, di Erone da Alessandria, di Filone da Gadara, di Gemino da Rodi, di Teodosio, di Dionisidoro da Emeso, e pervenni alla seconda scuola di Alessandria, trattando in ispecie di Menelao da Alessandria e della sua Sferica, di Nicomaco da Gerasa e della sua Aritmetica e di Teone da Smirne.

Una lezione intera impiegai su Claudio Tolomeo e sull' esposizione dell' Almagesto e delle altre sue opere. Ed in un' altra lezione mi occupai di Sesto Giulio Africano, di Sereno di Antinoupoli e dell' esame delle Sezioni del cilindro e del cono, rilevando dall' opera le ragioni che lo fanno ritenere anteriore o contemporaneo a Pappo.

Dopo passai a parlare di Pappo. Due lezioni intere impiegai ad esporre il contenuto della sua preziosa Collezione matematica. Nella prima esposi il frammento del 2° libro e i libri 3°, 4°, 5° e 6°; nella seconda esposi il contenuto del libro 7°, facendo rilevare la sua straordinaria importanza per le notizie del luogo risoluto, per i teoremi delle *n* rette mobili, per il problema di tre o più rette, pel problema del triangolo inscritto nel cerchio, che ha dato luogo al problema di Giordano[1]), pei lemmi sui luoghi piani e sui porismi, pel birapporto, per i teoremi del quadrangolo, dell' esagono e dei luoghi superficiali, e feci rilevare la poca originalità del contenuto del libro VIII.

Due lezioni impiegai in seguito su Diofanto e sull' esposizione dei 6 libri superstiti della sua Aritmetica, e sui numeri poligonali.

Ben più a lungo avrei voluto fermarmi su quest' opera interessante e sull' esame dei metodi impiegati per risolvere i suoi problemi sulle equazioni indeterminate di 1° e di 2° grado e sulle equazioni doppie, ma il tempo stringeva.

Rapidamente in poche lezioni passai a rassegna i Neoplatonici; i Matematici Greci della decadenza Patrizio, Teone, Ipazia, Sinesio; il risveglio della scuola di Atene; la scuola Bizantina; e dopo entrai a parlare dei Matematici Romani. Notai lo stato del calendario romano da Romolo a Giulio Cesare; passai rapidamente a rassegna Pollio, Trasillo, Seneca, Mela, Plinio, Columella; gli agrimensori Frontino, Balbo, Igino, Nipsus, Epafrodito, ecc. Parlai di Boezio e delle sue opere sull' aritmetica e la geometria, e di Cassiodoro. Dopo passai ad Isidoro da Siviglia, alle scuole cattedrali e conventuali, e in poco tempo tratteggiai Beda, Carlo Magno, Alcuino, Gerberto, Bernelino.

A questo punto credetti di tornare indietro e mostrare quali progressi avevano fatto le matematiche presso gl' Indiani e gli Arabi.

Una lezione impiegai a parlare di *Culvasûtra*, di Âryabhatta, di Brahmagupta e a tratteggiare l'entrata in iscena del popolo arabo per la conquista della scienza con le loro traduzioni. In un' altra lezione parlai dei matematici arabi di oriente Alchwarizmi, Thabit ibn Kurrah, Al Battâni, Abû'l Wafâ, Alhazen, Alkarchi, Alkaijami. Indi parlai

1) Alludo alla famosa estensione data per un poligono inscritto da Annibale Giordano da Ottajano.

dell' indiano Bhâscara. Poi parlai degli arabi di occidente Geber, Arzachel e dei matematici che pervennero ad assorbirne la coltura, Adelardo di Bath, Abramo ibn Ezra, Plato da Tivoli, Giovanni di Luna e Gherardo Cremonese; e chiusi il corso col riprendere il movimento scientifico presso i Cinesi dal regno di Lieou-pang fino al X secolo e dello sviluppo che si ebbe sotto il conquistatore tartaro Gengis-kan.

* * *

Nel secondo anno cominciai le lezioni col riepilogare in una conferenza sola tutto ciò che qui sopra ho accennato[1]), perchè gli studenti che assistevano alle nuove lezioni non erano più i medesimi del corso precedente, fatta eccezione di due soltanto, che vollero continuare a udire le lezioni anche nel nuovo corso. Poi in una lezione mostrai lo stato politico dell' Italia alla fine del XII secolo ed al principio del XIII, riepilogai l'origine dei conventi, delle scuole cattedrali e delle Università, e cominciai a parlare di Leonardo Fibonacci da Pisa. In un' altra lezione esposi il contenuto del *Liber Abbaci;* in una terza lezione m' intrattenni della *Pratica geometrica* e delle altre opere di Leonardo. Una lezione impiegai su Jordanus Nemorarius; con un' altra lezione mi sbrigai di John of Holywood, di Vincent de Beauvais e di altri professori di Parigi, di Robert Anglès, di Albertus Magnus, di Roger Baco e di Johann Peckham; e in un' altra lezione parlai di Witelo, di Giovanni Campano da Novara, di Bartolomeo da Parma e detti un cenno delle invenzioni del XIII secolo, degli astronomi e matematici arabi e cinesi ed accennai al viaggio di Marco Polo e all' enciclopedia di Brunetto Latini.

Passando a parlare del XIV secolo feci notare come in esso continua l'assimilazione araba e lo sviluppo che in questo secolo prendono le università e la coltura tedesca. In una lezione m' intrattenni dei Matematici Inglesi e delle loro contribuzioni alla trigonometria e mi fermai specialmente su Thomas di Bradwardin. In due altre lezioni mi occupai dei matematici francesi, mettendo in rilievo specialmente le opere di Nicole Oresme e i suoi concetti sulla rappresentazione delle curve e sugli esponenti frazionarii e mi sbrigai dei Matematici Tedeschi. Due lezioni impiegai sui Matematici Italiani, fermandomi specialmente sul calabrese Bernardo Barlaam, su Paolo Dagomari, su Biagio Pelicani, su Cecco d'Ascoli, su Andalo del Negro e Dante Alighieri. In un' altra lezione mi occupai degli scrittori bizantini Pediasimus, Planude, Rhabda, Argyrius, Moscopulo.

1) Un estratto di questa conferenza è stato pubblicato nel Giornale di matematiche (45, 1907, p. 73—81) col titolo: *Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nell' evo antico.*

Passando al secolo XV feci notare la passione che in qnesto secolo si ebbe per la ricerca dei manoscritti, eccitata dall'esempio datone da Francesco Petrarca e da Giovanni Boccaccio; l'inflnenza che ebbe sul progresso delle scienze la presa di Costantinopoli, e l'invenzione della stampa; e cominciai a parlare dei Matematici Italiani, sui qnali m'intrattenni quattro lezioni. Parlai specialmente di Prosdocimo dei Beldomandi e di Domenico Maria da Novara, di Leon Battista Alberti, di Pier dei Franceschi, di Leonardo da Vinci e dei suoi manoscritti, di Luca Paciuolo e delle sue opere, e terminai col fare un cenno dello Studio di Napoli.

Mi trattenni in seguito dei Matematici Tedeschi e in una lezione parlai di Johann von Gemunden, di Nicolaus von Cusa e del movimento della Terra da lni risvegliato, e di Georg von Peurbach; in un'altra parlai di Johann Müller ed esaminai l'opera sua *De triangulis omnimodis*; e in una terza m'intrattenni di Bernhard Walther, di Johann Werner e del suo trattatino delle coniche, ed arrivai fino ad Johann Widmann. Un rapido sguardo gettai ai Matematici Spagnuoli, Arabi e Persiani, e terminai lo studio del secolo col far notare i progressi che faceva la Francia e che rimasero sepolti con l'opera di Nicole Chuquet, *Le triparty en la science des nombres*, e l'interesse che prendeva l'editore francese Lefèvre alle opere straniere.

Nel parlare del secolo XVI mostrai l'epilogo che ebbero gli studi sul calendario giuliano con la riforma gregoriana e parlai di Luca Gaurico da Giffoni, di Marco da Benevento, di Ludovico Lilio calabrese.

Indi m' intrattenni per nna lezione su Albrecht Dürer e sullo esame delle sne opere per far rilevare la sua contribuzione al progresso della prospettiva e all'uso della doppia proiezione ortogonale per la rappresentazione dei corpi, che lo fa essere precursore di Monge[1]), ed esposi i contributi che alla prospettiva furon portati in Italia fino ad Ignazio Danti. Un'altra lezione occupai ad esporre il progresso che fece il concetto del moto della Terra con l'opera di Nicolaus Koppernich e con qnelle di Rhäticus, e come diversamente fosse accolto questo concetto da Reinhold, Mästlin, Giov. Antonio Magini, e da Wilhelm IV von Hessen-Cassel.

Indi passai a parlare dello svilnppo che ebbe l' algebra in questo secolo e prima parlai in una lezione dell' inglese Robert Recorde, dei tedeschi H. Schreiber, Chr. Rudolff, A. Riese e Michael Stifel del

1) Si legga F. Amodeo, *Albrecht Dürer precursore di Monge;* Atti della r. acc. delle scienze di Napoli 13_2, n. 16, 1907.

quale esposi il contenuto dell' *Arithmetica integra*; poi in un'altra lezione parlai della scoverta della risoluzione dell'equazione cubica. In un' altra lezione feci la storia della risoluzione dell'equazione cubica fatta da Del Ferro e della sfida fra Tartaglia e Fiore e fra Tartaglia e Ferrari. Una lezione impiegai a mostrare il contributo che Cardano apportò alla risoluzione dell' equazione cubica con la pubblicazione dell' *Ars magna* e feci una digressione fino ad Antonio de Monforte e Giacinto de Cristofaro napoletani. Un'altra lezione impiegai ad occuparmi della risoluzione dell'equazione di 4° grado fatta da Ferrari, della *Algebra* pubblicata da Rafael Bombelli e del caso irreduttibile, facendo una digressione fino a Vito Caravelli; e dopo passai ad occuparmi di proposito delle opere di Tartaglia.

Cinque lezioni impiegai ad illustrare i meriti di queste opere. Prima mi occupai della *Scienza nuova* e dei suoi tentativi sulle leggi del moto, della traduzione di Archimede, dei *Quesiti et inventioni diverse*, e della *Travagliata invenzione*. Poi del *General trattato dei numeri et misure* pel quale impiegai quattro lezioni, fermandomi specialmente sul famoso triangolo e sull' applicazione che egli ne faceva all' estrazione di radici di qualunque indice, sulla misura delle botti, e sulla risoluzione dei problemi geometrici con una sola apertura di compasso.

Una lezione impiegai per Giov. Battista Benedetti, Pedro Nuñez, Federico Commandino e Francesco Maurolico, del quale ultimo misi in evidenza il trattatino sulle coniche e le costruzioni che egli proponeva per queste curve. Indi passai a parlare delle scuola Francese ed Olandese, impiegando due lezioni per parlare di P. de la Ramée, di François Viète e di Adriaen van Roomen. Conchiusi la trattazione del secolo mostrando come questo si chiudesse con l' avvento dei gesuiti, dell' inquisizione e col martirio di Giordano Bruno.

Eravamo alla fine di Aprile quando incominciai a parlare del secolo XVII. Cominciai con Galileo Galilei e per lui impiegai quattro lezioni facendo rilevare quanti punti di contatto vi sono fra le opere di Tartaglia e quelle di Galilei, e l'incremento dato alle scienze col metodo sperimentale e con l'applicazione che Galilei fece del cannocchiale all'astronomia, e come gli scienziati rimanessero scossi e perturbati dalla fine infelice che Galilei dove' fare per opera dell' inquisizione.

Una lezione impiegai per John Napier e per la sua invenzione dei logaritmi, e per Henry Briggs, Gunter, Gellibrand, Bürgi. Dissi in un'altra lezione brevemente di Tycho Brahe ed entrai a parlare di Johann Kepler e mi dilungai a mostrare come egli pervenne alle celebri leggi astronomiche. In un'altra lezione considerai Kepler come geometra,

esaminando specialmente l'opera *Stereometria doliorum* e il merito suo all'inizio delle ricerche sugli infinitesimi.

Dopo cominciai a parlare di BONAVENTURA CAVALIERI, sul quale m'intrattenni due lezioni, esaminando partitamente le sue opere e fermandomi specialmente sulla *Geometria indivisibilibus promota* sulle *Exercitationes geometricae sex* e sullo *Specchio ustorio.* In un'ultima lezione parlai di BARTOLOMEO SOUVEY e di GREGORIO DA S. VINCENZO e non ebbi tempo d'intrattenermi su quest'ultimo quanto era necessario di fare, nè di andare piu in là, perchè eravamo giunti alla fine dell'anno scolastico, che è stato abbreviato da ripetute chiusure dell' Università per tumulti e in ultimo da una sopraggiuntami indisposizione.

* * *

Qualche considerazione di ordine didattico mi sia lecito di fare ora, dopo due anni di esperimento. La folla dei giovani che accorre alle lezioni è formata più dei giovani dei primi anni della Facoltà matematica, che di quelli degli ultimi, e alle volte più di persone estranee all' università che di studenti universitarii. Ma quelle s' interessano più ad udire la parte biografica degli uomini di cui si parla e la dipintura generale dei tempi e le impressioni degli effetti delle ricerche, che la natura delle ricerche e l'esame della loro entità. Quelli che s' interessano all' esame delle opere sono i pochi assidui laureandi in matematiche che frequentano il corso e qualcuno del primo anno che desidera acquistare un titolo con l' esame.

Ma non tutti gli alunni del 3° anno del corso per la laurea di Matematica, per i quali il corso è stato indicato dalla Facoltà, ascoltano le lezioni di Storia delle matematiche, e la ragione è palese. Questi sono preoccupati degli esami di laurea, per i quali gli esami speciali obbligatorii nel 2° biennio sono in numero di cinque da scegliersi fra gl' insegnamenti che si danno nel 2° biennio, ma non è permesso ai giovani dal regolamento che essi possano includere in uno dei cinque esami speciali obbligatorii quello della Storia delle matematiche; nè per ora nel Seminario matematico, che alla Facoltà è annesso, è fatto merito di frequentare questo corso. Perciò gli studenti, seguendo la legge del minimo sforzo per raggiungere lo scopo finale, che è la laurea, non tutti credono utile spendere il loro tempo per questo insegnamento, supponendo forse che basterà sfogliare un piccolo manuale di Storia per sapere la Storia. Fanno eccezione alcuni pochi che hanno trovato nella Storia la soddisfazione di un loro gusto speciale, o che veggono in essa la possibilità di fare una tesi più conforme alla loro tendenza.

È da augurarsi che il Ministro della pubblica Istruzione, in Italia, intenda che lo studio della Storia delle Matematiche non fornisce soltanto

un lustro di conoscenze di date e di biografie, ma entra nello spirito stesso della Scienza, e analizza il perchè dell' evolversi delle invenzioni in un senso o nell' altro e rimette a luce idee feconde, che la lotta per la vita, o la non curanza degli uomini, ha impedito che si sviluppassero quando furono enunciate; e che porta sopratutto i cultori della scienza alla conoscenza della vera strada percorsa dallo spirito matematico dell' umanità, cosa questa che non si può dire ancora assodata, nè lo sarà per molti anni ancora, se non si pon mano a un lavoro sistematico e collettivo di indagini storiche.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

1^3: 12, 15, 22, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 61. — **1^3: 33,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 307. — **1^3: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 61—64. — **1^3: 163—165,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1^3: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 64—65. — **1^3: 202,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 307—309. — **1^3: 203,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 65, 309. — **1^3: 213, 225, 236, 245, 270, 287, 297, 298, 310,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 65—66. — **1^3: 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 174—176. — **1^3: 351,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 66. — **1^3: 365, 368,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 177.

1^3: 372. Die Ausführungen, die mit den Worten: „Da ist nun ein sehr geistreicher Versuch“ beginnen und erst S. 374 Z. 3 enden, beziehen sich nicht auf Heron, sondern auf Archimedes. Daß sie hier untergebracht worden sind, beruht wohl zunächst darauf, daß sie aus einem Artikel mit dem Titel *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln* entnommen sind. Vielleicht gibt es noch zwei Gründe dieses Verfahrens, nämlich eine Bemerkung von Eutokios und eine Vermutung von Wertheim, aber jene ist meines Erachtens von Herrn Cantor mißverstanden worden, und diese ist sicherlich unbegründet. Die Bemerkung von Eutokios enthält, wie Herr Cantor S. 318 richtig angibt, daß Heron in seinen *Metrika* gezeigt habe, wie man eine angenäherte Quadratwurzel finden könne; aus dem Umstande, daß diese Bemerkung in einem Kommentar zu Archimedes' Kreisrechnung vorkommt, scheint Herr Cantor nun zu folgern (Z 17—18), daß nach Eutokios die in Archimedes' Kreisrechnung vorkommenden angenäherten Quadratwurzeln alle nach Herons Vorschrift gefunden werden sollen. Aber diese Folgerung ist sicherlich unberechtigt und Herr Cantor lenkt selbst die Aufmerksamkeit darauf, daß die angebliche Folgerung eine unrichtige Behauptung enthält. Daß die Vermutung von Wertheim, nämlich daß Heron bei der Berechnung von Kubikwurzeln die Methode des doppelten falschen Ansatzes benutzt hat, durchaus unbegründet ist, glaube ich in der Bemerkung zu **1^3: 374** (siehe unten) nachgewiesen zu haben.

Die fraglichen Ausführungen sollten also nach S. 318 versetzt werden, und dabei wäre es angebracht, den Passus: „Eine Stütze findet die Vermutung [daß Archimedes die Methode des doppelten falschen Ansatzes benutzt hat] lediglich in der Tatsache, daß nur mit ihrer Hilfe die archimedischen Näherungswerte für $\sqrt{3}$ erhalten werden“ zu modifizieren, weil, was darin als Tatsache bezeichnet wird, höchstens als eine persönliche Ansicht des Herrn Cantor betrachtet werden kann. Die betreffenden Näherungswerte sind schon vor Wertheim von verschiedenen Verfassern (vgl. hierüber Hultsch, *Die Näherungswerte irrationaler*

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

Quadratwurzeln bei Archimedes; Nachr. d. Gesch. d. Wiss. zu Göttingen 1893, S. 403—404) hergeleitet worden und einige dieser Herleitungen sind meines Erachtens gar nicht schlechter als die Wertheimsche. Auffällig ist es jedenfalls, daß Herr Cantor so ausführlich über diese berichtet, während er die älteren Versuche kaum andeutet (siehe S. 317). G. Eneström.

1^3: 374. Der Absatz, der mit den Worten: „Nun wird aber eine ähnliche Benutzung zweier falschen Ansätze angewandt, um eine angenäherte Kubikwurzel zu finden" beginnt, gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß. Das ganze Kapitel handelt von Heron, und wenn man die zitierten Worte liest, so wird man wohl zuerst versucht sein zu vermuten, daß die fragliche Benutzung von Heron herrührt. In Wirklichkeit sind indessen nach dem Worte „aber" die Worte „von G. Wertheim" einzufügen, und der Absatz ist eigentlich eine Fortsetzung des Berichtes, der S. 372 Z. 20 mit den Worten „Da ist nun" beginnt, zu betrachten. Aber auf diese Weise tritt das eigentliche historische Ergebnis, nämlich daß bei Heron die Formel $\sqrt[3]{100} = 4 + \frac{5 \cdot 36}{180 + 100}$ vorkommt, in den Hintergrund.

Noch mehr ist indessen zu bedauern, daß Herr Cantor das ihm vorliegende Material, nämlich den Artikel von Wertheim: *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln,* nicht gut benutzt hat. Dieser Artikel enthält: 1. einen Nachweis, daß Heron höchstwahrscheinlich die Formel $\sqrt[3]{m} = a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + a d_2}$ anwendete, wo $a = \mathrm{E}(\sqrt[3]{m})$, $d_1 = m - a^3$, $d_2 = (a+1)^3 - m$; 2. einen Versuch, diese Formel durch Benutzung zweier falscher Ansätze herzuleiten; 3. als Nachtrag eine andere Herleitung der Formel von Herrn A. Kerber. Hier ist ganz gewiß 1. das wichtigste, und von Interesse ist auch 3., während 2. eigentlich fast wertlos ist; nichtsdestoweniger erwähnt Herr Cantor zuerst 2., dann 1., aber geht stillschweigend über 3. vorbei.

Meine Behauptung, daß der Wertheimsche Versuch, die Formel $\sqrt[3]{m} = a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + a d_2}$ herzuleiten, fast wertlos sei, stütze ich teils auf den von Wertheim selbst erkannten Umstand, daß kein Beispiel einer Anwendung des doppelten falschen Ansatzes seitens der Griechen bekannt ist, teils darauf, daß Wertheims Versuch von einer durchaus willkürlichen Voraussetzung ausgeht, nämlich daß Heron $-(a+1)d_1$ und ad_2 als die Fehler, die beziehungsweise den Annahmen a und $a+1$ entsprechen, betrachtet, teils endlich darauf, daß der Wertheimsche Nachtrag eine ganz andere, sehr einfache und natürliche Herleitung der Formel bringt. Meiner Ansicht nach kann man diese Herleitung noch ein wenig verbessern und ich erlaube mir diese Verbesserung hier auseinanderzusetzen.

Sei $\sqrt[3]{m} = x$, $\delta_1 = (x - a)^3$, $\delta_2 = (a + 1 - x)^3$, so ist

$$\delta_1 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3, \quad \text{oder} \quad 3ax(x-a) = x^3 - a^3 - \delta_1 = d_1 - \delta_1,$$

$$\delta_2 = (a+1)^3 - 3(a+1)^2x + 3(a+1)x^2 - x^3,$$

$$\text{oder} \quad 3(a+1)x(a+1-x) = (a+1)^3 - x^3 - \delta_2 = d_2 - \delta_2,$$

folglich

$$\frac{d_2 - \delta_2}{d_1 - \delta_1} = \frac{3(a+1)x(a+1-x)}{3ax(x-a)} = \frac{(a+1)(1-(x-a))}{a(x-a)} = \frac{a+1}{a(x-a)} - \frac{a+1}{a}.$$

Löst man nun diese Gleichung in bezug auf $x - a$, so erhält man

$$x - a = \frac{(a+1)(d_1 - \delta_1)}{(a+1)(d_1 - \delta_1) + a(d_2 - \delta_2)}, \quad \text{d. h.} \quad \sqrt[3]{m} = a + \frac{(a+1)(d_1 - \delta_1)}{(a+1)(d_1 - \delta_1) + a(d_2 - \delta_2)}.$$

Aber δ_1 und δ_2 sind eigentliche Brüche und wenn man diese vernachlässigt, so wird

$$\sqrt[3]{m} \sim a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + a d_2}.$$

Meine Herleitung kann ein wenig verwickelt erscheinen, aber vernachlässigt man schon von Anfang an die eigentlichen Brüche δ_1 und δ_2, so kann die Herleitung leicht geometrisch ausgeführt werden. Sie hat auch den Vorzug, daß man den Fehler sofort abschätzen kann, und sie kann oft benutzt werden, um bessere Näherungswerte zu berechnen; für diesen Zweck hat man nämlich nur statt δ_1 und δ_2 bzw. $(x_1 - a)^3$ und $(a + 1 - x_1)^3$ zu setzen, wo x_1 den soeben berechneten Näherungswert bedeutet. In dem bei Heron vorkommenden Beispiel ist $m = 100$ und Herons Näherungswert ist $4\frac{9}{14} = 4.64286$. Durch meine Formel erhält man als zweiten Näherungswert 4.64157, während der richtige Wert 4.6415888... ist, so daß die vier ersten Dezimale korrekt sind.

G. Eneström.

1^3 : 376. Es wäre nicht ohne Interesse hier zu bemerken, daß in Herons *Metrika* (S. 48 der Ausgabe von H. Schöne) der Term δυναμοδύναμις für x^4 vorkommt (siehe die Bemerkung zu 1^3 : 470; BM 8_3, 1907/8, S. 311).

G. Eneström.

1^3 : 380, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 66—67. — **1^3 : 388, 406, 409, 410,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 177—178. — **1^3 : 429, 431,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1^3 : 432,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1^3 : 433, 452,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 179. — **1^3 : 459,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 309—310. — **1^3 : 464,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 179. — **1^3 : 470,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 311.

1^3 : 471. Als Herr Cantor in die 2. Auflage der *Vorlesungen* die Bemerkung einfügte, das Diofantische Zeichen für Minus sei „dahin gedeutet worden, es sei ein aus Λ und I gebildetes Kompendium für den Anfang des Wortes λεῖψις", und dagegen die nachweislich unrichtige Behauptung strich, Diofantos habe selbst dies Zeichen als ein verstümmeltes umgekehrtes ψ erklärt, so war diese Änderung ohne Zweifel eine Verbesserung. Es ist nur schade, daß Herr Cantor nicht in der 3. Auflage noch einen Schritt weiter auf dem eingeschlagenen Wege gegangen ist unter Bezugnahme auf den Artikel von Paul Tannery, *Sur le symbole de soustraction chez les Grecs* (Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 5—8). Hier lenkt Tannery die Aufmerksamkeit darauf, daß das Diofantische Zeichen für Minus offenbar schon in Herons *Metrika* (S. 156 der Ausgabe von H. Schöne) vorkommt, und daß es wahrscheinlich nicht λεῖψις, sondern vielmehr λείψας oder λιπών (vom Verbum λείπειν) bezeichnete.

G. Eneström.

1^3 : 488, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1^3 : 498,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 180. — **1^3 : 500, 502,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1^3 : 503—504,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 180—181. — **1^3 : 509, 510, 513, 515, 528, 545, 563—564,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67—69. — **1^3 : 576,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 69—70, 181. — **1^3 : 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70. — **1^3 : 706,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70, 181. — **1^3 : 713,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70. — **1^3 : 715—716,** siehe BM 8_3,

1907/8, S. 70—71, 181. — **1³ : 717**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1³ : 718**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71. — **1³ : 719**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 183—184. — **1³ : 720**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71. — **1³ : 730**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1³ : 734**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71. — **1³ : 736—737**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1³ : 738, 743, 748, 750**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72. — **1³ : 764, 770**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 185. — **1³ : 780, 781, 794, 800**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72—73. — **1³ : 801**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 185—186.

1³ : 802. Es ist richtig, daß in der von Herrn Cantor zitierten mittelalterlichen Übersetzung der Algebra Alkhwarizmis das Wort „articulus" vorkommt und wörtlich durch Gelenkzahl übersetzt werden kann. Aber wenn Herr Cantor weiter unten bemerkt, daß das entsprechende Wort des arabischen Originals Zehner bedeutet, so ist diese Bemerkung nur bis zu einem gewissen Grade richtig. Rosen gibt das arabische Wort nicht durch „ten", sondern durch „greater number" wieder, und in der Tat handelt es sich um das Produkt $(a \pm b)(c \pm d)$, wo a, b, c, d beliebige Zahlen sein können, vorausgesetzt, daß $a > b$ und $c > d$. Wenn also in der lateinischen Übersetzung steht: „si ergo fuerit articulus, et cum eo fuerint unitates aut fuerint unitates excepte ex eo . . .", so haben eigentlich die zwei Wörter „articulus" und „unitates" eine weitere Bedeutung als die sonst gewöhnliche, ganz wie die entsprechenden Wörter des arabischen Originals (vgl. hierüber F. Woepcke, *Extrait du Fakhri*, Paris 1853, S. 48). Aus dem Umstande, daß in der fraglichen lateinischen Übersetzung das Wort „articulus" vorkommt, folgt also nicht, daß der Übersetzer den rein arithmetischen Term Zehner durch „articulus" wiedergegeben haben würde (vgl. BM 8_3, 1907/8, S. 151). G. Eneström.

1³ : 802. Wenn Herr Cantor hier (Z. 12—14) behauptet, der Verfasser des *Liber algorismi de pratica arismetrice* habe das Wort „articulus" genau in dem gleichen Sinne, in welchem es in der gefälschten Geometrie des Boëtius zur Anwendung kam, gebraucht, so ist diese Behauptung vielleicht richtig, aber ganz sicher ist es nicht. Herr Cantor verweist auf S. 583, wo die betreffende Stelle der *Geometria Boëtii* wörtlich übersetzt ist, aber daraus kann man nicht ersehen, ob ein „articulus" von der Form $A \cdot 10$ (A eine beliebige ganze Zahl) oder von der Form $a \cdot 10^n$ ($a < 10$) ist. Auf der anderen Seite wird in der *Geometria Boëtii* „limes" als ein „numerus incompositus" bezeichnet, und daraus darf man wohl folgern, daß „limes" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ ($a < 10$) bedeutet, aber daß „articulus" mit „limes" identisch sei, wird meines Wissens nicht in der *Geometria Boëtii* ausdrücklich angegeben. Bekanntlich hatte im Mittelalter „limes" eine andere Bedeutung als „articulus" (vgl. G. Eneström, *Sur les neuf „limites" mentionnés dans l'„Algorismus" de Sacrobosco;* Biblioth. Mathem. 1897, S. 97—102). Man könnte also sehr wohl annehmen, daß in der *Geometria Boëtii* vier Arten von Zahlen genannt werden, nämlich: 1. „digitus", d. h. eine Zahl kleiner als 10; 2. „articulus", d. h. eine Zahl, die ein Multiplum von 10 ist; 3. „limes", d. h. eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ ($a < 10$); 4. „numerus compositus", d. h. eine Zahl, die weder „digitus" noch „limes" ist.

Dagegen wird im *Liber algorismi de pratica arismetrice* ausdrücklich hervorgehoben (siehe die Ausgabe von Boncompagni, Rom 1857, S. 26), daß „articulus" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ ($a < 10$) ist. G. Eneström.

1³:802, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73, 186—187. — **1³:805—806, 815**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73.

1³: 838. Da die hier erwähnte 34. Aufgabe der „Propositiones ad acuendos juvenes" das älteste mittelalterliche Beispiel einer unbestimmten Aufgabe ist, so gebe ich nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn GEORG THIELE den besten Text der Aufgabe nebst deren Lösung wieder:

> Quidam paterfamilias habuit familias (!) centum, quibus praecepit dare de annona modios C, eo vero tenore, ut viri acciperent modios ternos et mulieres binos et infantes singula semodia. Dicat ergo qui valet quot viri, quot mulieres aut quot infantes fuerunt.

Solutio.

> Undecim terni fiunt XXXIII, et XV bis ducti fiunt XXX; duc vero septuagies quattuor semis, fiunt XXXVII; viri acceperunt XXXIII modios, XV mulieres acceperunt XXX et LXXIIII infantes acceperunt XXXVII, qui simul iuncti, id est XI et XV et LXXIV fiunt C, que sunt familiae (!) C. Similiter iunge XXXIII et XXX et XXXVII, fiunt C, qui sunt modii C. His ergo simul iunctis habes familias (!) C et modios C.

Die älteste bekannte Handschrift der „Propositiones" stammt aus dem 10. Jahrhundert, aber nach Herrn THIELE sind die Aufgaben spätestens in Karolingischer Zeit entstanden, und vielleicht ist deren älteste Fassung ins 4. Jahrhundert zurückzuverlegen; die Auflösung dagegen gehörte ursprünglich nicht der Aufgabe zu.

G. ENESTRÖM.

1³:855, 857, 859, 862, 863, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73—74. — **1³:867**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 74, 187. — **1³:869, 875—876, 877, 878**, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 74—76.

1³: 881. Die Angabe, daß bei BERNELINUS „das Einmaleins" vorkommt, ist so undeutlich, daß sie fast notwendigerweise mißverstanden werden muß, denn wenn man die Worte „*das* Einmaleins" sieht, so denkt man wohl in erster Linie an das gewöhnliche Einmaleins; beispielsweise hat J. TROPFKE (*Geschichte der Elementarmathematik* I, Leipzig 1902, S. 69) Herrn CANTORS Angabe auf diese Weise aufgefaßt, denn er behauptet unter Berufung auf die *Vorlesungen*, daß bei BERNELINUS „die Diagonalreihe frei gelassen ist". In Wirklichkeit kommt bei BERNELINUS (siehe *Oeuvres de GERBERT*, éd. OLLERIS, Clermont 1867, S. 361—362) gar nicht das gewöhnliche Einmaleins vor, sondern nur eine Zusammenstellung von 36 besonderen Multiplikationsregeln, die mit „Semel II II" beginnt und mit „Octies VIIII LXXII" endet. Eine noch ältere Zusammenstellung dieser Art findet sich nach CURTZE (Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 278—279) im Cod. Bernensis 250 Bl. 1ʳ.

Das gewöhnliche Einmaleins dürfte den eigentlichen Abacisten unbekannt gewesen sein. Freilich findet es sich in einer Abakusschrift (siehe BM. 8_3, 1907/8, S. 79), aber diese stammt nach NARDUCCI aus der zweiten Hälfte des 12. Jahrhunderts und enthält auch andere Sachen, die sonst nicht von den Abacisten gelehrt wurden. Meines Wissens kommt das gewöhnliche Einmaleins zuerst in der von CURTZE 1898 herausgegebenen Algorismusschrift aus dem 12. Jahrhundert vor (siehe Abhandl. z. Gesch. der Mathem. **8**, S. 18), und zwar in dreieckiger Anordnung. Dagegen hat LEONARDO PISANO nicht das

gewöhnliche Einmaleins, sondern nur eine Zusammenstellung von Multiplikationsregeln etwa wie die 36 Regeln bei Bernelinus (siehe *Scritti pubblicati da B. Boncompagni*, I, Rom 1857, S. 6). G. Eneström.

1³: 882, 889, 898, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 77—78. — **1³: 900,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1³: 902,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 78—79. — **1³: 906,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 79, 188—189. — **1³: 908, 909, 910,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 79.

1³ : 910. Es ist durchaus unrichtig, daß (Z. 1) es für den Algorithmiker in lateinischer Sprache keine anderen Wörter für Einer und Zehner als „digitus" und „articulus" gab. Man braucht sich nur die Mühe zu geben, den Anfang des Traktates *Algoritmi de numero indorum* näher einzusehen, um zu finden, daß der lateinische Übersetzer dieser Schrift *nicht* die Wörter „digiti" und „articuli" (vgl. M. Cantor, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, Halle 1863, S. 274 Z. 12—13), sondern „unitates", „deceni", „centeni" etc. anwendet (siehe z. B. die Ausgabe von Boncompagni, Rom 1857, S. 3: „prima est differentia unitatum . . . secunda differentia decenorum"). Auch aus Leonardo Pisanos *Liber abbaci* kann man leicht die Unrichtigkeit der Behauptung des Herrn Cantor ersehen. Die zwei soeben genannten Arbeiten waren schon vor der Herausgabe der ersten Auflage der *Vorlesungen* zugänglich; ein später veröffentlichter Beleg für die Unrichtigkeit der Behauptung ist die von Curtze 1898 zum Abdruck gebrachte Algorismusschrift.

G. Eneström.

1³: 911, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 79—80.

Über Bemerkungen zu den Bänden **2** und **3** der „Vorlesungen" siehe S. 189—215.

Anfragen.

136. Über eine im Mittelalter übersetzte arabische Schrift algebraischen Inhalts. In der *Pratica d'arithmetica* (siehe die Ausgabe 1548, Bl. 71ᵃ) wird von Ghaligai eine Übersetzung einer arabischen Algebra erwähnt, wo die sieben Terme Geber, Elmechel, Elchal, Elchelif, Elfazial, Buram und Eltermen vorkommen. Daß die betreffende Algebra nicht die des Alkhwarizmi ist, scheint daraus hervorzugehen, daß, wie mir Herr Suter mitteilt, der von Rosen herausgegebene arabische Text jedenfalls nicht die Terme Elchelif, Buram und Eltermen enthält.

Gibt es unter den jetzt bekannten arabischen Traktaten über Algebra irgendeinen, wo die sieben Terme vorkommen? Kommen diese Terme vielleicht in der noch nicht näher untersuchten lateinischen Algebra des Pariser Ms. 7377 A vor, dessen arabisches Original nach G. Sacerdote (*Il trattato del pentagono e del decagono di Abu Kamil Shogia;* Festschrift zum achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneiders, Leipzig 1896, S. 171) von Abu Kamil Schodja ben Aslam verfaßt ist? G. Eneström.

Rezensionen.

F. Cajori. On the transformation of algebraic equations by Erland Samuel Bring [In Lund, Sweden, 1786] Translated from the Latin and annotated.

Colorado college publication, general series No. 31, November 1907, S. 65—91.

Es kommt nunmehr ziemlich oft vor, daß ältere mathematische Schriften in Übersetzungen herausgegeben werden, und den Historiker der Mathematik muß dies sehr freuen, wenn es sich um eine ältere Schrift handelt, die den derzeitigen Stand einer mathematischen Theorie repräsentiert. Rührt dagegen die Schrift von einem Verfasser her, der eigentlich ein Laie auf dem mathematischen Gebiete war, so ist der Nutzen der Übersetzung etwas zweifelhafter, denn dieselbe kann leicht bei den nicht sachkundigen Lesern eine unrichtige Vorstellung vom Stand der Mathematik an einem besonderen Zeitpunkt wecken. Meiner Ansicht nach trifft diese Bemerkung zu in betreff der von CAJORI besorgten Übersetzung von E. S. BRINGS Abhandlung über die Transformation algebraischer Gleichungen, und um meine Ansicht zu begründen, ist es angebracht, zuerst eine kurze Übersicht der älteren Geschichte des von BRING behandelten Gegenstandes zu bieten.

In den Acta Eruditorum 1683 (S. 204—207) veröffentlichte TSCHIRNHAUS eine Abhandlung *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione,* worin er nachwies, daß die Gleichung $y^3 - qy - r = 0$ durch die Substitution $y^2 = by + z + a$ in die Form $z^3 + k = 0$ transformiert werden kann, wo a und b einer linearen und einer quadratischen Gleichung genügen, so daß man auf diese Weise allmählich eine allgemeine kubische Gleichung in eine reine verwandeln kann. Er fügte hinzu, daß er auf diese Weise aus einer Gleichung höheren Grades drei, vier usw. Glieder herausschaffen könnte. Die Möglichkeit, daß man dabei schon in betreff einer Gleichung vierten Grades auf eine Hilfsgleichung stoße, deren Gradzahl höher als 4 sei, zog er freilich nicht in Betracht. TSCHIRNHAUS' Verfahren wurde bald von J. PRESTET in den *Nouveaux élémens des mathématiques* (II, Paris 1689, S. 411—414) auf Grund eines Mißverständnisses bemängelt, aber M. ROLLE zeigte in seinem *Traité d'algèbre* (Paris 1690, S. 222—226), daß das Verfahren wirklich für die Lösung einer allgemeinen kubischen Gleichung anwendbar sei. Etwas später erwähnte CH. REYNEAU die Transformationsmethode ausführlich in seiner *Analyse démontrée* (I, Paris 1708, S. 251—256), aber ohne TSCHIRNHAUS zu nennen, und bemerkte zum Schluß, daß die Methode für Gleichungen höheren Grades benutzt werden könne. Auch in den sehr verbreiteten *Elementa matheseos universae* von CHR. WOLFF wurde TSCHIRNHAUS' Verfahren erwähnt (V, Halle 1741, S. 313—314), freilich mit der Bemerkung, daß dasselbe für die Lösung von höheren Gleichungen unanwendbar sei. Endlich widmete LAGRANGE in den *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (Nouv. mém. de l'acad. d. sc. de Berlin, année 1770, gedruckt 1772, S. 134—215;

année 1771, gedruckt 1773, S. 138—253) der Methode von TSCHIRNHAUS eine eingehende Untersuchung. Er hob hervor (année 1770, S. 192—193), daß man offenbar auf diese Weise eine Gleichung vierten Grades lösen kann, weil es nur nötig sei, das zweite und das vierte Glied wegzuschaffen, um eine allgemeine Gleichung vierten Grades in eine quadratische zu verwandeln; ferner bemerkte er (année 1771, S. 149—150), daß TSCHIRNHAUS' Transformationsmethode für die Auflösung höherer Gleichungen kaum anwendbar sei, weil die Hilfsgleichung höher als die vorgelegte werde. Ob es möglich sei, wenigstens drei Glieder einer Gleichung fünften Grades wegzuschaffen, hatte LAGRANGE keinen Anlaß zu untersuchen, da eine Gleichung von der Form $x^5 + px + q = 0$ jedenfalls nicht algebraisch aufgelöst werden kann.

Nun setzte E. S. BRING ein, ohne auch nur eine flüchtige Kenntnis der soeben erwähnten Arbeiten zu besitzen. Freilich wußte er, daß sich TSCHIRNHAUS mit der betreffenden Frage beschäftigt hatte, aber zu welchen Resultaten dieser gelangt war, kannte er nicht und ebensowenig, daß das Verfahren in den Acta Eruditorum auseinandergesetzt worden war. In der Tat war BRINGS einzige Quelle die folgende kurze Notiz in KÄSTNERS *Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen* (Göttingen 1760, § 290):

> So läßt sich [durch eine lineare Substitution] jedes Glied der Gleichung wegschaffen, aber nur eins allein. Man kann auch leicht zeigen, daß keine Methode möglich ist, die allgemein aus jeder Gleichung alle Glieder bis auf das höchste und das letzte wegschaffte, wie der Herr VON TSCHIRNHAUSEN dergleichen erfunden zu haben glaubte.

Hieraus folgerte nun BRING, daß sich alle seine Vorgänger mit einer linearen Substitution begnügt hatten („addere oportet, nemini mathematicorum, ut nos quidem accepimus, adhuc in mentem venisse de adhibenda alia aequatione subsidiaria, ac quae simplex sit uniusque dignitatis"). Aus diesem Grunde sind die allgemeinen Ausführungen seiner Abhandlung (§ 1—5) historisch wertlos — sie waren ja 100 Jahre zu alt —, und auch der Inhalt des § 6 (die Lösung der kubischen Gleichung $z^3 + mz^2 + nz + p = 0$ durch die Substitution $z^2 + bz + a + y = 0$) konnte im Jahre 1786 als allgemein bekannt betrachtet werden. Wesentlich ohne Interesse sind ebenfalls meines Erachtens die Paragraphen 7—9. Der § 7 lehrt die Lösung einer biquadratischen Gleichung durch Zurückführung derselben auf die Form $y^4 + hy^2 + k = 0$, also dasselbe Verfahren, das LAGRANGE 1772 auseinandersetzte, und die zwei folgenden Paragraphen weisen nach, daß, wenn man die allgemeine Gleichung vierten Grades entweder direkt auf die Form $y^4 + ay^3 + b = 0$ oder auf die Form $y^4 + b = 0$ zurückführen will, die Gradzahl der Hilfsgleichung größer als 4 wird. Von wirklichem Wert sind also nur die zwei letzten Paragraphen (zusammen vier Druckseiten), wo zum erstenmal gezeigt wird, wie die Gleichung $z^5 + pz^2 + qz + r = 0$ auf die Form $y^5 + by + a = 0$ gebracht werden kann. Aber auch dieser Wert darf nicht überschätzt werden, denn BRING hatte keine Ahnung davon, daß die fragliche Transformation etwas mehr als ein ziemlich einfaches algebraisches Rechenkunststück enthielt, und in der Tat hatte sie für die Mathematik des 18. Jahrhunderts keine höhere Bedeutung, sonst wäre sicherlich die Aufgabe schon lange Zeit vor BRING gelöst gewesen. Freilich bemerkt CAJORI, daß BRING „had a deeper insight into one important matter" und motiviert seine Bemerkung dadurch, daß „he never claimed that the transformation led to the general algebraic solution of the quintic,

while JERRARD persisted in making such a claim", aber diese Tatsache scheint mir kaum als Beleg für BRINGS „tiefere Einsicht" anwendbar. Hätte BRING wenigstens sein trinomisches Resultat auf die Form $x^5 + x - k = 0$ gebracht, so würde man vielleicht sagen können, daß er die Auflösung der Gleichungen fünften Grades vorbereitet habe, denn dadurch wäre ja nachgewiesen worden, daß diese Auflösung nur von einem einzigen Parameter abhängt, der eine explizite algebraische Funktion der Koeffizienten ist, aber nicht einmal diesen vorbereitenden Schritt hat BRING gemacht. Überdies ist es schon längst hervorgehoben worden (siehe C. J. HILL, Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar 1861, S. 332; vgl. F. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig 1884, S. 244), daß BRINGS Transformationsverfahren unnötig verwickelt ist. Nachdem er die Gleichung

$$15pbc + 20qbd + 25rb + 10qc^2 + 25rcd - 15p^2c - 3p^2d^2 - 23pqd - 2q^2 - 20rp = 0$$

hergeleitet hat, setzt er nämlich

$$b = \alpha d + \beta, \quad c = d + \gamma$$

und führt dadurch drei neue unbekannte Größen α, β, γ ein, während er viel leichter zum Ziel gelangt wäre, wenn er ganz einfach

$$15pbc + 20qbd + 25rb = 0, \text{ d. h. } 15pc + 20qd + 25r = 0$$

gesetzt hätte, denn auf diese Weise würde er sofort eine quadratische Gleichung bekommen haben, woraus d als Funktion gegebener Größen bestimmt werden kann.

Ich habe oben behauptet, daß der Inhalt der fünf ersten Paragraphen der BRINGschen Abhandlung historisch wertlos sei. Indessen gibt es eine Stelle des § 4, worauf CAJORI großen Wert legt, und die ich darum hier besonders besprechen will. Für diesen Zweck bringe ich zuerst die Fortsetzung des oben von mir zitierten Passus des KÄSTNERschen Lehrbuches zum Abdruck:

> Gäbe es eine ... Methode ..., jede cubische Gleichung in $y^3 + t = 0$ zu verwandeln, so daß sich x finden ließe, wenn man y hätte; so müßte das x der allgemeinen cubischen durch das y der reinen bestimmt werden. Aber das y der reinen hat allemahl zweene unmögliche Werthe und das x der allgemeinen kann lauter mögliche haben, woraus schon zu übersehen ist, daß sich dergleichen Methode nicht erfinden läßt.

Diese Schlußfolgerung wird nun von BRING an der angedeuteten Stelle bemängelt, indem er darauf hinweist, daß der Ausdruck „durch etwas bestimmt werden" zweideutig sei, und daß KÄSTNERS Konklusion in Fortfall komme, wenn man dem Ausdrucke die richtige Deutung gebe; in Wirklichkeit finden sich Fälle, z. B. der „Casus irreductibilis", in denen eine reelle Größe durch zwei imaginäre Größen bestimmt sei. In betreff dieser Kritik der KÄSTNERschen Schlußfolgerung bemerkt CAJORI:

> The advanced views expressed here by BRING on the subject of imaginary numbers are the more remarkable as practically all mathematicians of his time, excepting a few men of the first rank like EULER and LAGRANGE looked upon imaginaries as unreal, mysterious and to be avoided ... In the clearness of his argument on imaginary numbers, BRING was in advance of the rank and file of mathematicians of his age.

Aber diese Bemerkung von Cajori ist meiner Ansicht nach unzutreffend. Daß es noch in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts Mathematiker gab, die die Bedeutung der imaginären Größen nicht verstanden, will ich nicht in Abrede stellen, aber daß eigentlich nur die Mathematiker ersten Ranges eine richtigere Auffassung dieser Größen hatten, muß ich verneinen, und der einzige Beleg hierfür, den Cajori bringt, nämlich der Hinweis auf den oben zitierten Passus von Kästner, genügt gar nicht. Gewiß war Kästner, wie Cajori hervorhebt, ein angesehener und kundiger Mathematiker, aber der fragliche Passus ist so kindisch, daß er eigentlich als ein „lapsus calami" bezeichnet werden kann, und man braucht offenbar nicht besonders scharfsinnig zu sein, um die Unrichtigkeit desselben einzusehen; in Wahrheit ist ja schon, wenn $x = y + z$, $y = a + b\sqrt{-1}$, $z = a - b\sqrt{-1}$, die *reelle* Größe $x = 2a$ durch die zwei *imaginären* Größen $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$ „bestimmt"!

Die englische Übersetzung ist, soweit ich dieselbe mit dem Original verglichen habe, befriedigend. Zuweilen ist Brings Latein ein wenig dunkel, und ich bin nicht sicher, daß Cajori die dunkeln Stellen immer richtig übersetzt hat. So z. B. sagt Bring am Ende des § 10: „attamen hujus quantaecunque difficultatis removendae quaedam haud usque adeo tenuis spes ostenditur", was Cajori auf folgende Weise wiedergibt: „and yet even this difficulty can, within a reasonable degree of certainty, be removed"; ich bin eher geneigt, den Passus so zu übersetzen: „und indessen wird eine gar nicht geringfügige Hoffnung erweckt, diese ziemlich große Schwierigkeit zu beseitigen". Warum Cajori auch die Übersetzung des Widmungsschreibens des jungen Respondenten S. G. Sommelius bringt, das mit der Sache gar nichts zu tun hat, ist mir nicht recht verständlich.

Am Ende der Übersetzung hat Cajori eine biographische Notiz über Bring, eine historische Notiz über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, sowie einige kurze Bemerkungen und ein Schriftverzeichnis hinzugefügt. Die biographische Notiz ist aus dem schwedischen *Biographiskt lexikon öfver namnkunnige svenska män*, B. 3 (1837—1838) übersetzt (statt „Ansås" und „Strösvelstrops" ist „Ansås" und „Ströfvelstorp's" zu lesen. Welchen Grundsätzen Cajori bei der Verfertigung des Schriftverzeichnisses folgte, ist mir nicht klar (vgl. das Verzeichnis bei Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra*, Leipzig 1878, S. 999—1001), aber jedenfalls sollte die Abhandlung von K. Hunrath, *Algebraische Untersuchungen nach Tschirnhausens Methode*, III (Hadersleben 1885, 24 S. 4°) zitiert werden, da diese Abhandlung ausdrücklich auf Bring Bezug nimmt. Noch auffälliger ist, daß Cajori den Abdruck der fünf letzten Paragraphen (also des eigentlich interessanten Teiles) der Bringschen Abhandlung im Archiv der Mathematik **41** (1864), S. 105—112, gar nicht erwähnt; angebracht wäre es übrigens gewesen, ausdrücklich zu bemerken, daß diese fünf Paragraphen auch S. 348—355 der von Cajori zitierten Abhandlung von C. J. Hill (1861) wörtlich abgedruckt sind, so daß die Seltenheit der Originalabhandlung eigentlich ein recht bedeutungsloser Umstand ist.

Stockholm. G. Eneström.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1

8_3 (1907/8) : 2. — [Rezension des Bandes 7_2 :] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 319—322. (H. Bosmans.)

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [2

16 : 1 (avril-octobre 1907).

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^3 (1907). [Kleine Bemerkungen.] Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 307—311. (F. Rudio, G. Eneström.) [3

Sturm, A., Geschichte der Mathematik (1906). [Rezension.] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 57. (E. Kullrich.) [4

Ball, W. W. R., Histoire des mathématiques. Edition française, traduite par L. Freund (1906—1907). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 13. (G.) — Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 312—315. (G. Eneström.) [5

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al Medio evo (1907). [Rezension.] *Porto*, Acad. polytechn., Annaes 2, 1907, 249—250. (G. T.) — La revue du mois 3, 1908, 120. (D. — L'enseignement mathém. 10, 1908, 82—83. (G. Vailati.) [6

Günther, S., Geschichte der Mathematik. I. Teil. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Leipzig, Göschen 1908. [7

8°, V + (1) + 427 S. — [9.60 Mk.] — Sammlung Schubert XVIII.

Fourrey, E., Curiosités géométriques (1907). [Rezension.] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1908, 554—555. (H. Wieleitner.) [8

Teixeira, F. G., Tratado de las curvas especiales notables (1905). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 75—78. (H. Wieleitner.) [9

Bonola, R., Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autorisierte deutsche Ausgabe besorgt von H. Liebmann. Leipzig, Teubner 1908. [10

8°, VIII + 244 + (1) S. — [5 Mk.] — [Selbstbericht.] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 35.

Shearman, A. T., Development of symbolic logic (1906). [Rezension.] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 14_4, 1908, 186—191. (E. B. Wilson.) [11

Vailati, G., Per la preistoria del principio dei momenti virtnali. [12
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 225—232.

Kistner, A., Geschichte der Physik (1906). [Rezension.] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 53. (H. Samter.) [13

b) Geschichte des Altertums.

***Cantor, M.,** Babylonische Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. [14
Zeitschr. für Assyriologie 1908.

Heiberg, J. L. und **Zeuthen, H. G.,** Eine neue Schrift des Archimedes (1907). [Rezension.] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 818—831. (F. Rudio.) — Wiadomości matem. 11, 1907, 273—275. [15

Juel, C., Om Arkimedes' Summation af en trigonometrisk Raekke. [16
Nyt Tidsskr. for Mathem. 18, 1907, A: 1—5.

***Degering, H.,** Wann schrieb Vitruv sein Buch über die Architectur? [17
Berliner philolog. Wochenschr. 27, 1907.

c) Geschichte des Mittelalters.

Kugener, M. A., Un traité astronomique et météorologique syriaque attribué à Denys l'Aréopagite (1907). [Rezension.] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 322—323. (H. Bosmans.) [18

Al-Battani, Opus astronomicum, ed. C. A. Nallino, II (1907). [Rezension.] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908 323—324. (H. Bosmans.) [19

Eneström, G., Über eine alte Scherzfrage, die der Lösung einer unbestimmten Gleichung ersten Grades entspricht. [20
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 311.

Thompson, S. P., Peter Peregrinus de Maricourt and his Epistola de magnete (1907). [Rezension.] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 14_4, 1908, 395—396. (F. Cajori.) [21

d) Geschichte der neueren Zeit.

Amodeo, F., Albrecht Dürer precursore di Monge. [22
Napoli, Accad. d. sc., Atti 13_2, 1907. 16 S.

Playoust, Ch., Une page de l'histoire des mathématiques en France au XVIe siècle. [23
Revue génér. d. sc. 18, 1907, 550—552. — Zur Geschichte der Algebra.

***Mascart, J.,** Clavius et l'Astrolabe. [24
Paris, Observatoire, Bullet. astron. 22, 1905; 23, 1906; 24, 1907. — [Rezension.] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 324—331. (H. Bosmans.)

Favaro, A., Regesto biografico Galileiano (1907). [Rezension.] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 322. (H. Bosmans.) [25

Bosscha, J., Simon Marins. Réhabilitation d'un astronome calomnié. [26
Arch. néerl. d. sc. exactes 12_2, 1907, 258—307.

Bosmans, H., La déconverte du Journal d'Isaac Beeckman. [27
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 332—333. — Über Stevin und Descartes.

Cajori, F., Notes on the history of the slide rule. [28
The americ. mathem. monthly 15, 1908, 1—5. — [Résumé:] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 14_4, 1908, 205.

Thirion, J., Pascal. L'horreur du vide et la pression atmosphérique. [29
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 383—450; 13_3, 1908, 149—251.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio (1907). [Rezension.] Bullet. d. sc. mathém. 32_2, 1908, 10—12. (J. T.) [30

Geer, P. van, Hugeniana geometrica IV. [31
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 8_2, 1907, 145—168.

Bosmans, H., Lettre inédite d'Antoine Thomas, Missionnaire belge, en Chine, au XVIIe siècle. [32
Missions belges de la compagnie de Jésus (Bruxelles 1908). 18 S. — Zur Geschichte der astronomischen Beobachtungen in China; der Brief ist 1680 geschrieben.

Langley, E. M., An interesting find. [33
The mathem. gazette 4, 1907, 97—98. — Ein Brief von B. Taylor aus dem Jahre 1711.

Müller, Felix, Über eine Biographie L. Eulers vom Jahre 1780 und Zusätze zur Euler-Literatur. [34
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 36—39.

Braunmühl, A. von, Leonhard Euler. [35
Mitteil. zur Gesch. der Medizin und der Naturwiss. 7, 1908, 1—14

Timerding, E., Eulers Theorie des Schiffes und die Bewegungsgleichungen des starren Körpers. [36
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 84—93.

Braner, E., Eulers Turbinentheorie [37
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 39—46.

Schlesinger, L., Über ein Problem der Diophantischen Analysis bei Fermat, Euler, Jacobi und Poincaré. [38
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 57—87.

Bögh, F., Nogle Bemaerkninger om et dansk matematisk Manuskript fra det 18. Aarhundrede. [39
Nyt Tidsskr. for Mathem 18, 1907, A 93—97.

Une page élémentaire de Lagrange. [40
L'enseignement mathém. 10, 1908, 66—68. — Über abgekürzte Multiplikation

Cajori, F., On the transformation of algebraic equations by Erland Samuel Bring [In Lund, Sweden, 1786]. Translated from the Latin and annotated. [41
Colorado, College, Publications (General series) Nr. 31, 1907, 65—91.

Simon, M., Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension.] Revue génér. d. sc. 18, 1907, 595. [42

Lorea de Pesloüan, Ch., N.-H. Abel (1906). [Rezension:] Nature 75, 1907, 604. — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 540—541 (E. LAMPE.) — Nouv. ann. de mathém. 7_4, 1907, 475. (R. B.) — Revue génér. d. sc. 18, 1907, 509. [43

***Mittag-Leffler, G.,** Niels-Henrik Abel. Paris, Hermann 1907. [44
8°, 68 S. — [2 fr]

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi (1907). [Rezension.] Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 12—13. (E. LAMPE.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1908, 552—553. (H. WIELEITNER.) [45

Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker (1907). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 19, 1908; Lit.-Ber. 8. (SCHRUTKA.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1908, 553. (H. WIELEITNER.) [46

Stäckel, P. und Ahrens, W., Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. [47
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 233—306.

Tannery, J., Manuscrits et papiers inédits de Galois. [48
Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 275—308. — Zusammen mit den zwei vorangehenden Artikeln besonders herausgegeben (Paris, Gauthier-Villars 1908; (3) + 67 + (1) S. 8°)

Walter, A., William Whewells Abhandlungen zur natürlichen Geometrie der Kurven. Graz 1907. [49
4°, 25 S. + 2 Taf. — Realschulprogramm.

Wangerin, A., Franz Neumann (1907) [Rezension.] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 846—847. (W. VOIGT.) — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 528—529. (E. LAMPE.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1908, 550—552. (S. GÜNTHER.) [50

Mackay, J. S., Herbert Spencer and mathematics. [51
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings 25, 1907, 95—106.

Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES publiée par B. BAILLAUD et H. BOURGET (1905). [Rezension.] Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 262—263. (E. JAHNKE.) [52

Miller, G. A., Third report on recent progress in the theory of groups of finite order. [53
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_1, 1907, 78—91, 124—133.

***Stroobant, P., Delvosal, J., Philippot, H., Delporte, E. et Merlin, E.,** Les observatoires astronomiques et les astronomes. Bruxelles, Hayez 1907. [54
8°, VII + 316 S + 1 Karte — (Rezension:) Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 125—126. (A. BERBERICH.)

Carracido, J. R., Sollemne primera adjudicacion de la medalla de su nombre al José Echegaray. Discurso. Madrid 1907. [55
8°, 19 S. + Taf.

*Le feste giubilari di Augusto Righi. Bologna, Zanichelli 1907. [56
8°, VI + 143 S. — [Rezension.] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2941.

Eisenstädter, J., Siegmund Günther. Zu seinem 60. Geburtstag. [57
Das Weltall 8, 1908, 153—157 + Porträt.

Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Nouvelle édition [publiée par la Société mathématique d'Amsterdam]. Amsterdam 1908. [58
8°, (4) + 110 + (2) S

e) Nekrologe.

Giuseppe **Battaglini** (1826—1894). [59
Giorn. di matem. 45, 1907, 229—274 [Schriftverzeichnis]. (F. AMODEO.)

Gustav **Bauer** (1820—1906). [60
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. (Math. Kl.) 37, 1907, 249—257. (C. v. VOIT.)

Davide **Besso** (1845—1906). [61
Il bollett. di matem. (Bologna) 5, 1906, 183—186. (B. VOLPI.)

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906). [62
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachr. (Geschäftl. Mitt.) 1907, 69—82. (W. VOIGT.) — *Leipzig*, Sächs. Ges. d. Wiss., Berichte 58, 1906, 615—627. (TH. DES COUDRES.) — *Manchester*, Philos. soc., Memoirs and proceedings 51, 1906—1907, XLIV—XLV. — *München*, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. (Math. Kl.) 37, 1907, 262—267. (C. v. VOIT.)

Ernesto **Cesaro** (1859—1906). [63
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 12_3, 1906, 358—375. (P. DEL PEZZO.) — Giorn. di matem. 45, 1907, 299—320. (A. PERNA.) — Il bollett. di matem. (Bologna) 5, 1906, 177—182. (V. NOBILE.)

Agnes Mary **Clerke** (1842—1907). [64
Revue génér. d. sc. 18, 1907, 429—430. (TH. MOREUX.)

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [65
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 1—43. (P. DUHEM, Abdruck aus dem Bulletin des sciences mathématiques 31_2, 1907, S. 181—211.)

Asaph **Hall** (1829—1907) [66
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 212 — Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 111—115. (A. BERBERICH.)

Alexander Stewart **Herschel** (1836—1907). [67
Nature 76, 1907, 202—203. (W. F. DENNING.)

Pierre Jules César **Janssen** (1824—1907). [68
Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 78—79. (A. BERBERICH.)

Hermann **Laurent** (1841—1908) [69
L'enseignement mathém. 10, 1908, 177.

Aimé **Laussedat** (1819—1907). [70
Revue génér. d. sc. 18, 1907, 341—342. (M. D'OCAGNE.)

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [71
London, Mathem. soc., Proceedings 5_2, 1907, XIII. (G. DARBOUX.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 26, 1908. 63 S. [mit Schriftverzeichnis]. (G. LORIA.)

Edward John **Routh** (1831—1907). [72
London, Mathem. soc., Proceedings 5_2, 1907, XIV—XX. (A. R. FORSYTH.)

Alfonso **Sella** (1865—1907). [73
Science 26_2, 1907, 923.

William **Thomson**, Lord **Kelvin** (1824—1907). [74
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 242. — Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 89—90. (F. A. SCHULZE.) — Science 27_2, 1908, 1—8. (A. G. WEBSTER.)

Gustav **Zeuner** (1828—1907). [75
Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 61—63. (HELM.)

f) Aktuelle Fragen.

Tannery, J., La méthode en mathématiques. [76
La revue du mois 3, 1908, 5—32.

Tannery, P., Programme d'un cours d'histoire des sciences (1907). — [Rezension.] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 334—335. (H. BOSMANS.) [77

Cajori, F., Lessons drawn from the history of science. [78
School science and mathematics 1908. 12 S.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens X. [79
L'enseignement mathém. 10, 1908, 152—172. (E. CLAPARÈDE, H. FEHR.)

[Deutsche Mathematiker-Versammlung 1907] [80
L'enseignement mathém. 10, 1908, 74—76.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— S. T. Adams am „New Hampshire college" zum Professor der Physik daselbst.

— Direktor B. Baillaud in Toulouse zum Direktor der Sternwarte in Paris.

— S. G. Barton in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der „Clarkson school of technology" in Potsdam, N. Y.

— Dr. W. C. Brenke in Cambridge, Mass., zum Professor der Mathematik an der Universität von Nebraska in Lincoln.

— P. Burgatti in Rom zum Professor der theoretischen Physik an der Universität in Messina.

— Dr W. H. Bussey in New York zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota in Minneapolis.

— L. Cohen an der „George Washington university" zum Professor der Mathematik daselbst.

— Professor E. C. Colpitts in Atlanta zum Professor der Mathematik am „Emporia college" in Kansas.

— Dr. R. H. Curtiss zum Professor der Astrophysik an der Universität von Michigan in Ann Arbor.

— Privatdozent R. du Bois-Reymond in Berlin zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. J. A. Eiesland in Annapolis zum Professor der Mathematik an der Universität von West-Virginia.

— F. Field zum Professor der Mathematik an der „Georgia school of technology" in Atlanta.

— Privatdozent R. Fueter in Marburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Basel.

— Astronom F. Gonnessiat in Paris zum Direktor der Sternwarte in Alger.

— Professor W. Kaufmann in Bonn zum Professor der Physik an der Universität in Königsberg.

— Dozent H. Lebesgue in Poitiers zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. R. B. McClenon in Grinnel zum Professor der Mathematik am „Jowa college" daselbst.

— Professor H. Mache in Innsbruck zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Wien.

— Professor R. C. Maclaurin in Wellington zum Professor der mathematischen Physik an der „Columbia university" in New York.

— Professor M. MacNeill an der „McGill university" zum Professor der Mathematik am „Dalhousie college" in Halifax, Canada.

— Dr. W. A. Manning an der „Stanford university" zum Professor der Mathematik daselbst.

— Professor R. Marcolongo in Messina zum Professor der Mechanik an der Universität in Neapel.

— Dr. J. F. Messick zum Professor der Mathematik am „Randolph Macon college", Virginia.

— Dr. W. M Mitchell zum Direktor des „Haverford college observatory".

— Professor D. A. Murray in Halifax zum Professor der Mathematik an der „McGill university".

— Dr. B. L. Newkirk am „Lick observatory" zum Professor der Mathematik und Mechanik an der Universität von Minnesota in Minneapolis.

— P. G. Nutting an der „George Washington university" zum Professor der Physik daselbst.

— Dr. A. B. Pierce in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan daselbst.

— Professor A. L. Rhoton an der „Southwestern university of Tennessee" zum Professor der Mathematik am „Georgetown college", Kentucky.

— Astronom H. L. Rice in Washington zum Professor der Mathematik am „Naval observatory".

— Dozent E. Rothé in Nancy zum Professor der Physik an der Universität daselbst

— Professor P. Stäckel in Hannover zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

— Professor G. Vivanti in Messina zum Professor der höheren Analysis an der Universität in Pavia.

Todesfälle.

— T. Barker, früher Professor der Mathematik am „Owens college" in Manchester, gestorben den 20. November 1907, 69 Jahre alt.

— Anton von Braunmühl, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in München, geboren in Tiflis den 22. Dezember 1853, gestorben in München den 9. März 1908.

— Robert Lewis John Ellery, Direktor der Sternwarte in Melbourne, gestorben 1907, 80 Jahre alt

— Rinaldo Ferrini, Professor der technologischen Physik an der Technischen Hochschule in Mailand, geboren in Mailand den 6. Juli 1831, gestorben 1908.

— Albert Lancaster, Direktor des meteorologischen Observatoriums in Uccle, geboren in Mons den 24. Mai 1849, gestorben in Brüssel den 4. Februar 1908.

— Hermann Laurent, „répétiteur" an der „Ecole polytechnique" in Paris, geboren in Echternach (Luxemburg) den 2. September 1841, gestorben in Paris den 19. Februar 1908.

— Albert Levy, Professor der Mathematik an der „Ecole de physique et chimie" in Paris, gestorben in Montsouris den 28. Dezember 1907, 64 Jahre alt.

— Lorenz Leonard Lindelöf, früher Oberdirektor des Schulwesens in Finnland, geboren zu Karvia den 13. November 1827, gestorben in Helsingfors den 3. März 1908.

— Adolph Paalzow, früher Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Berlin, geboren in Rathenow den 5. August 1823, gestorben den 2. Januar 1908.

— Alfonso Sella, Professor der Physik an der Universität in Rom, geboren in Biella den 25. September 1865, gestorben den 25. November 1907.

— Richard Strachey, General, Meteorolog, geboren zu Sutton court, Somersetshire den 24. Juli 1817, gestorben den 12. Februar 1908.

— Ludwig Wedekind, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe, gestorben in Karlsruhe den 8 Februar 1908, 65 Jahre alt.

— Charles Augustus Young, früher Professor der Astronomie an der Universität in Princeton, geboren in Hanover, N. H. den 15. Dezember 1834, gestorben daselbst den 4. Januar 1908

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1908 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der mittelalterlichen Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Göttingen hat Professor F. Bernstein für das Sommersemester 1908 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Heidelberg hat Privatdozent K. Bopp für das Sommersemester 1908 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik im achtzehnten Jahrhundert angekündigt.

— An der Universität in Straßburg hat Professor M. Simon für das Sommersemester 1908 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit Kulturgeschichte angekündigt.

Namenregister.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.